



### Lunghezza e Tempo

Relatività. Energia e Ambiente Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 12 maggio 2011

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



#### La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz (II)



- La massima lunghezza si sarebbe osservata nel SdR dell'"Etere Luminifero".
- · L'osservatore dell''Etere Luminifero" sarebbe stato l'unico osservatore che ha il "privilegio" di vedere contratti tutti gli oggetti che si muovono rispetto a lui:
  - Gli altri osservatori avrebbero dovuto vedere allungati gli oggetti che si trovano nell'etere (perché si accorcia il metro con cui misurano, tarato nel SdR dell'etere).





#### La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz



- L'idea di una contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto nasce per spiegare il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley (contrazione di Fitzgerald-Lorentz).
- · L'idea era quella di una contrazione degli oggetti in moto rispetto all"Etere Luminifero"
- Si pensava a una effettiva deformazione dei corpi.
- La ragione della contrazione era attribuita a effetti elettromagnetici dovuti a una sorta di interazione tra il materiale del corpo in movimento e quello dell'"Etere Luminifero".





#### La Contrazione Relativistica delle Lunghezze



- Vedremo ora, sulla base delle Trasformazioni di Lorentz, che una contrazione delle lunghezze, nella direzione del moto relativo dei 2 SdR, si può osservare effettivamente.
- · Si tratta tuttavia di una contrazione dovuta alla natura dello spazio-tempo:
  - In particolare, alle sue proprietà di trasformazione nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
  - La distanza tra due punti nello spazio dipende dal SdR.





## La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (II)



- Non ci sono SdR privilegiati:
  - I SdR inerziali sono tutti tra loro equivalenti.
  - Se un osservatore nel SdR S vede un'asta nel SdR S' accorciata, parimenti un osservatore nel SdR S' vede un'asta nel SdR S accorciata (reciprocità).
- · La massima lunghezza si osserva nel SdR in cui l'asta è a riposo.



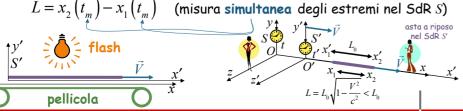
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (IV)



- \* Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in moto nel SdR S, la posizione dei due estremi,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , cambia nel tempo.
- Occorre stabilire in quali istanti se ne misurano gli estremi. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una foto con flash, nell'istante  $t_m$ , segnato dagli orologi del SdR S.
  - Flash e pellicola in quiete nel SdR S.

DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo

- Cioè misura degli estremi simultaneamente nel SdR S.



STUD WOLLOW!

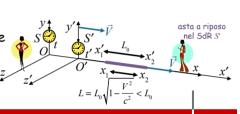
#### La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (III)



- Supponiamo che l'asta, di **lunghezza a riposo**  $L_0$ , sia posta in **quiete** nel **SdR** S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate  $x_1'$  e  $x_2'$ :
  - Essendo l'asta in quiete nel SdR S', la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' non cambia nel tempo, per cui non è necessario misurare simultaneamente la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

Dove coordinate  $x_1$ ' e  $x_2$ ', essendo costanti, si riferiscono a un istante arbitrario.



DOMENICO GALLI - Lunghezza e Temp

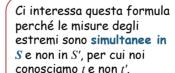
alma mater studiorum - università di bologna

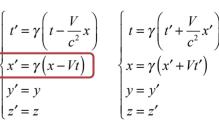


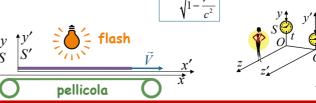
#### La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (V)



• Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (dirette o inverse):







ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI ROLOGNA



#### La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VI)



Dalle trasformazioni di Lorentz (dirette) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma \left( x_1 - V t_1 \right) \\ x_2' = \gamma \left( x_2 - V t_2 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \gamma \left[ x_1 \left( t_m \right) - V t_m \right] \\ x_2' = \gamma \left[ x_2 \left( t_m \right) - V t_m \right] \end{cases}$$

da cui:

$$x_2' - x_1' = \gamma \left[ x_2(t_m) - \mathcal{V}_m - x_1(t_m) + \mathcal{V}_m \right] = \gamma \left[ x_2(t_m) - x_1(t_m) \right]$$





### Reciprocità

OMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo

pellicola



- Supponiamo ora che l'asta, di lunghezza a riposo  $L_0$ , sia posta in quiete nel SdR S, mentre il SdR S' si muove con velocità V rispetto al SdR S
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S, abbiano coordinate  $x_1 e x_2$ :
  - Essendo l'asta in quiete nel SdR S, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S non cambia nel tempo, per cui non è necessario misurare simultaneamente la loro posizione.
- Si ha dungue:

$$L_0 = x_2 - x_1$$

dove coordinate  $x_1$  e  $x_2$ , essendo costanti, si riferiscono a un istante arbitrario.



