La trasformazione delle misure di posizione e tempo tra due osservatori inerziali : le Trasformazioni di Galileo

Dalla equivalenza di tutti i riferimenti inerziali conseguono immediatamente le proprietà di omogeneità ed isotropia dello spazio. Tuttavia, se vogliamo esplorare a fondo le implicazioni del principio di relatività, è necessario studiare sistematicamente le relazioni esistenti tra le misure, dello stesso fenomeno fisico, compiute da due differenti sistemi inerziali.
Cominciamo dal caso più semplice, riguardante la misura della posizione del punto materiale P compiuta da due diversi sistemi inerziali *Oxyz* e *O'x'y'z'*.

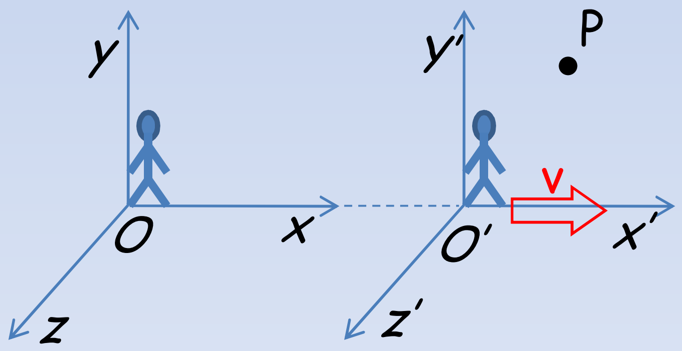
E' evidente che nel caso generale i due riferimenti potrebbero differire nella orientazione degli assi, inoltre la velocità relativa potrebbe avere una qualunque direzione nello spazio. Tutto ciò costituirebbe una complicazione di natura geometrica priva di contenuto fisico. Conviene allora assumere la seguente situazione nella quale

i) i riferimenti *Oxyz* e *O'x'y'z'* hanno assi paralleli con gli assi *x* e *x'* sulla stessa retta;

ii) il riferimento *Oxyz* è pensato in quiete ed il riferimento *O'x'y'z'* in moto rettilineo uniforme con velocità *v* diretta lungo l'asse *x*

iii) in quiete, in ciascuno dei due riferimenti, si trovano due osservatori *O* ed *O'* dotati di regoli e cronometri identici per compiere le misure di posizione e tempo. Inoltre, i cronometri sono regolati in modo tale che segnino entrambi *t=0* quando le origini *O* ed *O'* coincidono.

I due riferimenti



Osservatore O'

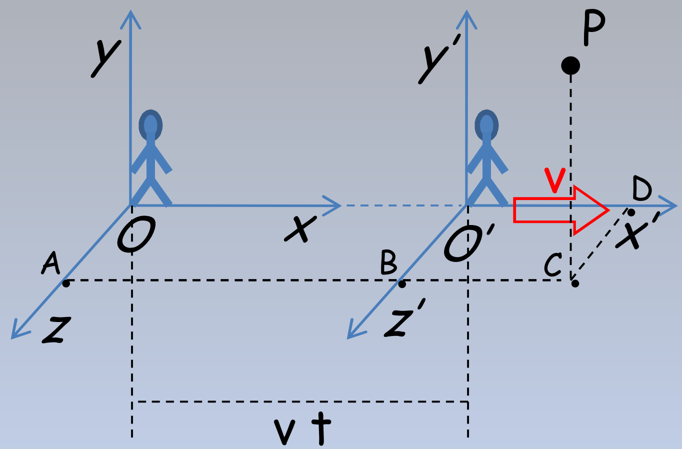
Dopo avere misurato i segmenti PC, O'B e O'D con il proprio regolo e riferendosi al proprio orologio, l'osservatore O' afferma che il punto P si trova nella posizione

$$x'_{O'} \;\; y'_{O'} \;\; z'_{O'} \quad \text{al tempo} \quad t_{O'}$$

Osservatore O

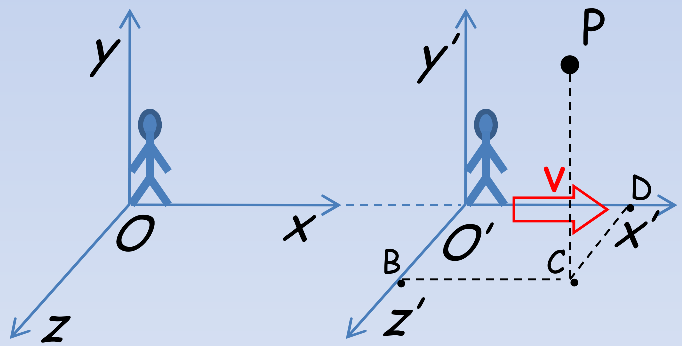
Dopo avere misurato i segmenti PC, OA=O'B e OD=OO'+O'D con il proprio regolo e riferendosi al proprio orologio, l'osservatore O afferma che il punto P si trova nella posizione

$$x_O = x'_O + v_O t_O \qquad y_O = y'_O \qquad z_O = z'_O \quad \textit{al tempo} \quad t_0 \qquad (1)$$



Nota

I segmenti O'B, O'D e PC vengono misurati da entrambi gli osservatori. Essendo questi in moto relativo non è affatto detto che le misure ottenute da O ovvero X'_O, Y'_O e Z'_O coincidano con quelle ottenute da O' ovvero $X'_{O'}$, $Y'_{O'}$ e $Z'_{O'}$. Analogamente non è detto che t_O coincida con $t_{O'}$.



Si pone allora il seguente fondamentale quesito: valgono le uguaglianze seguenti?

$$x'_O = x'_{O'} \qquad y'_O = y'_{O'} \qquad z'_O = z'_{O'} \qquad t_O = t_{O'} \qquad (2)$$

Ovviamente solo l'esperimento può decidere sulla validità o meno di queste relazioni, ovvero *stabilire se due osservatori in moto relativo uniforme, che misurano gli stessi segmenti e gli stessi intervalli temporali, troveranno gli stessi valori oppure no.*

Prima della formulazione della TRR, un esperimento per dimostrare la validità di queste uguaglianze non è mai stato nè pensato nè, tantomeno, fatto: **semplicemente questo problema non è mai stato sollevato**! **La meccanica, l'elettromagnetismo, la termodinamica, ed in generale tutta la fisica prerelativistica (fisica classica) sono state formulate assumendo la loro validità.** Anche se non sempre dichiarato espressamente, si aderiva nella sostanza alla concezione newtoniana dello spazio e del tempo assoluti:

Il Tempo Assoluto, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, I. Newton 1687:
[…] il tempo assoluto vero e matematico, in sé e per sua natura, fluisce uniformemente senza relazione a qualcosa di esterno, e con un altro nome si chiama durata; il tempo relativo, apparente e comune, è la misura sensibile ed esterna […] della durata attraverso il mezzo del movimento, ed esso è comunemente usato al posto del tempo vero; esso è l'ora, il giorno, il mese, l'anno. Lo spazio assoluto […]

Non fu facile capire - e lo capì A. Einstein formulando la TRR - che i conflitti tra meccanica ed elettromagnetismo di cui diremo, traevano la propria origine proprio dalla infondatezza di questa ipotesi.

