# La meccanica relativistica:
# quantità di moto ed energia cinetica

Dal secondo principio della dinamica nella forma relativistica otteniamo l'espressione della *quantità di moto relativistica* valida per ogni osservatore inerziale O. Per ottenerla è sufficiente ricordarsi che tale quantità di moto è il prodotto della massa a riposo $m_0$ per la velocità di Minkowsky $V$ e che l'intervallo temporale misurato da O è collegato a quello misurato dall'osservatore proprio dalla relazione $dt = d\tau / \sqrt{1-v^2/c^2}$ . Otteniamo allora

$$P_x = m_0 V_x = m_0 \frac{d}{d\tau} x = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$P_y = m_0 V_y = m_0 \frac{d}{d\tau} y = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$P_z = m_0 V_z = m_0 \frac{d}{d\tau} z = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui otteniamo la ***quantità di moto relativistica*** *espressa nella grandezze misurate dall'osservatore O:*

$$\boxed{P_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad P_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad P_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Si noti che per velocità $v$ piccole rispetto a $c$, come atteso, la quantità di moto relativistica assume la forma $m_0 v$ che ha nella meccanica classica.
Per velocità prossime a $c$, invece, a differenza di ciò che succede con l'espressione classica, la quantità di moto relativistica aumenta indefinitamente, ma non a causa della velocità $v$ che rimane sempre inferiore a $c$, bensì a causa del termine $m_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}$ impropriamente detto *massa relativistica*. In qualche modo è come se , a velocità elevate, il corpo materiale acquisisse non una velocità ma una massa sempre più elevata. In tale situazione, qualunque sia la forza applicata, il corpo materiale non potrà mai superare la velocità della luce in accordo con le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz.

Come si trova l'espressione della energia cinetica?
Richiamiamo il ***procedimento seguito nella meccanica classica*** : si deve calcolare il lavoro eseguito nell'unità di tempo dalla forza applicata al corpo materiale, ovvero la quantità

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z$$

calcolando, ad esempio, il primo termine troviamo

$$F_x\, v_x = m\frac{dv_x}{dt} v_x = m\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_x^2) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2)$$

sommando, poi, tutti termini otteniamo

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

da cui si ricava che *il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una quantità detta* ***energia cinetica***

$$\boxed{W = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)} \qquad \boxed{T_{New} = \frac{1}{2}mv^2}$$

Per ottenere l'espressione della energia cinetica relativistica possiamo ragionare nello stesso modo utilizzando però l'espressione relativistica della forza. Si ottiene ancora

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z$$

dove, però, il primo termine vale

$$v_x F_x = v_x \frac{d}{d\tau} m_0 V_x = v_x \frac{d}{d\tau} m_0 \frac{d}{d\tau} x = \quad \text{tenendo conto che} \quad dt = d\tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$= v_x \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt}(m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} x) = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v_x) =$$

$$= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} v_x \right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)} \left( v_x \frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} v_x^2 \right)$$

Sommando ora tutti i termini si ha

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z =$$

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+\frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x^2\right)+\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_y\frac{dv_y}{dt}+\frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_y^2\right)+\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_z\frac{dv_z}{dt}+\frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_z^2\right)=$$

$$=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left((v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt})+\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right)=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v\frac{dv}{dt}+\frac{\frac{v^3}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right)=\frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\left(1+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{(1-v^2/c^2)}\right)=\frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2}$$

Per riarrangiare questo risultato calcoliamo la seguente derivata temporale

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=(-\frac{1}{2})\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}(-2\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt})=\frac{\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

possiamo allora riscrivere W

$$W=\frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2}=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene finalmente che *il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una* ***quantità E che ha lo stesso ruolo della energia cinetica classica*** e che deve essere commentata

$$\boxed{W=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}\qquad\boxed{E_{rel}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

# La meccanica relativistica:
# equivalenza massa energia

Richiamiamo ora le espressioni relativistiche e classiche del lavoro della forza nella unità di tempo

$$\boxed{W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)} \qquad \boxed{T_{New} = \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)} \qquad \boxed{E_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Per comprendere il significato di $E_{rel}$ possiamo pensare di vedere che forma assume nel caso in cui $v \ll c$ ovvero nel caso in cui vale la meccanica newtoniana. Si ha

$$E_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq \frac{m_0c^2}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \simeq m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

$E_{rel}$, dunque, per piccole velocità si comporta come l'energia cinetica classica con l'importante differenza, però, che non si annulla quando si annulla la velocità del corpo materiale. E' come se, anche fermo, *il corpo possedesse, per il solo fatto di avere una massa inerziale, la enorme energia* $m_0c^2$ che chiameremo ***energia a riposo***.
Stando così le cose, si potrebbe scrivere

$$E_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2\right)$$

identificando il termine tra parentesi con la energia cinetica dato che, come atteso per una energia cinetica, si annulla quando $v=0$! Si ha allora ***l'energia cinetica relativistica***

$$\boxed{T_{rel} = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2\right)}$$

Si noti che l'espressione della energia cinetica relativistica si può scrivere in una *forma identica alla energia a riposo del corpo materiale* infatti

$$T_{rel} = (\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2) = (\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0) c^2 = M_0 c^2$$

come se *all'energia cinetica relativistica fosse associata una massa a riposo.*
Riassumendo, arriviamo allora alla conclusione che *alla massa inerziale corrisponde una energia mentre ad una energia cinetica corrisponde una massa inerziale*

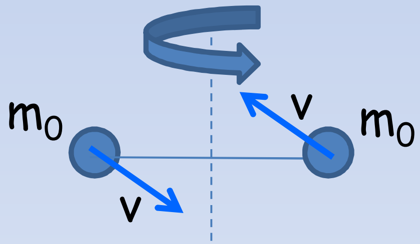
$$m_0 \quad \rightarrow \quad E = m_0 c^2 \qquad\qquad T_{rel} \quad \rightarrow \quad M_0 = \frac{T_{rel}}{c^2}$$

*in relatività anche l'energia cinetica, ovvero il semplice movimento, possiede una massa.* Si tratta di un risultato di fondamentale importanza, che non ha riscontro nella meccanica newtoniana e che risulta essere una conseguenza della teoria della relatività e delle sue premesse fisiche.

Per capire meglio il significato di questo fatto immaginiamo di avere due corpi materiali di massa a riposo $m_0$ uniti da una sottile asticella di massa trascurabile. Nel caso in cui il dispositivo è fermo la massa vale semplicemente


$$m = 2m_0$$

Se ora poniamo in rotazione il dispositivo attorno all'asse, le due masse si muoveranno con velocità *v* dipendente dalla rapidità della rotazione. Ognuna acquisisce anche una energia cinetica $T_{rel}$ e con essa una massa addizionale e si ha




$$m = 2m_0 + 2\frac{T_{Rel}}{c^2}$$

la massa del dispositivo è data dalla somma delle masse a riposo componenti più una massa derivante dallo stato di moto degli stessi.
Da un punto di vista generale il processo fisico che mette in movimento il dispositivo è un processo che richiede energia e che ne determina un aumento della massa per cui si configura come una <u>*conversione di energia cinetica in massa inerziale*</u>.
Il processo contrario invece che portasse il dispositivo nuovamente in quiete si configurerebbe come una <u>*conversione di massa inerziale in energia cinetica*</u>.

Dunque <u>***tra massa inerziale ed energia cinetica esiste una completa interconvertibilità***</u> data dalla formula

$$T_{Rel} = M_0 c^2$$

Ci si può domandare se tale interconvertibilità possa essere estesa ad ogni forma di energia.

Immaginiamo allora di avere a che fare con un sistema meccanico soggetto a forze conservative nel quale si conserva in ogni istante la somma della energia cinetica e potenziale ovvero si conserva l'energia meccanica. Potremo scrivere per un tale sistema

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1) \qquad \Delta V = -\Delta T$$

Sulla base della equazione precedente si ottiene allora

$$\Delta V = -\Delta T = -\Delta m\, c^2$$

la quale mostra che in un tale sistema meccanico, ogni aumento del potenziale determina una diminuzione della massa inerziale, mentre ogni diminuzione del potenziale determina un aumento della massa inerziale del sistema. Dunque *secondo la TRR l'energia potenziale possiede una massa inerziale negativa.*

Al di la di questo fatto, la conclusione rilevante è che, esempi come questo chiariscono che l'interconvertibilità tra energia cinetica e massa inerziale determina di fatto la reciproca convertibilità tra massa inerziale ed energia potenziale e, alla fine, tra massa inerziale e una qualunque forma di energia.
Si deve avere allora che ***la interconvertibilità tra massa inerziale ed energia deve essere intesa nella forma più generale*** espressa dalla relazione

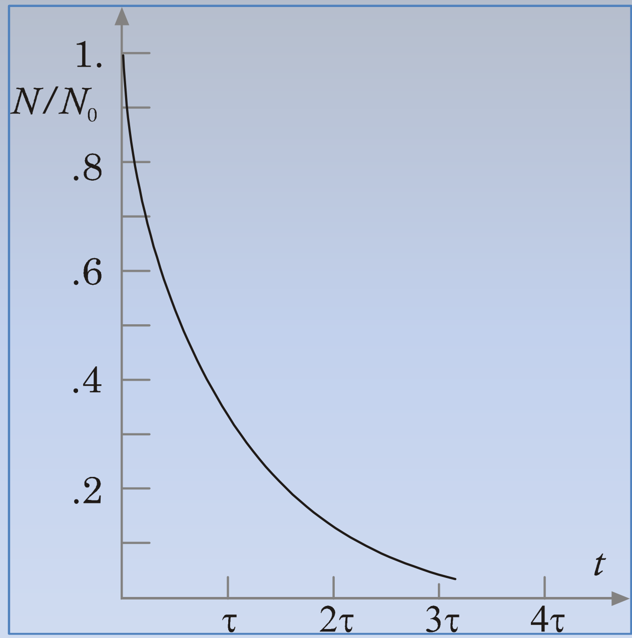
$$\boxed{E = M\, c^2}$$

Questo fatto permette allora di pensare che nulla vieti in linea di principio che in alcuni processi la stessa massa a riposo possa essere convertita in energia e viceversa come suggerito dalla espressione $E_0 = m_0 c^2$ . Naturalmente questo non significa che in ogni processo questo avvenga. La quantità di massa che viene convertita in energia e viceversa è una caratteristica intrinseca del processo per cui lo sfruttamento di questa opportunità richiede l'individuazione dei processi più efficienti. Nei processi nucleari solo piccolissime frazioni di massa vengono effettivamente convertite in energia tuttavia la fisica delle particelle ha scoperto il processo di annichilazione materia-antimateria dove la conversione massa-energia è totale e dove il processo può avvenire nella direzione inverse cioè come conversione di energia in massa ovvero in creazione di materia dalla energia. Tutti i fatti fino ad oggi noti provano la validità generale di questa equazione!

# Verifiche sperimentali:
## la dilatazione del tempo con particelle elementari
## il flusso di muoni a terra

**Legge del decadimento** (τ è la 'vita media' della particella)

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

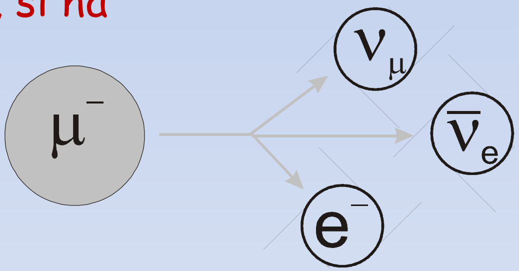



Si noti che dopo ***t*** si ha $N(t) = N_0/2.72$

dopo ***2t*** si ha $N(t)=N_0/2,72^2=N_0/7,4$... etc. etc.

Nel caso dei muoni, prodotti nella interazione fra raggi cosmici e atmosfera, si ha

$$\tau \approx 2{,}2\ \mu s$$



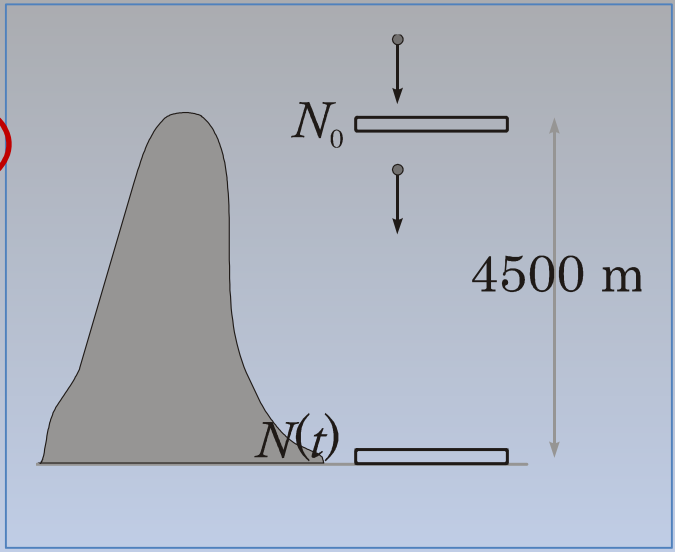

Supponiamo di avere nell'alta atmosfera a *4500 m* di quota, un flusso *1000* muoni all'ora. Il tempo necessario per arrivare a terra vale allora

$$\Delta t = \frac{4500}{0{,}995 \cdot c} \cong 15\ \mu s$$

Assumendo la **fisica classica**, il flusso di muoni a terra dovrebbe valere

$$N_{class}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{2,2}} \approx 10^3 \times 10^{-3} \approx 1$$

ogni ora.




Assumendo invece la **fisica relativistica**, si deve tenere conto del fenomeno della *dilatazione dei tempi* che allunga la vita dei muoni per l'osservatore a terra

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.2}{\sqrt{1-(\frac{0,995c}{c})^2}} \approx 2.2 \times 10 = 22\ \mu s$$

si ha allora per il flusso osservato a terra

$$N_{rel}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau'}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{22}} \approx 10^3 \times 0.5 \approx 500$$

ogni ora.

**I risultati sperimentali confermano in pieno la seconda previsione.**

# Verifiche sperimentali:
## la dilatazione del tempo con particelle elementari
## il flusso di muoni in un acceleratore

*Nature* **268**, 301-305 (28 July 1977)

Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit

J. Bailey[1], K. Borer[2], F. Combley[3], H. Drumm[4], F. Krienen[5], F. Lange[6], E. Picasso[7], W. von Ruden[8], F. J. M. Farley[9], J. H. Field[10], W. Flegel[11] & P. M. Hattersley[12]

1. [1]Daresbury Laboratory, Warrington, Lancashire, UK
2. [2]Physikalisches Institut, Universität Beon, Bern, Switzerland
3. [3]Department of Physics, University of Sheffield, Sheffield, UK
4. [4]European Organization for Nuclear Research, Geneva
5. [5]European Organization for Nuclear Research, Geneva
6. [6]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
7. [7]European Organization for Nuclear Research, Geneva
8. [8]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
9. [9]Royal Military College of Science, Shrivenham, Wiltshire, UK
10. [10]European Organization for Nuclear Research, Geneva
11. [11]European Organization for Nuclear Research, Geneva
12. [12]Department of Physics, University of Birmingham, Birmingham, UK

▲ Top

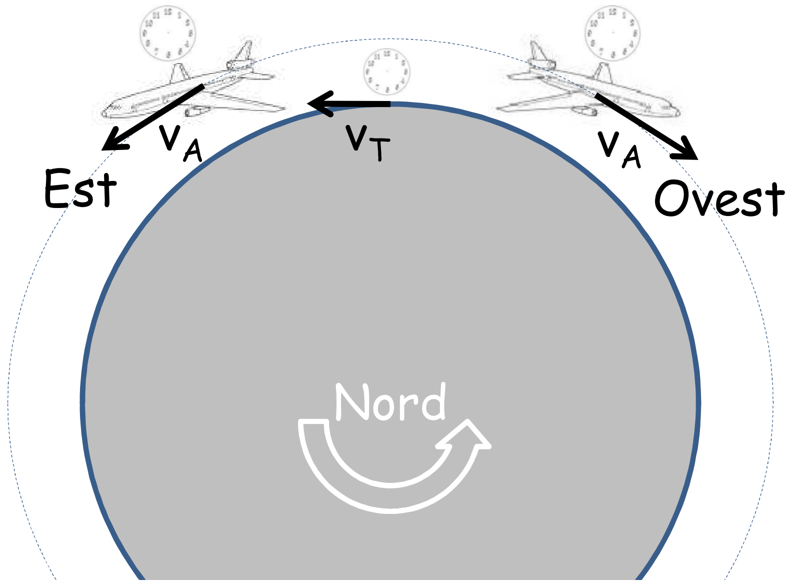
**The lifetimes of both positive and negative relativistic ($\gamma$ = 29.33) muons have been measured in the CERN Muon Storage Ring with the results $\tau^+$ = 64.419 (58) $\mu s$, $\tau^-$ = 64.368 (29) $\mu s$ The value for positive muons is in accordance with special relativity and the measured lifetime at rest: the Einstein time dilation factor agrees with experiment with a fractional error of $2\times10^{-3}$ at 95% confidence. Assuming special relativity, the mean proper lifetime for $\mu^-$ is found to be $\tau_0^-$ = 2.1948(10) $\mu s$ the most accurate value reported to date. The agreement of this value with previously measured values of $\tau_0^+$ confirms CPT invariance for the weak interaction in muon decay.**

In questo lavoro il fenomeno della dilatazione dei tempi è stato utilizzato per ricavare la vita media del muone

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{64.368}{29.33} \approx 2.1948\ \mu s$$

# Verifiche sperimentali:
## la dilatazione del tempo con orologi macroscopici

Nel 1971 J. Hafele e R. Keating eseguirono un esperimento per la verifica del fenomeno della dilatazione del tempo con *orologi macroscopici.*
Nel fenomeno misurato concorrono sia la *dilatazione del tempo di origine cinematica* della teoria della relatività ristretta che quella *di origine gravitazionale* della teoria della relatività generale. Esso è pertanto un *test* della fenomeno della dilatazione del tempo nella sua forma più generale.




| | nanoseconds gained | | | |
|---|---|---|---|---|
| | predicted | | | measured |
| | gravitational (general relativity) | kinematic (special relativity) | total | |
| eastward | 144±14 | −184 ± 18 | −40 ± 23 | −59 ± 10 |
| westward | 179±18 | 96±10 | 275±21 | 273±7 |

Orologio a terra :
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse $V_T$

Orologio Est:
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse $V_T+V_A$

Orologio Ovest:
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse $V_T-V_A$

# Dalla Teoria della Relatività Ristretta alla Teoria della Relatività Generale

Con la formulazione della teoria della relatività ristretta si chiarisce a fondo l'interpretazione dell'elettromagnetismo. Prima di tutto l'assenza di un mezzo fisico ove si propagano le azioni elettriche e magnetiche ed il fatto cruciale che *la velocità della luce assume lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali*. Come nella meccanica, *vale il principio di relatività* e l'apparente contraddizione tra i due principi può essere risolta attraverso una profonda revisione dei concetti di spazio e tempo che comporta a sua volta una riformulazione delle leggi meccaniche e la previsione di nuovi inattesi fenomeni quali la equivalenza tra energia e massa inerziale. Sia pure al prezzo di una profonda rivoluzione possiamo comunque affermare che *dopo la formulazione della TRR meccanica ed elettromagnetismo venivano completamente riconciliate*.

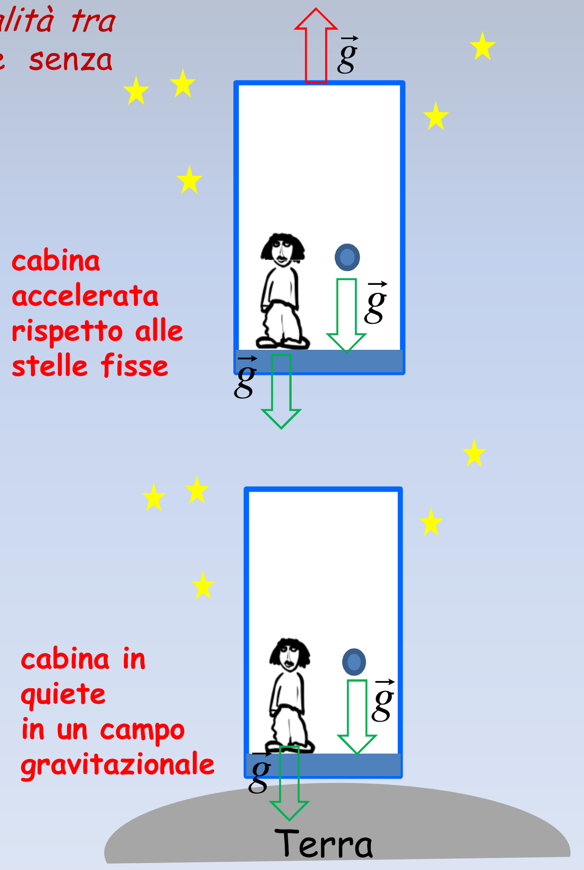
Rimaneva allora, nella fisica, un ***grave problema irrisolto*** riguardante la *forza di gravitazione*, una delle forze fondamentali della natura, la cui teoria di riferimento risaliva a Newton (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, I. Newton 1687*). Per capire la natura del problema richiamiamo le principali conclusioni cui era pervenuta, invece, la teoria delle forze elettriche e magnetiche la cui formulazione definitiva fu fornita da Maxwell (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873).

Secondo la teoria di Maxwell, l'azione di una carica elettrica $q_1$ su di una carica elettrica $q_2$ distante nello spazio, non avviene direttamente ma, diciamo così, in due fasi differenti. La carica $q_1$ modifica lo spazio circostante creando un campo elettrico, ed è solo quando la carica $q_2$ viene immersa in questo campo che subisce l'azione elettrica. Non avviene dunque una azione a distanza tra le cariche ma una azione mediata dal campo. Lo stesso dicasi per le azioni magnetiche, che la teoria maxwelliana riconduceva al movimento delle cariche elettriche, e che si propaga nello spazio per mezzo del campo magnetico. Le equazioni di Maxwell precisavano, poi, tutti i dettagli di questi campi compreso ovviamente il ritardo dell'azione su $q_2$ da parte di $q_1$ dovuto al tempo necessario all'azione per propagarsi.

Nulla di tutto questo è presente nella teoria newtoniana. Miracolosa quando fu formulata alla fine del '600, la teoria non teneva conto delle recenti conquiste maxwelliane , *fondata com'era sul concetto di un'azione istantanea tra le masse distanti, andava riformulata*. Già Maxwell tentò di affrontare il problema formulando una teoria della gravitazione sulla falsariga di quella elettromagnetica ma sottili difficoltà gli impedirono di avere successo.

# Teoria della relatività generale:
# il principio di equivalenza

Einstein affrontò il problema da una prospettiva completamente nuova, assai distante dall'esempio dell'elettromagnetismo. Un primo passo cruciale fu quello di porre l'attenzione su un fatto noto già a Galileo, ovvero che *i corpi materiali in seguito all'azione gravitazionale acquisiscono tutti la stessa accelerazione*. Questo fatto, la cui origine risiede nella *rigorosa proporzionalità tra massa inerziale e massa gravitazionale*, che la teoria newtoniana assume senza spiegare, ha una conseguenza molto rilevante.




Per capirla immaginiamo che un osservatore ed un certo numero di corpi materiali si trovino in quiete relativa all'interno di una cabina nello spazio lontano da tutto e da tutti. Ad un certo istante si accendono i motori e la cabina comincia ad accelerare verso l'alto (rispetto al foglio) con una accelerazione ***a=g***. Dato che il moto accelerato è impresso alla cabina e non ai corpi questi rimangono in quiete anche se, rispetto alla cabina accelerano verso il basso con accelerazione ***a=-g***. Anche l'osservatore accelera verso il basso e quando arriva a toccare il pavimento della cabina ci si appoggia sostenendosi con le gambe mentre i corpi materiali accelerano verso il pavimento cadendovi sopra. *Per l'osservatore dentro la cabina tutto avviene come se, sotto il pavimento, invece dei motori ci fosse il pianeta terra che attrae gravitazionalmente tutti gli oggetti sopra di essa.* Questa identità tra le due situazioni è solo una curiosità priva di contenuto fisico o al contrario nasconde un profondo significato?

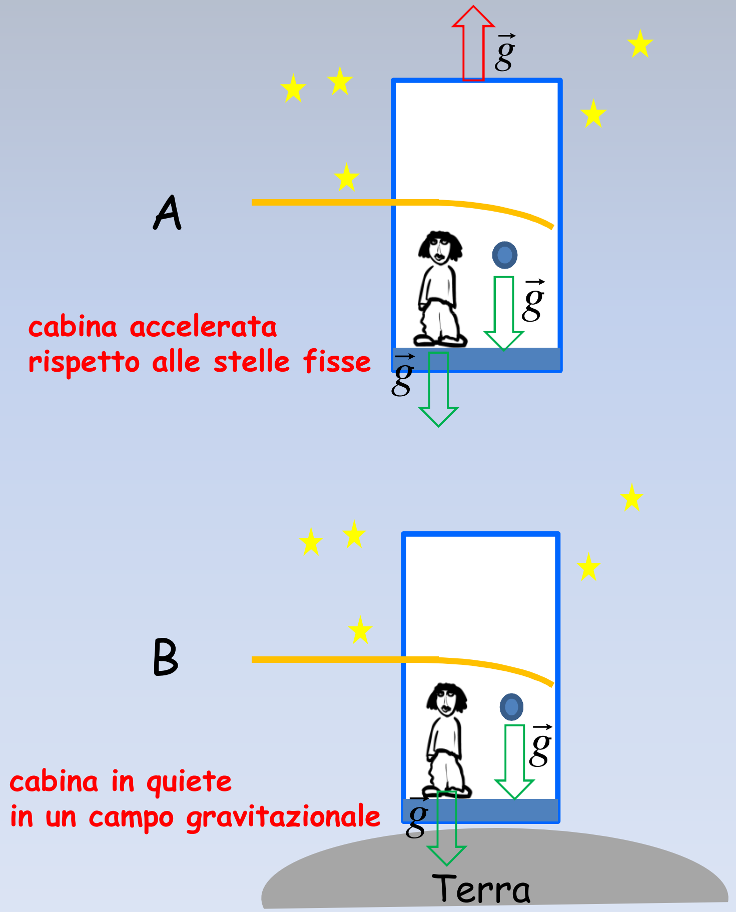
Come ricordato sopra *l'identità tra le due situazioni appoggia sulla proporzionalità rigorosa tra massa inerziale e gravitazionale*. Ora proprio in quegli anni, nel 1909, *L. Eotvos dimostrò con un esperimento di stupefacente precisione che massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali con una precisione di 1 su 100.000.000!* Un fatto simile non può essere casuale ed infatti Einstein pensò che non solo l'osservatore dentro la cabina ma ***<u>nessun esperimento può distinguere tra un moto accelerato della cabina rispetto alle stelle fisse o uno stato di quiete della stessa in un campo di gravità.</u>*** Questo fatto, che Einsten elevò a rango di principio, prende il nome di ***<u>principio di equivalenza</u>*** e rappresenta uno dei pilastri della futura teoria della gravitazione di Einstein

Un secondo passo altrettanto importante consiste nel riconoscere che la teoria della relatività ristretta permette di trasformare le misure eseguite in un riferimento inerziale O in quelle di un riferimento inerziale O' in moto relativo con velocità v, ma che se tale velocità invece che essere costante diventa variabile, si ottiene di fatto il passaggio da un riferimento inerziale O ad uno accelerato O'. Poiché quest'ultimo, sulla base del principio di equivalenza, è fisicamente identico ad un campo di gravità, si deduce che le trasformazioni di Lorentz con una velocità di traslazione variabile per mettono di calcolare gli effetti prodotti dai campi gravitazionali.

Per comprendere il valore preditivo del principio di equivalenza consideriamo i seguenti esempi.

Un osservatore si trova in una cabina accelerata rispetto alle stelle fisse. Ad un certo punto un raggio luminoso diretto parallelamente al pavimento entra nella cabina da un foro laterale attraversandola. Dato che la cabina accelera il raggio colpirà la parete di fronte in un punto più basso spostato vero il pavimento per cui, rispetto alla cabina, il raggio ha subito una deflessione verso il basso (A).
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, le cose andrebbero nello stesso modo se la cabina fosse ferma in campo di gravità. Dobbiamo allora concludere che ***la gravità può curvare la traiettoria della luce*** (B).

Questo effetto fu misurato per la prima volta nel 1919 da A. Eddington che osservò *la deflessione dei raggi stellari radenti la superficie del sole*. L'esperimento fu in seguito criticato ma l'effetto ebbe una conferma definitiva nel 1979 con la scoperta della prima *lente gravitazionale*.



Si consideri ora una piattaforma rotante con velocità angolare ω. Fissato in un certo punto della piattaforma si trova un osservatore O' con un orologio. Per l'osservatore fisso O, posto al centro della piattaforma, l'orologio si muove di moto circolare uniforme e dunque con una *velocità tangenziale* $\boldsymbol{v=\omega R}$ ed una *accelerazione centripeta* $\mathbf{a=v^2/R=\omega^2R}$. L'osservatore solidale con l'orologio O' invece, rispetto al proprio riferimento, registrerà solo una *accelerazione centrifuga* con lo stesso valore $\mathbf{a=v^2/R=\omega^2R}$ (A).
In questa situazione, la teoria della relatività ristretta ci informa che per l'osservatore fisso O, l'orologio di O' deve rallentare il suo ritmo poiché in movimento. In particolare deve essere

$$\Delta t_O = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}}$$

Ora sulla base del principio di equivalenza, l'osservatore O' è equivalente ad un osservatore fermo in un campo di gravità con accelerazione radiale uscente (centriguga) $\boldsymbol{a=\omega^2R}$ ovvero con una forza peso effettiva $\boldsymbol{F=ma=m\omega^2R}$ (B).
Dato che spesso il campo gravitazionale viene caratterizzato dal suo potenziale definito come

$$\phi = -\int_a^b \frac{F}{m}ds + C = -\int_0^R \frac{m\omega^2 r}{m}dr = -\int_0^R \omega^2 r\,dr = -\frac{1}{2}\omega^2R^2$$

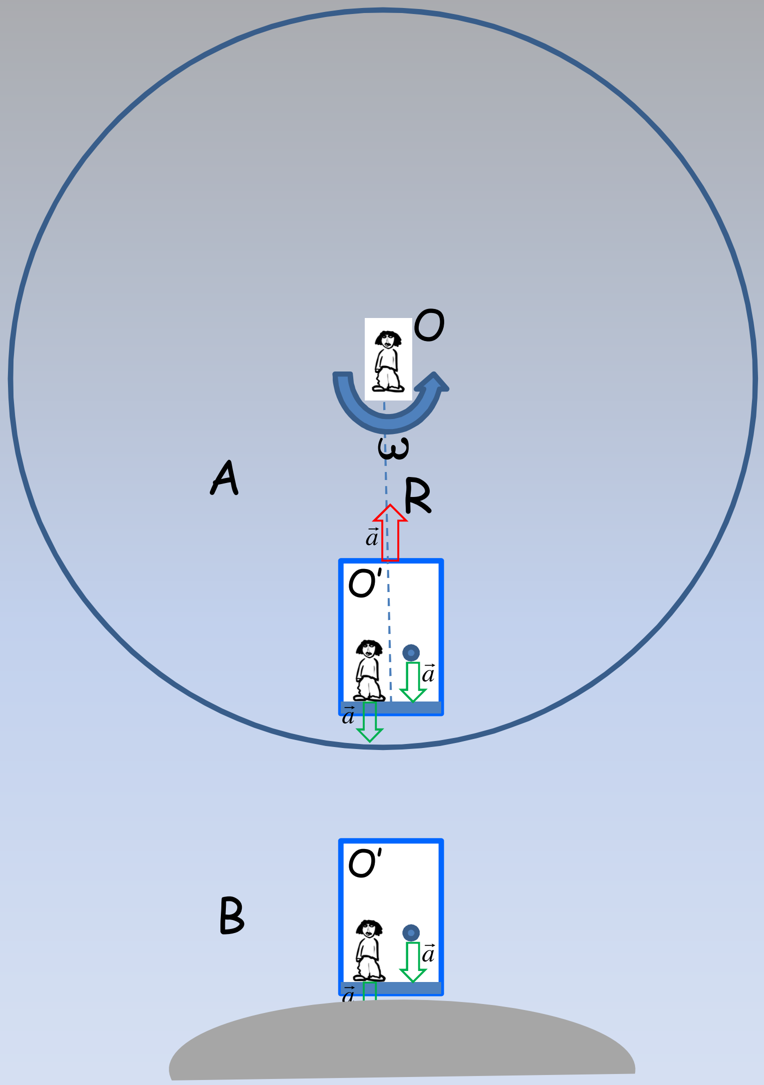
si ha anche

$$\omega^2R^2 = -2\phi$$

che sostituita fornisce la formula

$$\Delta t_O = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1+2\phi/c^2}}$$

La quale afferma che ***la gravitazione dilata il tempo con un effetto tanto più intenso quanto maggiore risulta essere l'intensità del campo*** (ovvero quanto più negativo risulta essere il potenziale gravitazionale). Una conseguenza molto importante è che rallentando il tempo rallenta anche la frequenza di oscillazione della luce dunque il precedente effetto porta a concludere che ***la luce uscente da un campo di gravità sposta la sua frequenza verso valori più bassi*** (spostamento verso il rosso).




Red-shift gravitazionale : R. Pound e G. Rebka 1959 più numerosissime prove astronomiche.
Dilatazione del tempo gravitazionale: J. Hafele e R. keating 1971 più numerosissime prove dal sistema GPS.

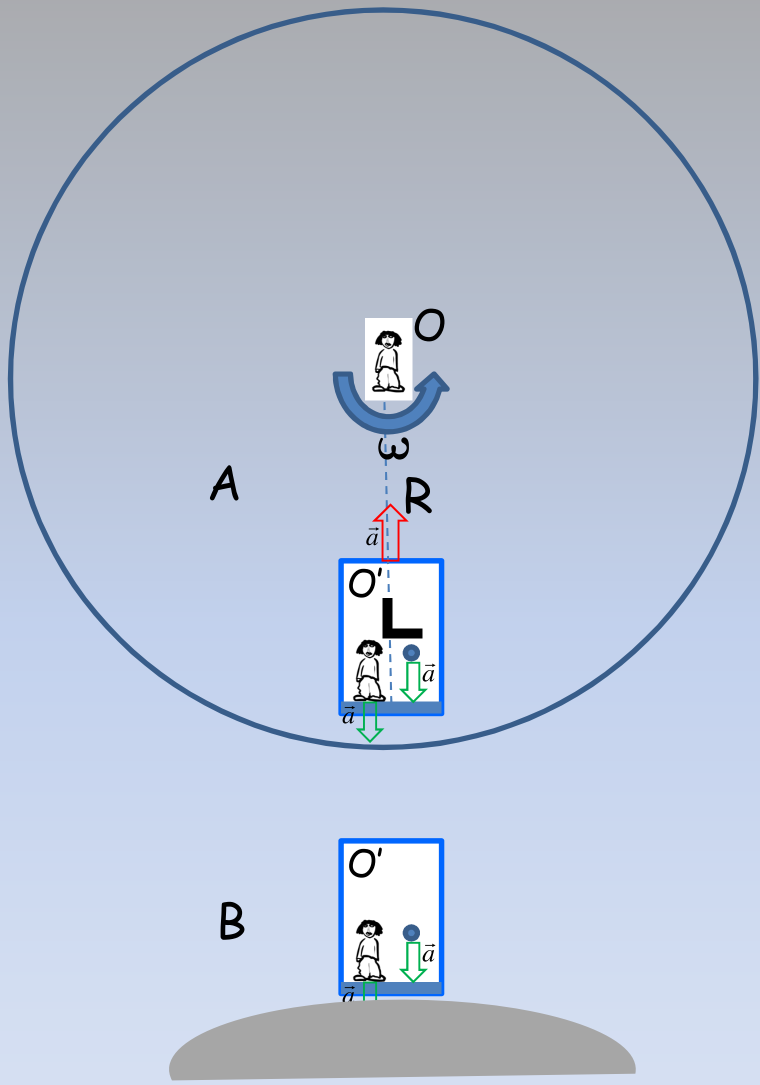
Dall'esempio precedente si può intuire un altro importante aspetto della teoria.
Immaginiamo che l'osservatore O' disponga due regoli di lunghezza L lungo le direzioni tangenti e radiali al moto che chiameremo $L_T$ ed $L_R$ rispettivamente.
L'osservatore fisso O giudicherà allora $L_T$ disposto lungo la direzione del moto con velocità ***v=ωR*** e pertanto *soggetto al fenomeno della contrazione delle lunghezza* mentre giudicherà $L_R$ perpendicolare alla direzione del moto e pertanto di *lunghezza inalterata.*
Accostando regoli rigidi tangenzialmente e radialmente, l'osservatore fisso O, può pensare allora di eseguire una misura della circonferenza e del raggio della traiettoria circolare di O'.
Per quanto riguarda il raggio, le precedenti considerazioni dicono che troverà il valore R che troverebbe in assenza di rotazione della piattaforma, mentre per quanto riguarda la circonferenza troverà il valore contratto dalla rotazione della piattaforma

$$C = 2\pi R\sqrt{1 - v^2 / c^2} = 2\pi R\sqrt{1 - (\omega R)^2 / c^2}$$

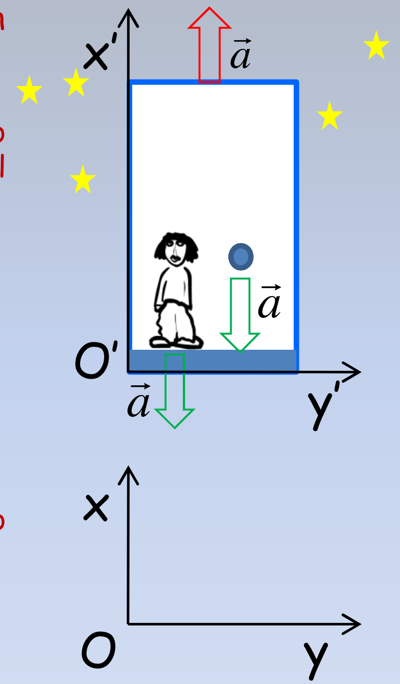
Dunque il rapporto circonferenza raggio misurato da O vale

$$\frac{C}{R} = 2\pi\sqrt{1 - v^2 / c^2} = 2\pi\sqrt{1 - (\omega R)^2 / c^2}$$

più piccolo di quello di un cerchio ordinario. Questo può accadere se il cerchio anziché essere tracciato su di un piano lo pensiamo tracciato su di superficie sferica. Li può infatti accade che il rapporto circonferenza raggio sia più piccolo di quello del piano. Dunque il moto della piattaforma ha in un certo senso curvato la geometria.
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza si avrebbe lo stesso effetto a piattaforma ferma ma con un campo di gravità. Concludiamo allora ***che la gravità determina una trasformazione della ordinaria geometria euclidea in una geometria dello spazio curvo (non euclidea).***



# Teoria della relatività generale:
# le equazioni del campo




L'intuizione che la gravità potesse modificare la geometria fu sviluppata da A. Einstein nel modo seguente.

Immaginiamo che l'osservatore mobile O' si muova non di moto a velocità costante v ma di moto accelerato uniforme a (vedi figura). Assumendo le trasformazioni di Galileo per semplicità il passaggio dalle variabili di O' a quelle di O è dato dalle formule

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} a t'^2 \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x = \Delta x' - a'\Delta t' \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x^2 = \Delta x'^2 + a'^2 \Delta t'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' \\ \Delta y^2 = \Delta y'^2 \\ \Delta z^2 = \Delta z'^2 \\ \Delta t^2 = \Delta t'^2 \end{cases}$$

Con queste possiamo costruire la distanza spaziotemporale tra due eventi secondo l'osservatore fisso O

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \\ &= \Delta x'^2 + a'^2 \Delta t'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \\ &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene nelle variabili dell'osservatore accelerato O'

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2$$

Se O' non fosse accelerato ma si fosse mosso con velocità costante, la TRR dice che avrebbe trovato semplicemente

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, possiamo affermare che l'osservatore O' è fisicamente equivalente ad osservatore fermo in un campo di gravità per cui possiamo affermare che la modifica della distanza spaziotemporale tra due eventi da

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

a

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2$$

è di fatto causata dalla gravità.
Giungiamo allora alla conclusione che da un punto di vista formale la gravità modifica l'espressione della distanza spaziotemporale degli eventi che acquisisce la forma generale seguente

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= g_{11}\Delta x'^2 + g_{12}\Delta x'\Delta y' + g_{13}\Delta x'\Delta z' + g_{14}\Delta x'\Delta t' + \\ &= g_{21}\Delta y'\Delta x' + g_{22}\Delta y'^2 + g_{23}\Delta y'\Delta z' + g_{24}\Delta y'\Delta t' + \\ &= g_{31}\Delta z'\Delta x' + g_{32}\Delta z'\Delta y' + g_{33}\Delta z'^2 + g_{34}\Delta z'\Delta t' + \\ &= g_{41}\Delta t'\Delta x' + g_{42}\Delta t'\Delta y' + g_{43}\Delta t'\Delta z' + g_{44}\Delta t'^2\end{aligned}$$

È evidente che in questa impostazione l'effetto della gravità è interamente descritto dai 16 coefficienti $g_{jk}$ dipendenti in generale dalla posizione e dal tempo. Si può mostrare che non tutti sono indipendenti dato che deve essere per consistenza matematica $g_{jk}=g_{kj}$. In questo modo i coefficienti indi pendenti sono 10.
Dunque ***la gravitazione è formalmente descritta dai 10 coefficienti $g_{jk}$ dipendenti dalla posizione e dal tempo che intervengono nella espressione della distanza spaziotemporale tra due eventi.***

Compreso questo fatto il compito principale della teoria della gravitazione sarà allora quello di definire in che modo, la causa fisica della gravitazione ovvero la massa gravitazionale, determina i coefficienti $g_{jk}$. Si tratta della parte più ardua della teoria poiché la massa gravitazionale, sulla base del principio di equivalenza, è indistinguibile da quella inerziale e quest'ultima, sulla base della teoria della relatività ristretta, è equivalente alla energia. Dunque la sorgente della gravita è in sostanza l'energia stessa. Einstein, in competizione con il matematico D. Hilbert, fu capace di scrivere un insieme di equazioni che fissano i coefficienti $g_{jk}$ una volta data la distribuzione di massa-energia. Si tratta di equazioni non lineari la cui soluzione esatta è nota in un numero limitato di casi note come ***equazioni del campo di Einstein*** e che qui riportiamo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Con queste equazioni, qualora sia capaci di risolverle, può essere trattato qualunque problema di gravitazione.

# Fine e…

un saluto ed un augurio a tutti voi