DOMENICO GALLI - Lunghezza e Temp



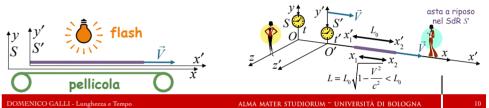
#### La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VII)



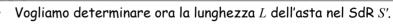
Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è più corta nel SdR S, nel quale l'asta è in moto.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0 \qquad \text{(contrazione relativistica delle lunghezze)}$$

Il SdR in cui la lunghezza dell'asta è massima è il SdR in cui l'asta è a riposo (lunghezza a riposo o lunghezza propria).



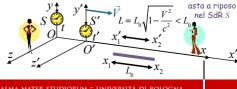
Reciprocità (II)



- Poiché l'asta è in moto rispetto al SdR S', la posizione dei due estremi,  $x'_1(t)$  e  $x'_2(t)$ , cambia nel tempo.
- · Occorre stabilire in quali istanti se ne misurano gli estremi. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una foto con flash, nell'istante  $t'_m$ , segnato dagli orologi del SdR S'.
  - Flash e pellicola in quiete in S'.
  - Cioè misura degli estremi simultaneamente in S'.







DOMENICO GALLI - Lunghezza e Temp





Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (dirette o inverse):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma \left( x - Vt \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma \left( x' + Vt' \right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$
Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono simultanee in S'e non in S, per cui noi conosciamo  $t'$  e non  $t$ .







L'asta è più corta nel SdR S'.

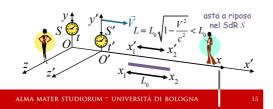
Reciprocità (V)

Dunque, non ostante noi abbiamo invertito le parti, (asta a riposo nel SdR S. invece che asta a riposo nel SdR S') per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è sempre più corta nel SdR, nel quale l'asta è in moto.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

• Il SdR in cui la lunghezza dell'asta è massima è il SdR in cui l'asta è a riposo (lunghezza a riposo o lunghezza propria).







### Reciprocità (IV)



Dalle trasformazioni di Lorentz (inverse) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma \left( x_1' + V t_1' \right) \\ x_2 = \gamma \left( x_2' + V t_2' \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \left[ x_1' \left( t_m' \right) + V t_m' \right] \\ x_2 = \gamma \left[ x_2' \left( t_m' \right) + V t_m' \right] \end{cases}$$

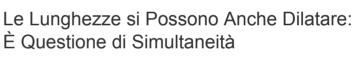
$$\begin{cases} x_1 = \gamma \left[ x_1' \left( t_m' \right) + V t_m' \right] \\ x_2 = \gamma \left[ x_2' \left( t_m' \right) + V t_m' \right] \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \gamma \left[ \boldsymbol{x}_2' \left( t_m' \right) + \mathcal{V}_m - \boldsymbol{x}_1' \left( t_m' \right) - \mathcal{V}_m' \right] = \gamma \left[ \boldsymbol{x}_2' \left( t_m' \right) - \boldsymbol{x}_1' \left( t_m' \right) \right]$$

$$L = x_2'(t_m') - x_1'(t_m') = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$



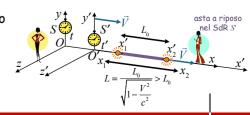
OMENICO GALLI - Lunghezza e Temp



- Supponiamo, come nel primo caso esaminato, che l'asta, di lunghezza a riposo  $L_0$ , sia posta in quiete nel SdR S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate  $x'_1$  e  $x'_2$ :
  - Essendo l'asta in quiete nel SdR S', la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' non cambia nel tempo, per cui non è necessario misurare simultaneamente la loro posizione.
- · Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

dove coordinate  $x'_1$  e  $x'_2$ , essendo costanti, si riferiscono a un istante arbitrario.



DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo



### Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (II)

- FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIAL
- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in moto nel SdR S, la posizione dei due estremi,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , cambia nel tempo.
- Occorre stabilire in quali istanti se ne misurano gli estremi.
- A differenza del caso precedente, supponiamo di mettere sull'asta (solidale a essa) un dispositivo lampeggiatore (orologio), collegato con 2 fili di ugual lunghezza a due lampade poste alle 2 estremità dell'asta e con il lampo delle due lampade impressioniamo una pellicola in quiete nel SdR del laboratorio:
  - Il lampo si ha nell'istante  $t'_m$ , dell'orologio (sulla sbarra) del SdR S'.
  - Pellicola in quiete in S.
    Cioè misura degli estremi in S

asta a riposo
nel SdR S'  $L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > L_0$   $X_1$ 

DOMENICO GALLI - Lunghezza e Temp

pellicola

DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tempe

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITA DI BOLOGN

17

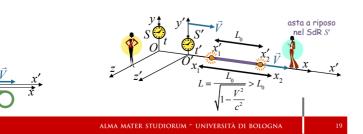


### Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (IV)



• Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (dirette o inverse):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) & formula perché le \\ x' = \gamma \left( x - Vt \right) & x = \gamma \left( x' + Vt' \right) \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \end{cases}$$
Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono simultanee in S' e non in S, per cui noi conosciamo  $t'$  e non  $t$ .





### Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (III)

ONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Misura degli estremi dell'asta nel SdR S, simultaneamente nel SdR S (caso precedente):

$$L = x_2 \left( t_m \right) - x_1 \left( t_m \right)$$



Misura degli estremi dell'asta nel SdR S, simultaneamente nel SdR S' (presente caso):

$$L = x_{2} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix} - x_{1} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix}$$

$$x_{1} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix}$$

$$x_{2} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix} = x_{1} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix}$$

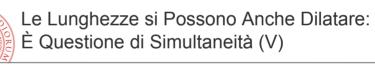
$$x_{2} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix} = x_{2} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix} = x_{1} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix}$$

$$x_{1} \begin{pmatrix} t'_{m} \end{pmatrix} = x_{2} \begin{pmatrix}$$

S S S Sincronia V X Y

DOMENICO GALLI - Lunghezza e Te

MA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



ONDAZIONE USEPPE OCCHIALINI

 $x = \gamma (x' + Vt')$ 

v = v'

 Dalle trasformazioni di Lorentz (inverse) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x_1' + Vt_1') \\ x_2 = \gamma(x_2' + Vt_2') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t_m') = \gamma[x_1' + Vt_m'] \\ x_2(t_m') = \gamma[x_2' + Vt_m'] \end{cases}$$

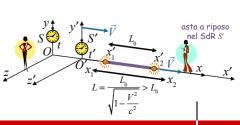
da cui:

$$x_{2}(t'_{m}) - x_{1}(t'_{m}) = \gamma \left[ x'_{2} + \mathcal{V}t'_{m} - x'_{1} - \mathcal{V}t'_{m} \right] = \gamma \left( x'_{2} - x'_{1} \right)$$

$$L = x_{2}(t'_{m}) - x_{1}(t'_{m}) = \gamma \left( x_{2} - x_{1} \right) = \gamma L_{0} =$$

$$=\frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$

$$V' = \frac{V'}{c^2} > \frac{V$$



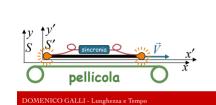


#### Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (VI)



Dunque, questa volta, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, e a causa della differente scelta di simultaneità delle misure, l'asta è più lunga nel SdR S, nel quale l'asta è in moto.