Se, in accordo con le assunzioni della fisica classica, assumiamo la validità delle (2)

$$x'_O = x'_{O'} \qquad y'_O = y'_{O'} \qquad z'_O = z'_{O'} \qquad t_O = t_{O'}$$

e le sostituiamo nelle (1)

$$x_O = x'_O + v_O t_O \qquad y_O = y'_O \qquad z_O = z'_O \quad \text{al tempo} \quad t_0$$

otteniamo

$$x_O = x'_{O'} + v_O t_O \qquad y_O = y'_{O'} \qquad z_O = z'_{O'} \quad \text{al tempo} \quad t_0 = t_{0'}$$

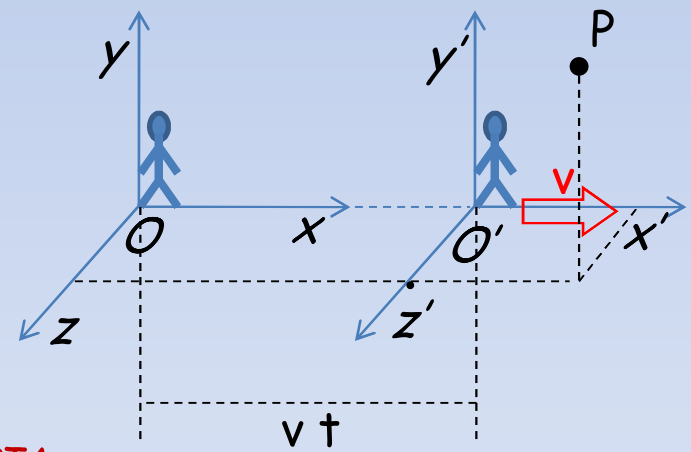
se ora semplifichiamo la notazione ponendo

$x'_{O'}=x'$, $y'_{O'}=y'$, $z'_{O'}=z'$; $x_O=x$, $y_O=y$, $z_O=z$; $t_0=t_{O'}=t$ e $v_O=v$,

otteneniamo

$$x = x' + v\,t \qquad y = y' \qquad z = z' \quad \text{al tempo} \quad t$$

che invertite forniscono le



Trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

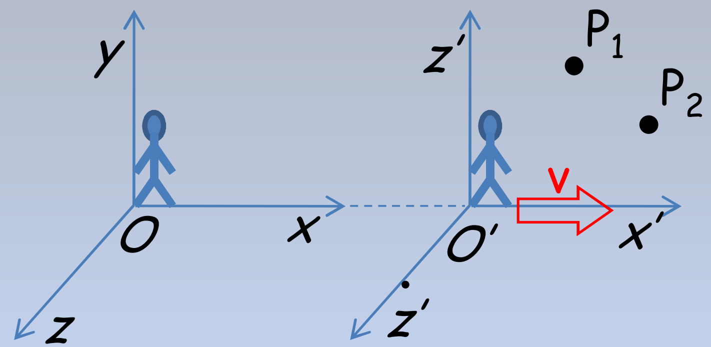
NOTA
il contenuto fisico, implicito nelle *trasformazioni di Galileo*, è quello di affermare che gli osservatori in moto relativo uniforme, che misurano gli stessi intervalli spaziali e temporali, trovano gli stessi valori.

Quanto affermato nella NOTA della pagina precedente può essere ottenuto direttamente dalle trasformazioni di Galileo stesse.

Immaginiamo che, nel riferimento O' nell'istante di tempo t', due corpi materiali P_1 e P_2 occupino due differenti posizioni dello spazio e di domandarci quale sia la distanza tra le loro posizioni misurata da O'. Utilizzando i propri regoli egli troverà le coordinate (x'_1, y'_1, z'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2) e quindi la distanza

$$d' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

La distanza tra le posizioni dei corpi materiali P e Q al tempo t' misurata da O'



D'altra parte le Trasformazioni di Galileo forniscono le relazioni con le coordinate degli stessi punti misurate dall'osservatore O al tempo t=t'

$$x'_1 = x_1 - vt \qquad y'_1 = y_1 \qquad z'_1 = z_1$$
$$x'_2 = x_2 - vt \qquad y'_2 = y_2 \qquad z'_2 = z_2$$

che sostituite nella espressione di d' forniscono $d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d$

Dunque gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa distanza tra i corpi materiali P_1 e P_2. Possiamo allora affermare che

secondo le Trasformazioni di Galileo, la distanza tra due dati punti dello spazio (intervallo spaziale) è la stessa per tutti gli osservatori inerziali.

Del tutto equivalente è l'enunciato seguente :

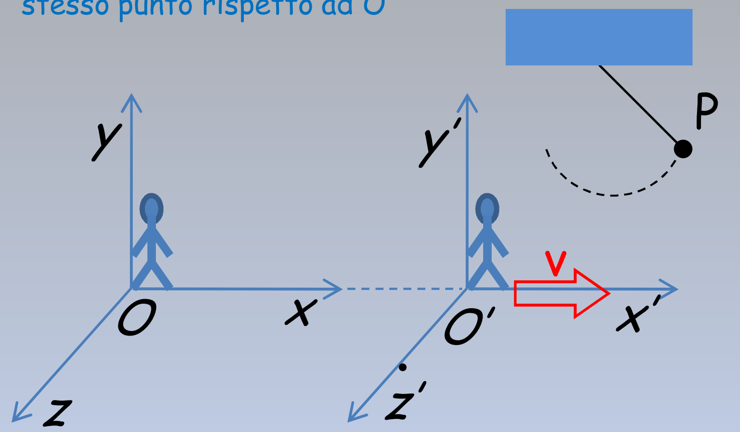
secondo le Trasformazioni di Galileo, la distanza tra due dati punti dello spazio non dipende dallo stato di moto uniforme.

In questa forma l'accento cade sull'importante fatto fisico secondo il quale, assumendo le trasformazioni di Galileo, la lunghezza dei corpi materiali non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

Possiamo ragionare in modo analogo sulle distanze temporali immaginando che in un determinato punto dello spazio del riferimento O' avvenga un certo evento fisico caratterizzato da una certa durata: ad esempio un corpo materiale appeso ad un filo (pendolo) che al tempo t'_1 si trova in una certa posizione dello spazio e che al tempo t'_2 ritorna nella stessa posizione (nel riferimento O'). La durata temporale di questo evento misurata da O' vale evidentemente

$$\delta' = t'_2 - t'_1$$

Il corpo materiale P del pendolo solidale con il riferimento O' dopo un certo tempo ritorna nello stesso punto rispetto ad O'



d'altra parte dalle Trasformazioni di Galileo si ha

$$t'_1 = t_1 \qquad t'_2 = t_2$$

che sostituite nella prima espressione forniscono

$$\delta' = t_2 - t_1 = \delta$$

Dunque gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa durata dell'evento fisico considerato. Possiamo allora affermare che

<u>secondo le trasformazioni di Galileo, la durata di un dato evento (intervallo temporale è la stessa per tutti gli osservatori inerziali.</u>

Del tutto equivalente è l'enunciato seguente

<u>secondo le Trasformazioni di Galileo, la durata di un dato evento non dipende dallo stato di moto uniforme</u>.