$$L = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



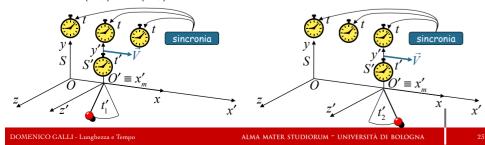


### La Dilatazione Relativistica dei Tempi (II)



- Vogliamo ora determinare il semiperiodo del pendolo nel SdR S. rispetto al quale il SdR S' si muove con velocità V.
- Poiché il pendolo è in moto nel SdR S, la posizione del pendolo nei due istanti  $t_1$  e  $t_2$ , è diversa:  $x_1 = x(t_1)$  e  $x_2 = x(t_2)$ .
- Occorre stabilire in quali posizioni si misurano i 2 tempi. Supponiamo di misurare i 2 tempi, nella posizione  $x'_{m}$ , fissa nel SdR S ', a cui però corrisponderanno 2 posizioni diverse nel SdR S:

$$T = t_2(\overset{\downarrow}{x_m}) - t_1(\overset{\downarrow}{x_m})$$
 (misure nella stessa posizione nel SdR S')

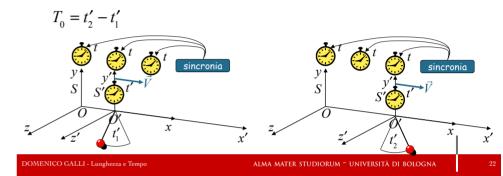




#### La Dilatazione Relativistica dei Tempi



- Consideriamo la misura della durata di un evento che ha luogo in una posizione x' fissa nel SdR S' (per esempio il sempieriodo dell'oscillazione di un pendolo).
- L'orologio posto in x' (fermo rispetto a S') misura il tempo t', quando l'evento ha inizio e  $t'_2$  quando l'evento termina.
- La durata dell'evento misurata da S' è guindi

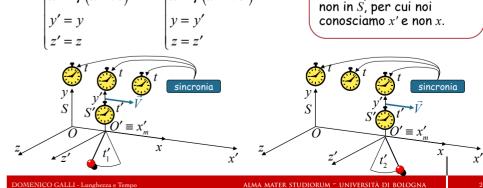




#### La Dilatazione Relativistica dei Tempi (III)



· Le relazioni tra i tempi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (dirette o inverse):



Ci interessa questa

formula perché le misure dei tempi sono nello

stessa posizione in S' e



#### La Dilatazione Relativistica dei Tempi (IV)



Dalle trasformazioni di Lorentz (inverse) otteniamo, in particolare, per i 2 istanti:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma \left( t_1' + \frac{V}{c^2} x_1' \right) \\ t_2 = \gamma \left( t_2' + \frac{V}{c^2} x_2' \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 \left( x_m' \right) = \gamma \left( t_1' + \frac{V}{c^2} x_m' \right) \\ t_2 \left( x_m' \right) = \gamma \left( t_2' + \frac{V}{c^2} x_m' \right) \end{cases}$$

da cui:

$$t_{2}(x'_{m}) - t_{1}(x'_{m}) = \gamma \left[t'_{2} + \frac{V}{c^{2}}x'_{m} - t'_{1} - \frac{V}{c^{2}}x'_{m}\right] = \gamma \left(t'_{2} - t'_{1}\right) \stackrel{\text{Sincronic}}{=} T$$

$$T = t_{2}(x'_{m}) - t_{1}(x'_{m}) = \gamma \left(t'_{2} - t'_{1}\right) = \gamma T_{0} = \frac{T_{0}}{\sqrt{1 - \frac{V^{2}}{c^{2}}}} > T_{0}$$

$$\sqrt{1 - \frac{V^{2}}{c^{2}}} > T_{0}$$

$$\sqrt{1 - \frac{$$

#### Reciprocità



- L'effetto di dilatazione dei tempi deve essere completamente reciproco e non determinare il privilegio di nessun SdR rispetto agli altri.
- Cosideriamo un SdR S' in moto relativo rispetto al SdR S.
- Un orologio fisso in S' è visto in moto da un osservatore in S il quale dunque lo vede rimanere indietro.
- Tuttavia è vero anche che un orologio fisso in S è visto in moto da un osservatore in S' il quale dunque lo vede rimanere indietro.
- Come si possono conciliare queste due affermazioni?
  - Qual è l'orologio che veramente rimane indietro rispetto all'altro?
  - Qual è l'orologio che invece va avanti rispetto all'altro?