Si noti che in questa forma si comprende subito l'importante fatto fisico secondo il quale, assumendo le trasformazioni di Galileo, il ritmo di un cronometro non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

Mettendo insieme le conclusioni ottenute possiamo affermare che

<u>secondo le trasformazioni di Galileo gli intervalli spaziali e temporali assumono lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali</u>

od anche che

<u>secondo le Trasformazioni di Galileo gli intervalli spaziali e temporali sono assoluti per tutti gli osservatori inerziali</u>

La trasformazione delle grandezze meccaniche tra due osservatori inerziali

Una volta in possesso delle Trasformazioni di Galileo siamo in grado di connettere le misure di posizione e tempo eseguite da due osservatori inerziali O e O' in merito allo stesso evento fisico. Si tratta di un avanzamento fondamentale poiché, da queste, potremo costruire le leggi di trasformazione delle misure di velocità, accelerazione e forza e, alla fine, delle leggi meccaniche stesse. Riusciremo così a stabilire *in che modo due diversi osservatori inerziali scrivono le leggi di un dato fenomeno meccanico.*

Velocità

Le componenti cartesiane del vettore velocità **w** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque la velocità misurata da O' vale

$$\vec{w}\,' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \qquad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{w} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

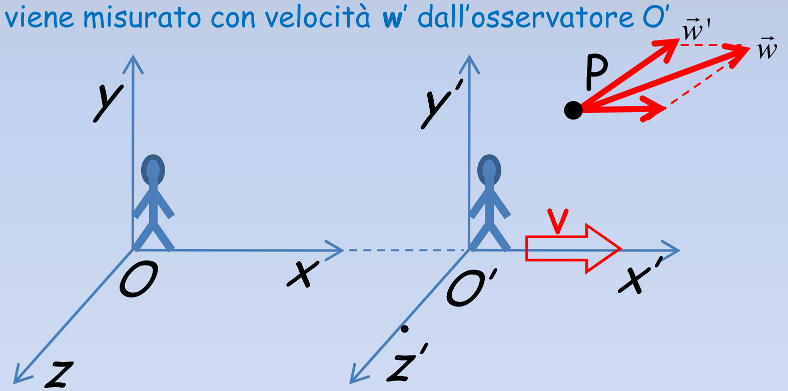
$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{w}\,' = \left(\frac{d(x-vt)}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt} - v, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) - (v,0,0)$$

ora si noti che la prima parentesi nell'ultimo membro è proprio la velocità **w** misurata da O (vedi la (2)) mentre la seconda parentesi è la velocità **v** del riferimento O' rispetto ad O dunque

Un corpo materiale che ha velocità **w** rispetto ad O viene misurato con velocità **w**' dall'osservatore O'



$$\boxed{\vec{w}\,' = \vec{w} - \vec{v} \qquad \vec{w} = \vec{w}\,' + \vec{v}}$$

<u>Dato un riferimento O' in moto uniforme con velocità v rispetto ad O, un corpo materiale misurato con velocità w' dall'osservatore O' viene misurato con velocità w=w'+v dall'osservatore O.</u>

Accelerazione

Le componenti cartesiane del vettore velocità **a** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo due volte la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque l'accelerazione misurata da O' vale

$$\vec{a}\,' = \left(\frac{d^2x'}{dt'^2}, \frac{d^2y'}{dt'^2}, \frac{d^2z'}{dt'^2}\right) \qquad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

e sostituendo in (1) otteniamo

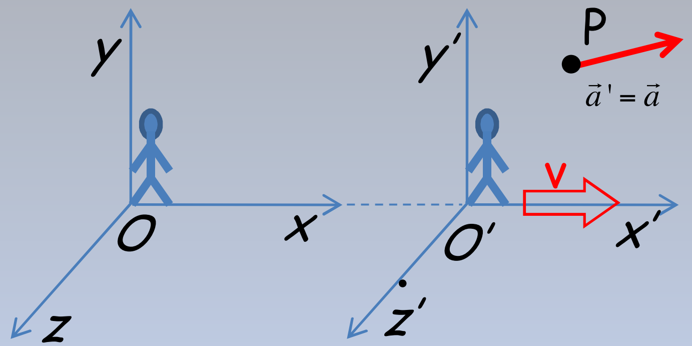
$$\vec{a}\,' = \left(\frac{d^2(x-vt)}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

ora si noti che la parentesi nell'ultimo membro è proprio l'accelerazione **a** misurata da O (vedi la (2)) dunque

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della accelerazione impressa ad un corpo materiale.

Un corpo materiale che ha accelerazione **a'** rispetto ad O' viene misurato con la stessa accelerazione **a** dall'osservatore O



Forza

Ora cercheremo di stabilire la relazione esistente tra le misure della stessa forza da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito ricordiamo che una *forza* agente su di un corpo materiale è assimilabile alla *azione sviluppata da un dinamometro applicato al corpo materiale stesso* e *rappresentata da un segmento orientato (vettore)* la cui direzione e verso coincide con quella lungo la quale è disposto il dinamometro e la cui lunghezza è proporzionale alla intensità misurata dal dinamometro.

Dunque *per capire come due osservatori inerziali vedono la stessa forza è sufficiente chiedersi in che modo due osservatori inerziali vedono un segmento orientato di data lunghezza.*

Immaginiamo allora che su un certo corpo materiale agisca una forza che l'osservatore O' misura e poi rappresenta con il segmento orientato AB, disposto ad esempio nel piano *z'x'*, ed avente componenti AH lungo *x'* e HB lungo *z'*.

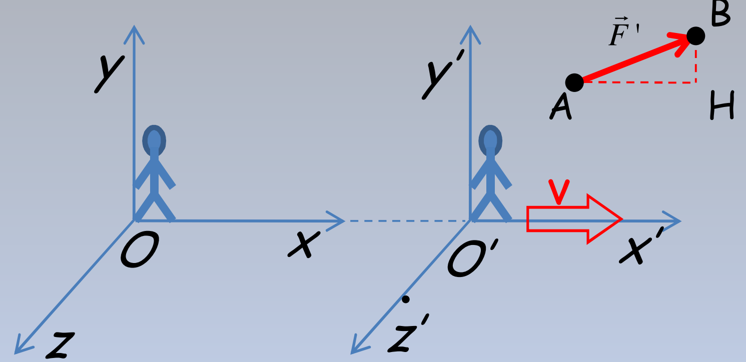
In che modo il segmento orientato AB (sostituto della forza) viene visto dall'osservatore O ?

Per rispondere è sufficiente ricordare che secondo le trasformazioni di Galileo la distanza tra due punti dello spazio assume lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali. Ne consegue allora che i segmenti AH, HB ed AB avranno lo stessa lunghezza sia per O' che per O il che implica che l'osservatore O misuri la stessa forza (uguale cioè in intensità direzione e verso) misurata da O'

$$\boxed{\vec{F}\,' = \vec{F}}$$

<u>Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della forza applicata ad un corpo materiale.</u>

Un corpo materiale soggetto ad una forza ***F'*** misurata dall'osservatore O' sarà soggetto ad una forza ***F=F'*** misurata dall'osservatore O



Massa inerziale

Da ultimo cercheremo la relazione esistente tra le misure della massa inerziale di un corpo da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito è sufficiente ricordare che *la massa inerziale di un corpo materiale si misura determinando il rapporto tra il modulo della forza applicata ed il modulo della accelerazione impressa* $m=|\mathbf{F}|/|\mathbf{a}|$. Dato che tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse forze e le stesse accelerazioni dobbiamo allora attenderci che tutti gli osservatori inerziali misurino anche lo stesso valore della massa inerziale

$$\boxed{m' = m}$$

<u>Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della massa inerziale di un corpo materiale.</u>

L'invarianza delle leggi meccaniche per i diversi osservatori inerziali

Abbiamo appreso il fatto fondamentale che il modo in cui sono connesse tra loro le misure di spazio e tempo eseguite da due differenti osservatori inerziali in merito allo stesso evento fisico (trasformazioni di Galileo) determina anche le relazioni tra le misure di accelerazione, forza e massa inerziale. In particolare emerge il fatto rilevante che ***in merito ad un dato fenomeno meccanico, tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse accelerazioni, forze e masse inerziali.*** Quali sono le implicazioni per quanto riguarda le leggi meccaniche?

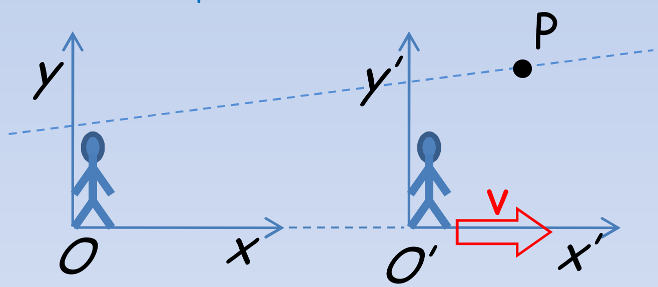
Primo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O', un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze nulla. Sulla base del primo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto rettilineo uniforme. Per fissare le idee immagineremo che il moto si sviluppi nel piano z'x' con una velocità w lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse x'. Le leggi orarie del moto, nel riferimento dell'osservatore O', saranno (vedi figura)

$$x' = (w' \cos\alpha')t' \qquad (1)$$

$$y' = (w' \sin\alpha')t' + y_0'$$

Il corpo materiale P si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento O'



Questo principio apparirà valido anche per l'osservatore O? Per capire quale traiettoria osserva O basterà tenere conto delle *Trasformazioni di Galileo* *x'=x-vt, z'=z, t'=t* e sostituirle nelle (1). Si ottengono allora le equazioni

$$x - vt = (w' \cos\alpha')t \qquad x = (w' \cos\alpha' + v)t \qquad (2)$$

$$y = (w' \sin\alpha')t + y_0' \qquad y = (w' \sin\alpha')t + y_0'$$

che descrivono un moto rettilineo uniforme nel piano yx con velocità $w=[(w'\cos\alpha'+v)^2+(w'\sin\alpha')^2]^{1/2}=[w'^2+v^2-2w'v\cos\alpha']^{1/2}$ inclinata di un angolo $\alpha=\mathrm{arctg}[w'\sin\alpha'/(w'\cos\alpha'-v)]$ rispetto all'asse x. Avendo poi le forze lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali, anche l'osservatore O misurerà una forza nulla agente sul corpo materiale.

Concludiamo allora che anche l'osservatore O misura un moto rettilineo uniforme nel caso in cui la forza agente sul corpo materiale sia nulla: ***il primo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali.***

Secondo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O', un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze non nulla. Sulla base del secondo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto accelerato secondo l'equazione

$$\vec{F}\,' = m'\vec{a}\,'$$

Quale equazione scriverà l'osservatore O? Per capirlo è sufficiente ricordare che, misurando tutti gli osservatori inerziali le stesse accelerazioni , forze e masse inerziali, egli scriverà semplicemente

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

con la condizione ***F=F', m=m', a=a'***. Dunque l'osservatore O scriverà esattamente la stessa espressione del secondo principio scritta dall'osservatore O'. Giungiamo allora alla conclusione che : ***tutti gli osservatori inerziali scrivono esattamente la stessa espressione (con lo stesso valore delle forze, masse inerziali ed accelerazioni) del secondo principio della dinamica***.
Si può esprimere lo stesso contenuto fisico in modo più formale, dicendo che a seguito di un cambiamento di riferimento inerziale (ovvero di una trasformazione di Galileo), il secondo principio della dinamica rimane esattamente lo stesso (ovvero è invariante). Dunque ***il secondo principio della dinamica è invariante per trasformazioni di Galileo.***

Terzo principio della dinamica

Immaginiamo siano dati due corpi materiali in mutua interazione e che l'osservatore O' misuri su tali corpi forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la loro congiungente in accordo con il terzo principio della dinamica.
Tutto questo risulterà valido anche per un altro osservatore inerziale O? Dato che le forze sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali possiamo certamente concludere che sarà così: anche l'osservatore O misurerà forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la congiungente i corpi materiali verificando quindi il terzo principio. Concludiamo allora che ***il terzo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali***.

Possiamo riassumere le considerazioni di questo paragrafo affermando che
secondo le trasformazioni di Galileo le leggi della meccanica valgono per tutti gli osservatori inerziali ed in particolare il secondo principio è anche invariante.

Le leggi dell'elettromagnetismo

L'elettromagnetismo si pone l'obiettivo di studiare le forze elettriche e magnetiche, le forze che, assieme a quelle gravitazionali, dominano il mondo macroscopico.
A differenza della teoria della gravitazione di Newton, l'elettromagnetismo, per espressa volontà di Faraday e Maxwell, venne sin dall'inizio formulato nel quadro del *concetto di campo* che permette di superare il paradosso fisico dell'azione istantanea tra corpi materiali distanti nello spazio (azione a distanza).

Secondo l'elettromagnetismo la carica elettrica ***Q*** e la corrente elettrica ***i*** modificano lo spazio circostante determinando la presenza di campi elettrici ***E*** (generati dalle cariche elettriche) e campi magnetici ***B*** (generati dalle correnti elettriche) secondo un insieme di relazioni dette ***Equazioni di Maxwell*** che riportiamo nella *forma integrale*

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{S_L} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Qualora altre cariche elettriche che indicheremo con ***q*** si trovino nello spazio ove siano presenti questi campi elettrici ***E*** e magnetici ***B*** esse saranno soggette ad una forza, detta ***forza di Lorentz***, data dalla espressione

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

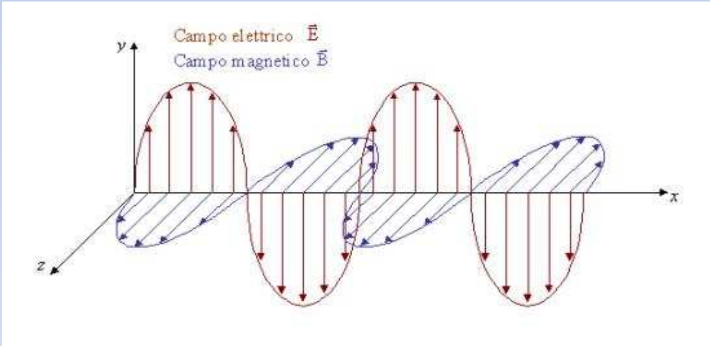
infine la *carica elettrica che risulta essere una proprietà intrinseca della materia non può essere ne creata ne distrutta* ed è pertanto soggetta alla ***legge della conservazione della carica*** $\nabla\cdot\vec{J} = -\partial\rho/\partial t$

Campi elettrici, magnetici ed onde elettromagnetiche

Secondo l'elettromagnetismo, *l'azione di una carica elettrica su un'altra, distante nello spazio, non è una azione diretta ma si realizza in due fasi fisicamente distinte: la prima carica crea nello spazio circostante un campo elettrico e/o magnetico, che una seconda carica, in esso immersa, percepisce subendo l'azione elettrica e/o magnetica* (quando una azione naturale - gravitazionale, elettrica/magnetica, forte o debole - viene descritta con questo meccanismo si dice che è stata formulata una ***teoria di campo*** per quella azione).
Inoltre la teoria elettromagnetica prevede che il campo elettrico e/o magnetico, in alcuni contesti, riveli la propria esistenza in modo assai diretto: quando delle cariche elettriche vengono 'scosse' (ovvero accelerate dando luogo a correnti elettriche variabili nel tempo) *i campi elettrici e magnetici ad esse associati cominciano ad oscillare in certa specifica configurazione* detta ***onda elettromagnetica*** (raggi X, luce, onde radio). Tale onda si allontana dalle cariche alla fantastica ***velocità c,*** soddisfacendo
una nota equazione detta ***equazione delle onde di d'Alembert,***

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}} = 299\ 792\ 458\ m/s$$



e trasportando con se *quantità di moto* (pressione di radiazione), *momento angolare* ed *energia* che dopo pochissimo tempo possono essere prelevati in punti assai distanti da quello in cui ha avuto origine l'onda. L'elettromagnetismo realizza dunque una potente sintesi riconducendo ad una unica causa - la carica elettrica - i fenomeni elettrici, magnetici ed ottici.
Contiene tuttavia aspetti assai problematici : *rispetto a quale riferimento si deve intendere misurata la velocità c di propagazione dell'onda elettromagnetica ? Il campo elettrico e/o magnetico deve essere identificato con un mezzo fisico? In caso affermativo, di quali proprietà è dotato ?*

L’etere come possibile interpretazione dell’elettromagnetismo

Sul finire dell’800, sembrava assolutamente naturale ***porre in relazione l’elettromagnetismo con i fenomeni ondulatori allora noti, i quali, oltretutto, fornivano una semplice risposta ai precedenti quesiti.*** Si sapeva infatti che all’interno dei *mezzi materiali elastici*, solidi, liquidi o gassosi che fossero, gli stati di distensione e compressione del mezzo potevano propagarsi, trasportando quantità di moto, momento angolare ed energia , e che tale propagazione era descritta proprio dalla equazione delle onde di D’Alembert .

Per questo, sembrò inevitabile immaginare l’esistenza di un *mezzo fisico elastico* che poteva essere perturbato localmente dalle cariche elettriche in quiete (cariche statiche) ed in movimento (correnti elettriche). La perturbazione, consistente in stati di compressione e distensione del mezzo (identificati con i campi elettrici e/o magnetici), poteva poi propagarsi allontanandosi dal punto in cui era stata generata (onda elettromagnetica). **In completa analogia con i fenomeni ondulatori allora noti, *la velocità c doveva sicuramente intendersi come riferita al mezzo fisico stesso*.** Infine, tale mezzo non poteva essere di natura materiale (come un solido un liquido od un gas) dato che i corpi materiali, come mostra l’esperienza, potevano muoversi all’interno di esso senza subire alcuna resistenza.

Una sollecitazione pone in oscillazione un certo punto della superficie dell’acqua che poi la propaga lontano.

Un mezzo fisico con simili proprietà, era stato introdotto in fisica circa 150 anni prima, per spiegare i fenomeni ottici:

L’etere luminifero, da *Traitè de la lumière*, C. Huygens, 1691:

Se ora si esamina quale può essere questa materia nella quale si estende il movimento che viene dai corpi luminosi, materia che chiamo eterea [etherée], si vedrà che non è la stessa che serve alla propagazione del suono. Poiché si trova che quest’ultima è propriamente l’aria che sentiamo e che respiriamo: e se anche la si toglie da un recipiente, non se ne toglie l’altra materia che serve alla luce. Il che può provarsi racchiudendo un corpo che suona in un recipiente di vetro […] si può pensare che queste particelle di etere, nonostante la loro piccolezza, siano a loro volte composte di altre parti e che la loro elasticità consista nel movimento molto rapido di una materia molto sottile[…]

L'ottica, progredì rapidamente nel primo decennio dell'800 con le fondamentali ricerche sperimentali di Thomas Young sui fenomeni della diffrazione e, soprattutto, della interferenza, che stabilirono definitivamente *la natura ondulatoria della luce*. La comprensione dei fenomeni ottici fu però completa solo con i lavori di Augustin Jean Fresnel, che oltre ad essere un abile sperimentatore (scoprì il fenomeno della polarizzazione e riprodusse tutti i risultati di Young), era pure un raffinato matematico, capace di formulare una teoria in grado di spiegare tutti fenomeni osservati. In una serie di lavori presentati a più riprese all'Accademia delle scienze di Parigi tra il 1815 ed il 1819, ***Frenel sviluppa una teoria dell'ottica fondate sul concetto di etere luminifero:***

L'etere, *A.J. Fresnel 1815-1819*:
[…] è l'incontrarsi di raggi che produce interferenza. Questo mi sembra del tutto opposto all'ipotesi dell'emissione di particelle e conferma il sistema che fa consistere la luce nelle vibrazioni di un fluido particolare […]

Quasi contemporaneamente, le ricerche di Ampere e poi quelle di Faraday prepararono il terreno alla grande sintesi maxwelliana (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873), che porterà alla completa comprensione dei fenomeni elettrici e magnetici ed alla scoperta fondamentale che la luce stessa è un fenomeno elettromagnetico. Il concetto di etere ne uscì ulteriormente rafforzato, poichè *Maxwell stesso pensava che i campi elettrici e magnetici, pensati da Faraday e matematicamente descritti dalla sua teoria, fossero stati di tensione di un mezzo capace di propagarli sotto forma di onde elettromagnetiche.* Inoltre, tutto l'apparato formale dell'elettromagnetismo (flussi e circuitazioni dei campi vettoriali) era stato fortemente influenzato dall'idrodinamica di Stokes, sviluppata in quegli stessi anni. Dunque, i successi dell'elettromagnetismo e le convinzioni dello stesso Maxwell supportavano fortemente l'idea di etere:

La voce 'Ether', *nona edizione dell'Enciclopedia Britannica, J.C. Maxwell, 1878:*
[…]Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza […]

Per questi motivi, l'ideazione e *lo studio di tecniche capaci di evidenziare l'esistenza dell'etere fu uno dei temi dominanti della fisica della seconda metà dell'800.* *L'etere lo si pensava particolarmente rigido (in quanto capace di trasmettere, ad altissima velocità, le vibrazioni elettromagnetiche) ma, al tempo stesso, altrettanto rarefatto (poiché incapace di opporre resistenza all'avanzamento dei corpi materiali). Si pensava inoltre che, in tale mezzo, il sole si trovasse in quiete e la terra quindi in movimento a causa del suo moto di rivoluzione.*

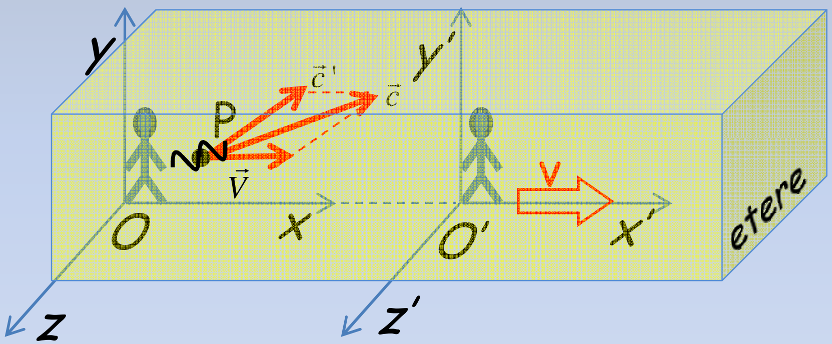
Le implicazioni della esistenza dell'etere

Il concetto di *etere* forniva dunque una spiegazione semplice dei fenomeni elettromagnetici ed ottici. In particolare ***forniva una precisa risposta al significato fisico da attribuire alla velocità c dell'onda elettromagnetica che risultava essere semplicemente la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto all'etere*** *(in analogia con tutti i fenomeni ondulatori allora noti).*

In conseguenza di questo fatto *un osservatore in quiete rispetto all'etere avrebbe dovuto misurare una velocità della luce pari a c mentre un qualunque altro osservatore, in moto con velocità uniforme V rispetto all'etere, avrebbe dovuto misurare un valore della velocità della luce differente, dipendente dall'angolo tra c e V, secondo la formula*

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V}$$

Un 'onda elettromagnetica si muove con velocità *c* rispetto al riferimento *O* in quiete nell'etere



Il concetto di etere comporta allora le seguenti conseguenze

la velocità delle onde elettromagnetiche dipende dal riferimento inerziale adottato.

Dato che la velocità dell'onda elettromagnetica viene derivata dalle equazioni dell'elettromagnetismo, consegue che

le leggi dell'elettromagnetismo dipendono dal riferimento inerziale adottato

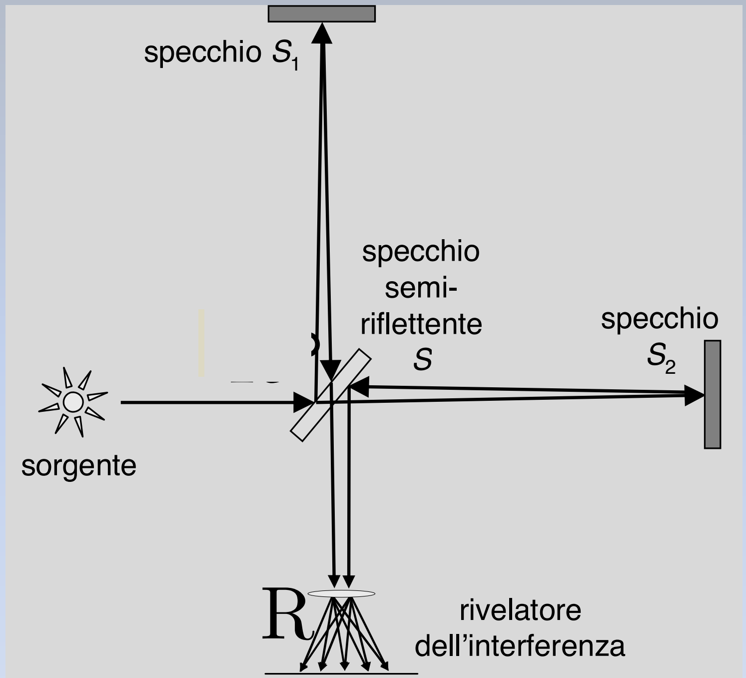
oppure, in modo equivalente, che

le leggi delll'elettromagnetismo violano il principio di relatività galileiano.

Nel quadro del concetto di etere dunque, si registrava una importante differenza: ***per la meccanica tutti i sistemi inerziali sono equivalenti, per l'elettromagnetismo esiste, invece, un riferimento inerziale privilegiato al quale va riferita la velocità c della luce*** (il sistema inerziale in quiete nell'etere appunto) .

Un esperimento per verificare l'esistenza dell'etere

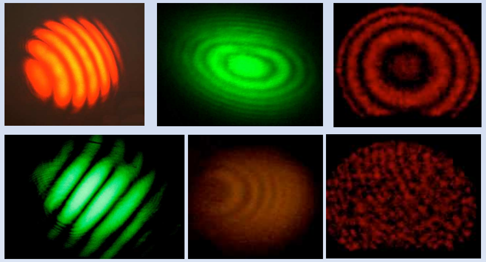
Questa differenza tra meccanica ed elettromagnetismo non rappresentava allora un problema, poiché non era ancora chiaro che il principio di relatività fosse un principio generale, valido per tutte le leggi fisiche. I problemi nacquero quando si trovò un metodo sperimentale capace, in linea di principio, di rilevare l'esistenza dell'etere che era all'origine di queste differenze.



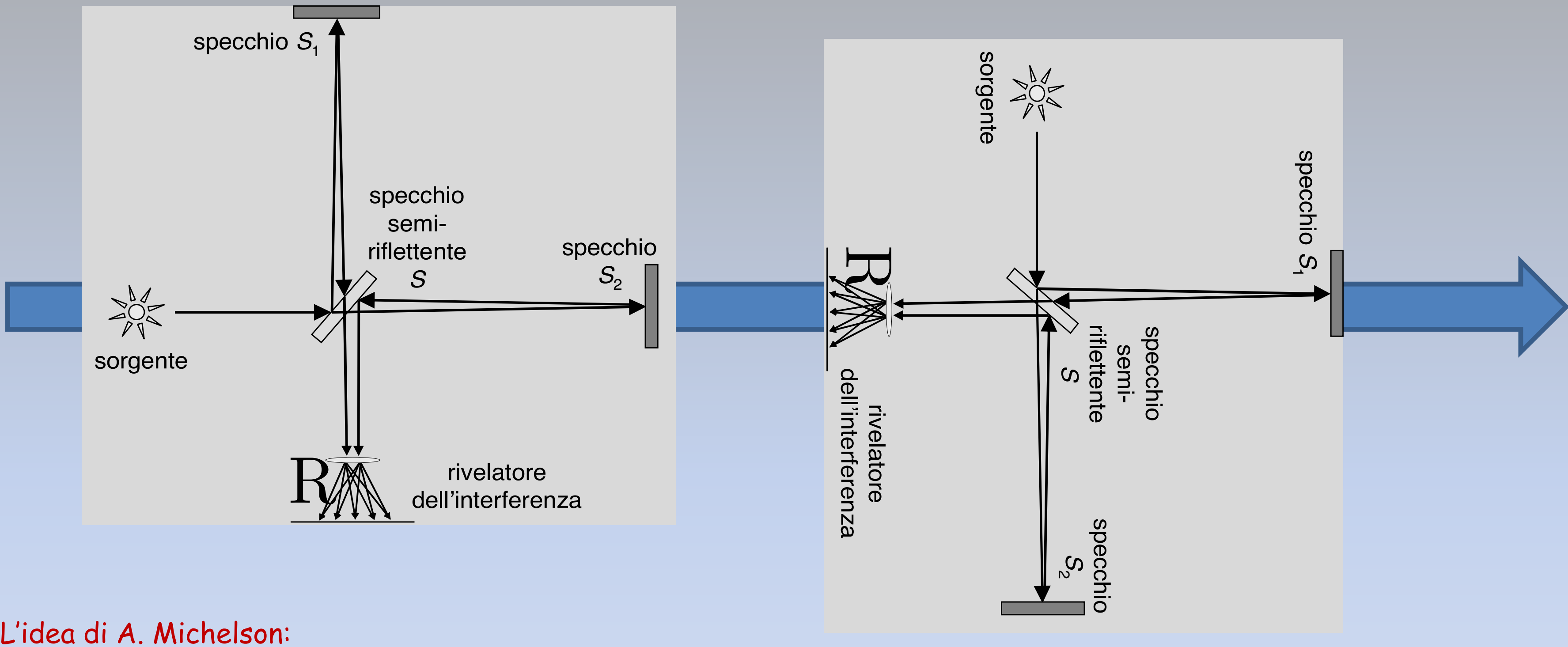
Maxwell stesso propose intorno al 1870 la seguente idea:
definendo V il modulo della velocità della terra rispetto all'etere si ha che facendo propagare un raggio luminoso nella stessa direzione e verso del moto terrestre si deve misurare una velocità della luce c'=c-V mentre facendolo propagare nella stessa direzione ma verso opposto si deve misurare una velocità della luce c"=c+V.
L'effetto percentuale da misurare vale

$$\frac{c''-c'}{c}=\frac{2v}{c}=\frac{2\times 30}{300000}=2\times 10^{-4}$$

dove si è assunta la velocità della terra rispetto all'etere uguale a quella dovuta al suo moto di rivoluzione attorno al sole (sole in quiete nell'etere). *La strada suggerita da Maxwell richiedeva dunque una misura di velocità troppo precisa per le tecniche allora disponibili.*
Per questo **A. Michelson** decise di affrontare il problema in modo diverso affidandosi ad un *fenomeno ottico molto sensibile*, quello della ***interferenza***, che essendo regolato dalla lunghezza d'onda λ (si tenga presente che per la luce visibile $\lambda \sim 500$ nm) può mettere in evidenza effetti piccoli. Ospite di H. von Helmholtz a Berlino, nel 1880 ideò una apparecchiatura ottica di enorme sensibilità, ancor oggi usata, detta **interferometro**.



se si modifica in un qualunque modo il cammino ottico di uno dei due raggi allora si osserva uno spostamento delle frange di interferenza!

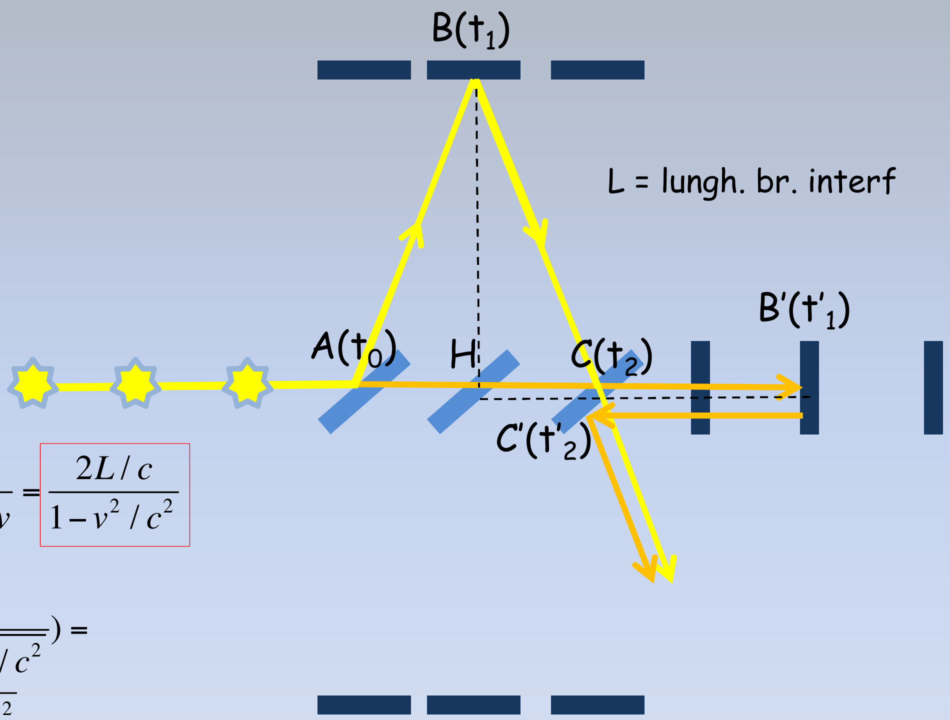


L'idea di A. Michelson:

i) se l'interferometro viene disposto con un braccio lungo la direzione del moto terrestre la luce che si propaga lungo quel braccio ha una velocità differente da quella che si propaga nell'altro. In questa situazione si osserva una certa **figura d'interferenza *I_1*;**
ii) se ora si ruota l'intero apparato, il ruolo dei bracci viene scambiato e si osserva una diversa ***figura d'interferenza I_2;***

dal confronto di I_1 con I_2, in particolare dallo spostamento delle frange, Michelson sperava di evidenziare la velocità del moto terrestre rispetto all'etere e dunque una dimostrazione della esistenza dell'etere stesso.

Assumiamo il riferimento dell'etere nel quale la terra e con essa l'interferometro si muove tenendo presente che in tale riferimento la luce si propaga con velocità c! Calcoliamo i tempi di arrivo dei raggi luminosi nei diversi punti dell'interferometro:



$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$c^2 t_1^2 = v^2 t_1^2 + L^2$$

$$t_1 = \frac{L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t_2 = 2t_1 = \boxed{\frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

$$AB' = AH + HB'$$

$$c\, t_1' = v\, t_1' + L$$

$$t_1' = \frac{L}{c - v}$$

$$HB' = HC' + C'B'$$

$$L = v\,(t_2' - t_1') + c\,(t_2' - t_1')$$

$$(t_2' - t_1') = \frac{L}{c + v}$$

$$t_2' = \frac{L}{c + v} + t_1' = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \boxed{\frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}}$$

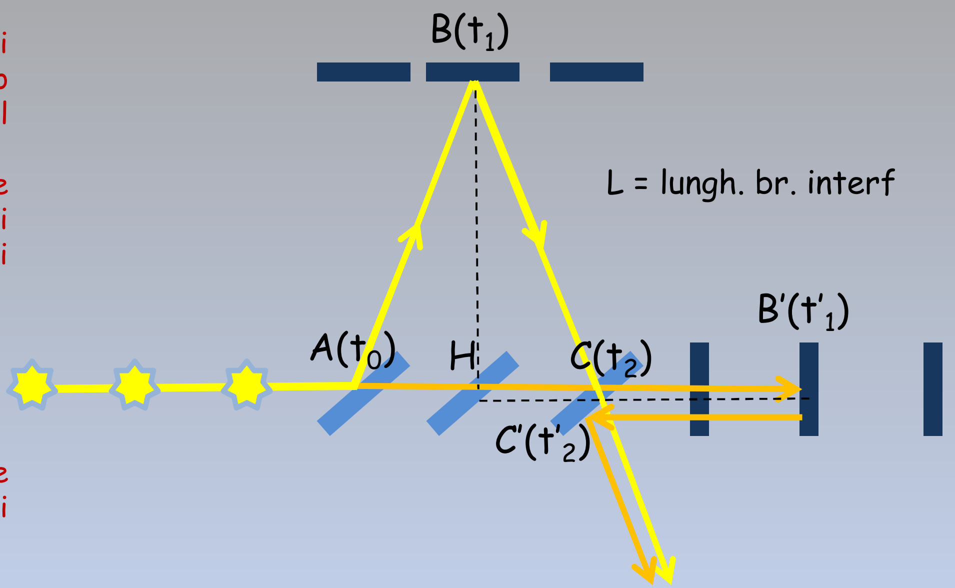
$$t_2' - t_2 = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} - \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) =$$

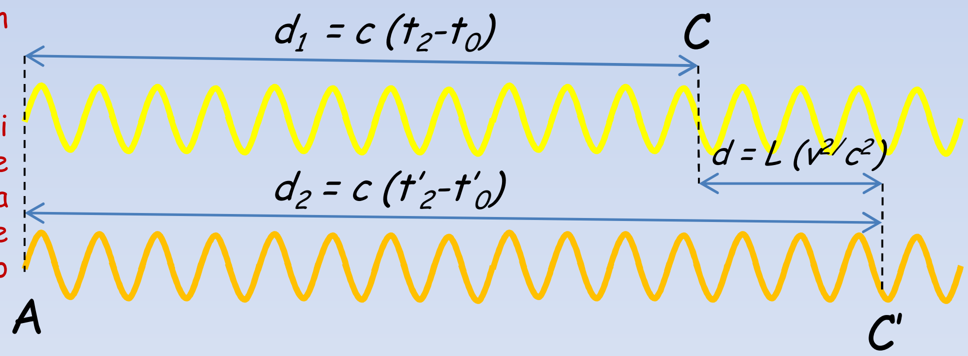
$$= \frac{2L}{c}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2}\right) = \frac{2L}{c}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{2L}{c}\,\frac{1 - (1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})} = \frac{2L}{c}\,\frac{v^2/c^2}{(1 - \cancel{v^2/c^2})(1 + \sqrt{1 - \cancel{v^2/c^2}})} \approx \frac{2L}{c}\,\frac{v^2/c^2}{2} = \boxed{\frac{L}{c}\,\frac{v^2}{c^2}}$$

I raggi luminosi dopo avere seguito percorsi diversi si ricongiungono nei punti C e C' (faccia inferiore dello specchio semiargentato) propagandosi sovrapposti fino al cannocchiale di osservazione.
Si noti che pur essendo partiti da A nello stesso istante (prima il raggio era indiviso) giungono in C e C' in tempi diversi proprio perché diversa è lunghezza dei cammini percorsi.
In particolare il raggio in giallo percorre una distanza
$d_1 = c\,(t_2 - t_0)$
mentre il raggio in arancione percorre una distanza
$d_2 = c\,(t'_2 - t_0)$
La configurazione in cui si sovrappongono (se cresta+cresta o cresta+ventre o altro) dipende (vedi figura) dalla differenza dei cammini percorsi
$d = d_2 - d_1 = c\,(t'_2 - t_0) - c\,(t_2 - t_0) = c\,(t'_2 - t_2)$
che risulta essere uguale (vedi pagina precedente) a
$d = L\,(v^2/c^2)$
d'altra parte la configurazione in cui si sovrappongono determina anche il grado di illuminamento osservato nel punto del cannocchiale colpito dai due raggi.
Immaginiamo ora di selezionare nel cannocchiale un massimo di illuminamento. Questo significa che
$d = L\,(v^2/c^2) = N\,\lambda$
con N intero. Immaginiamo ora di ruotare di 90 gradi tutto l'apparato. La differenza dei cammini d inverste esattamente segno e la nel cannocchiale dove si osservava un massimo ora si osserva un'altra configurazione che dipende dal numero di lunghezze d'onda contenute (questo numero può essere frazionario)
$-d = -L\,(v^2/c^2) = N'\,\lambda$
Facendo la differenza si ottiene
$2\,L\,(v^2/c^2) = (N - N')\,\lambda = x\,\lambda$
da cui ricaviamo la frazione

$$\boxed{x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}}$$





La formula precedente conferma le attese:

se l'etere esiste allora la velocità di propagazione della luce nei due bracci dell'interferometro è differente. Sulla base delle formule ottenute nelle pagine precedenti *dobbiamo allora ottenere che la rotazione dell'interferometro di 90 gradi deve produrre uno spostamento delle frange d'interferenza pari a*

$$x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

che nel caso dell'interferometro usato da A.Michelson nel 1881 fornisce

$$x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\times 1,2}{5,7\times 10^{-5}}\left(\frac{30}{300000}\right)^2 = 0,04$$

A. Michelson non osservò alcun effetto! A.
Michelson, in collaborazione questa volta con E. Morley, ripetè l'esperimento nel 1887 migliorando la sensibilità dello strumento che avrebbe dovuto fornire uno spostamento delle frange pari a

$$x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} = 0,4$$

anche in questo caso Michelson e Morley non osservarono alcun effetto!