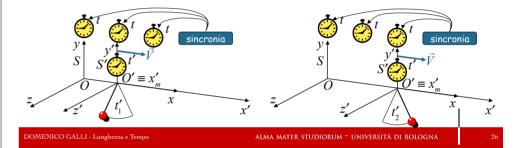
#### La Dilatazione Relativistica dei Tempi (V)



Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo è più lungo nel SdR S, nel quale il pendolo è in moto:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > T_0$$
 (dilatazione relativistica dei tempi)

• Il SdR in cui il periodo del pendolo è minimo è il SdR in cui il pendolo è a riposo (tempo proprio).





DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo

#### Reciprocità (II)

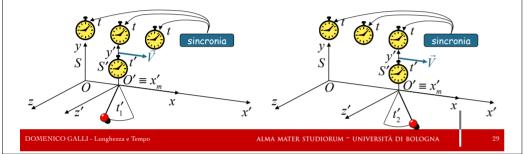


- · La chiave della risposta sta nel procedimento di confronto degli orologi.
- Per confrontare i tempi in un certo istante, occorre potere disporre di due orologi che in quell'istante si trovano nella stessa posizione:
  - Altrimenti non è possibile definire univocamente la simultaneità della misura del tempo da parte dei 2 orologi.
- · Occorre dunque potere disporre, almeno in uno dei 2 SdR, di una successione di orologi sincronizzati tra loro.
  - P. es. mediante un dispositivo di sincronismo che comanda tutti gli orologi della successione mediante cavi elettrici della stessa lunghezza.
- · Nell'altro SdR è sufficiente un orologio singolo.





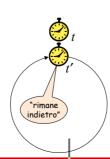
- Nel nostro calcolo abbiamo supposto di misurare sia il tempo  $t_1$ , sia il tempo  $t_2$  nel punto alla coordinata  $x'_m$ , che è fisso nel SdR S' ma che si muove nel SdR S.
- Questo significa che abbiamo bisogno di un solo orologio nel SdR S' ma di almeno 2 orologi nel SdR S.
- L'orologio che rimane indietro è quello nel SdR S' cioè l'orologio singolo che viene confrontato con 2 orologi.







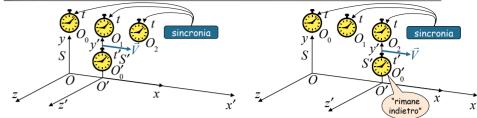
- · Che cosa succede se si prendono 2 orologi:
  - Uno fisso in un certo SdR inerziale;
  - Uno che, partendo dallo stesso punto, descrive una **traiettoria chiusa** e ritorna al punto di partenza?
- In questo caso il calcolo è più complicato perché l'orologio in moto si trova in un SdR non-inerziale (non è in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto a un SdR inerziale).
- Tuttavia si può dimostrare che rimane indietro l'orologio in moto.
- La reciprocità non vale perché uno dei due SdR non è inerziale.



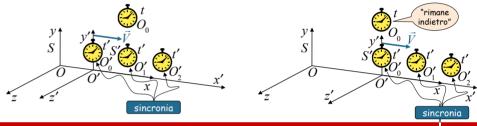
# STUD ORUM

#### Reciprocità (IV)





 In generale rimane indietro l'orologio singolo che viene confrontato con la successione di orologi.



DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tem

DOMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo

. Lma mater studiorum - università di bologna

#### Paradosso dei Gemelli

- Uno dei due gemelli parte a bordo di una navicella spaziale e compie un lungo viaggio con velocità costante e prossima a quella della luce, lasciando l'altro gemello sulla Terra.
- Dopo alcuni anni egli ritorna sulla Terra e si ricongiunge al fratello. Per tutto il tempo in cui è stato sulla navicella, il gemello viaggiatore ha vissuto in un mondo in cui lo scorrere del tempo e tutti i fenomeni, compresi i processi biologici dell'invecchiamento, erano rallentati.
- Al suo ritorno sulla Terra egli sarà quindi rimasto più giovane del fratello che è rimasto sulla Terra.











#### Paradosso dei Gemelli (II)



Se il gemello viaggiatore ha viaggiato per 10 anni (secondo quanto indicato dall'orologio della navicella) a una velocità v=0.9 c, per il gemello sulla Terra sono passati:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{10 \text{ anni}}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = 22.94 \text{ anni}$$









OMENICO GALLI - Lunghezza e Tempo

alma mater studiorum – università di bolog

33







#### Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli
https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA