

La trasformazione delle misure di posizione e tempo tra due osservatori inerziali : le Trasformazioni di Galileo

Stabilito che le leggi meccaniche valgono in tutti i riferimenti inerziali, se vogliamo sviluppare considerazioni di natura formale e quantitativa, dobbiamo essere capaci di *determinare in che modo le misure di un certo fatto fisico in un certo riferimento inerziale* (ad esempio la posizione nello spazio e nel tempo di un corpo materiale P) *sono collegate alle misure dello stesso fatto fisico osservato da un altro riferimento inerziale.*

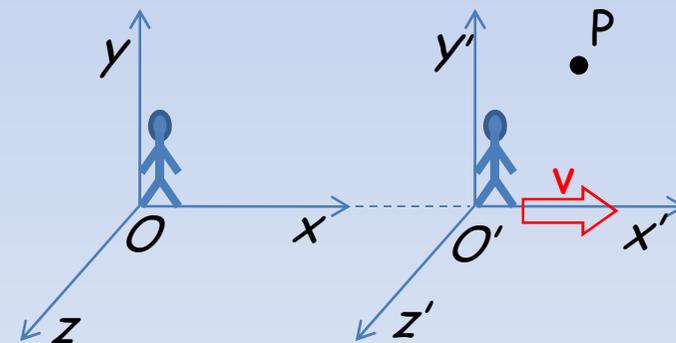
E' evidente che nel caso generale i due riferimenti potrebbero differire nella orientazione degli assi, inoltre la velocità relativa potrebbe avere una qualunque direzione nello spazio. Tutto ciò costituirebbe una complicazione di natura geometrica priva di contenuto fisico. Conviene allora assumere la seguente situazione nella quale

i) i riferimenti $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ hanno assi paralleli con gli assi x e x' sulla stessa retta;

ii) il riferimento $Oxyz$ è pensato in quiete ed il riferimento $O'x'y'z'$ in moto rettilineo uniforme con velocità v diretta lungo l'asse x

iii) in quiete, in ciascuno dei due riferimenti si trovano due osservatori O ed O' dotati di regoli e cronometri identici per compiere le misure. Inoltre i cronometri sono regolati in modo tale che segnino entrambi $t=0$ quando le origini O ed O' coincidono.

I due riferimenti



In merito alla posizione di P al tempo t , utilizzando il proprio regolo e cronometro, e sulla base della semplice considerazione geometrica che $CA=AB+BC$ l'osservatore O può senz'altro scrivere le seguenti relazioni

$$1) \quad x_O = x_{O'} + v_O t_O \quad y_O = y_{O'} \quad z_O = z_{O'}$$

dove il pedice ricorda che si tratta di *grandezze fisiche misurate da O* (si noti che O misura anche la posizione di P rispetto al sistema O').

Naturalmente la posizione di P al tempo t rispetto ad O' può essere misurata anche da O' stesso che utilizzando il proprio regolo e cronometro otterrà al tempo t' i valori

$$x_{O'}, y_{O'}, z_{O'} \quad \text{al tempo } t_{O'}$$

Ora si noti che le stesse grandezze possono essere misurate da entrambi gli osservatori. Nelle formule appena scritte ad esempio la posizione di P rispetto ad O' risulta misurata sia da O che da O' e non è detto che queste misure forniscano lo stesso risultato. Si pone allora il seguente quesito

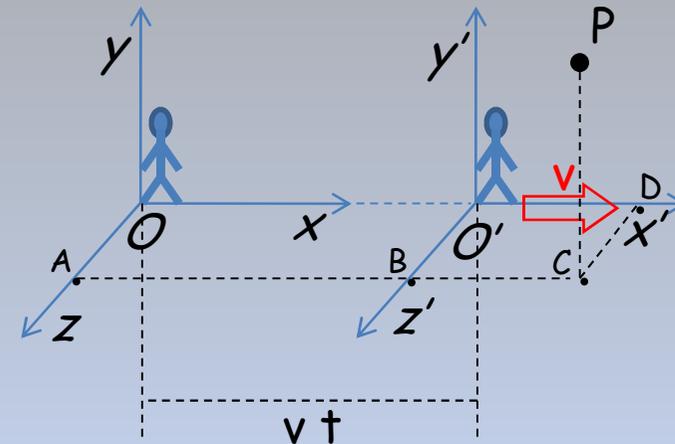
Valgono oppure no le seguenti uguaglianze?

$$2) \quad x_O = x_{O'} \quad y_O = y_{O'} \quad z_O = z_{O'} \quad t_O = t_{O'}$$

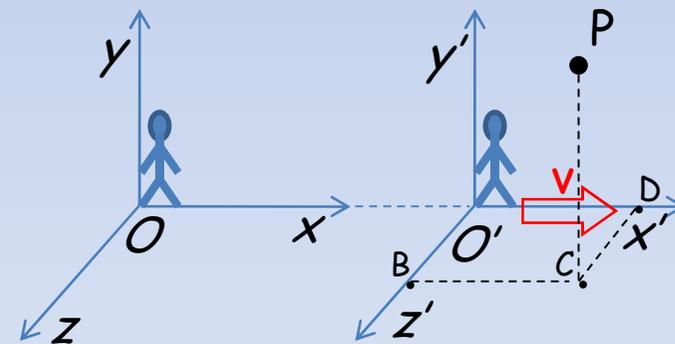
Ovvero la misura di un corpo materiale in quiete (ad esempio il segmento $X'_{O'}$) è uguale alla misura dello stesso corpo materiale in moto (ad esempio il segmento X'_O)?

ovviamente solo l'esperimento può decidere sulla validità o meno di questa ipotesi ovvero *stabilire se la lunghezza di un oggetto in moto coincide con quella dello stesso oggetto in quiete e se il ritmo di un orologio in moto coincide con quello dello stesso orologio in quiete.*

La posizione di P al tempo t rispetto ad O ed O' misurata da O



La posizione di P al tempo t rispetto ad O' misurata da O'



Prima della formulazione della TRR un esperimento per dimostrare la validità di queste ipotesi non è mai stato nè pensato nè, tantomeno, fatto: questo problema non è mai stato sollevato! La meccanica, l'elettromagnetismo la termodinamica ed in generale tutta la fisica prerelativistica (fisica classica) è stata formulata ipotizzandone la validità. Anche se non sempre dichiarato espressamente, si aderiva nella sostanza alla concezione newtoniana dello spazio e del tempo assoluti:

Il Tempo Assoluto, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, I. Newton 1687:

[...] il tempo assoluto vero e matematico, in sé e per sua natura, fluisce uniformemente senza relazione a qualcosa di esterno, e con un altro nome si chiama durata; il tempo relativo, apparente e comune, è la misura sensibile ed esterna [...] della durata attraverso il mezzo del movimento, ed esso è comunemente usato al posto del tempo vero; esso è l'ora, il giorno, il mese, l'anno. Lo spazio assoluto [...]

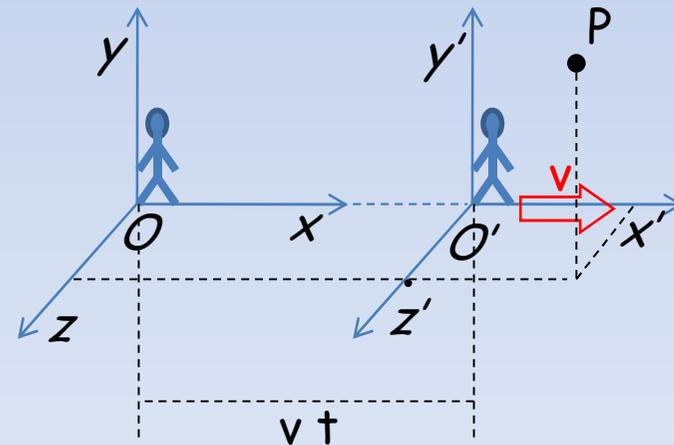
Non fu facile capire, e lo capì A.Einstein formulando la TRR, che i conflitti tra meccanica ed elettromagnetismo di cui diremo traevano la propria origine proprio dalla infondatezza di questa ipotesi.

Assumendo allora la validità delle 2), le 1) forniscono un insieme di relazioni che connettono le misure eseguite da O ed O' in merito alla posizione spaziale e temporale del corpo P dette

Trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Si noti che abbiamo ommesso i pedici assumendo che sia oramai chiaro che le quantità senz'apice si riferiscono a grandezze fisiche misurate dall'osservatore O rispetto al riferimento O mentre quelle con l'apice a grandezze misurate da O' rispetto ad O' .



Utilizzando le Trasformazioni di Galileo possiamo dedurre una proprietà degli intervalli spaziali e temporali già richiamata in precedenza che, data la sua rilevanza, vogliamo sottolineare nuovamente.

Immaginiamo che, nel riferimento O' nell'istante di tempo t' , due corpi materiali P_1 e P_2 occupino due differenti posizioni dello spazio e di domandarci quale sia la distanza tra le loro posizioni misurata da O' . Utilizzando i propri regoli egli troverà le coordinate (x'_1, y'_1, z'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2) e quindi la distanza

$$d' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

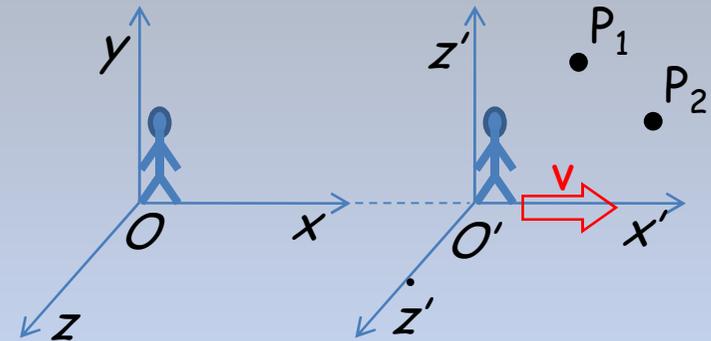
D'altra parte le Trasformazioni di Galileo forniscono le relazioni con le coordinate degli stessi punti misurate dall'osservatore O al tempo $t=t'$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - vt & y'_1 &= y_1 & z'_1 &= z_1 \\ x'_2 &= x_2 - vt & y'_2 &= y_2 & z'_2 &= z_2 \end{aligned}$$

che sostituite nella espressione di d' forniscono $d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d$

Dunque gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa distanza tra i corpi materiali P_1 e P_2 . Possiamo allora affermare che secondo le trasformazioni di Galileo, la distanza tra due dati punti dello spazio (intervallo spaziale) è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Del tutto equivalente è l'enunciato seguente : secondo le Trasformazioni di Galileo, la distanza tra due dati punti dello spazio non dipende dallo stato di moto uniforme. In questa forma l'accento cade sull'importante fatto fisico secondo il quale assumendo le trasformazioni di Galileo la lunghezza dei corpi materiali non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

La distanza tra le posizioni dei corpi materiali P e Q al tempo t' misurata da O'



Possiamo ragionare in modo analogo sulle distanze temporali immaginando che in un determinato punto dello spazio del riferimento O' avvenga un certo evento fisico caratterizzato da una certa durata: ad esempio un corpo materiale appeso ad un filo (pendolo) che al tempo t'_1 si trova in una certa posizione dello spazio e che al tempo t'_2 ritorna nella stessa posizione (nel riferimento O'). La durata temporale di questo evento misurata da O' vale evidentemente

$$\delta' = t'_2 - t'_1$$

d'altra parte dalle Trasformazioni di Galileo si ha

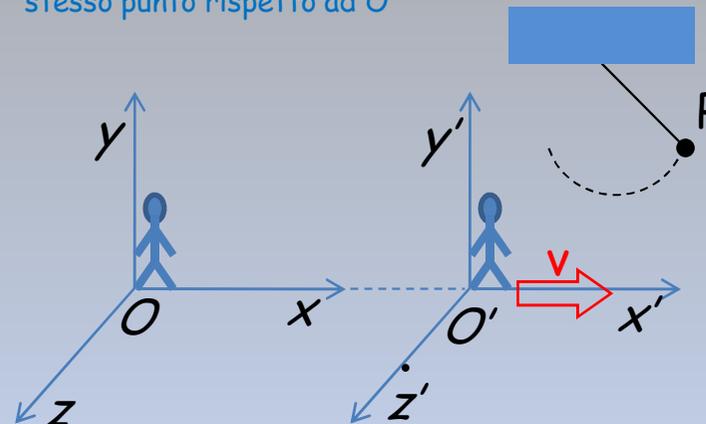
$$t'_1 = t_1 \quad t'_2 = t_2$$

che sostituite nella prima espressione forniscono

$$\delta' = t_2 - t_1 = \delta$$

Dunque gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa durata dell'evento fisico considerato. Possiamo allora affermare che secondo le trasformazioni di Galileo, la durata di un dato evento (intervallo spaziale) è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Del tutto equivalente è l'enunciato seguente : secondo le Trasformazioni di Galileo, la durata di un dato evento non dipende dallo stato di moto uniforme. Si noti che in questa forma si comprende subito l'importante fatto fisico secondo il quale, assumendo le trasformazioni di Galileo, il ritmo di un cronometro non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

Il corpo materiale P del pendolo solidale con il riferimento O' dopo un certo tempo ritorna nello stesso punto rispetto ad O'



La trasformazione delle grandezze meccaniche tra due osservatori inerziali

Una volta in possesso delle Trasformazioni di Galileo siamo in grado di connettere le misure di posizione e tempo eseguite da due osservatori inerziali O e O' in merito allo stesso evento fisico. Si tratta di un avanzamento fondamentale poiché da queste potremo costruire le leggi di trasformazione delle misure di velocità, accelerazione e forza e, alla fine, delle leggi meccaniche stesse. Riusciremo così a stabilire *in che modo due diversi osservatori inerziali scrivono le leggi di un dato fenomeno meccanico*.

Velocità

Le componenti cartesiane del vettore velocità \vec{w} di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque la velocità misurata da O' vale

$$\vec{w}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{w} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

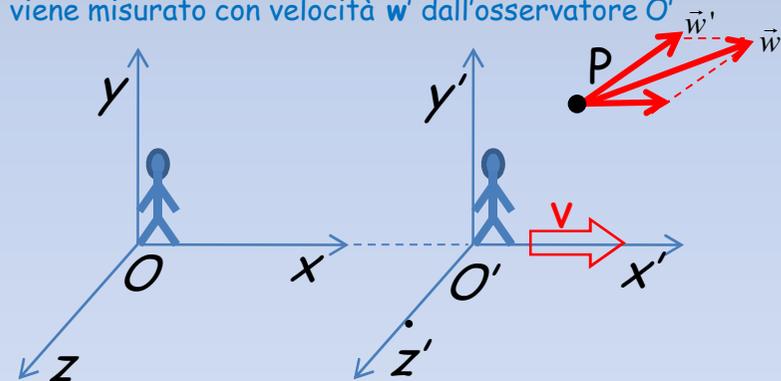
$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{w}' = \left(\frac{d(x - vt)}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{dt} - v, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) - (v, 0, 0)$$

ora si noti che la prima parentesi nell'ultimo membro è proprio la velocità \vec{w} misurata da O (vedi la (2)) mentre la seconda parentesi è la velocità \vec{v} del riferimento O' rispetto ad O dunque

Un corpo materiale che ha velocità \vec{w} rispetto ad O viene misurato con velocità \vec{w}' dall'osservatore O'



$$\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v} \quad \vec{w} = \vec{w}' + \vec{v}$$

Dato un riferimento O' in moto uniforme con velocità \vec{v} rispetto ad O , un corpo materiale misurato con velocità \vec{w}' dall'osservatore O' viene misurato con velocità $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{v}$ dall'osservatore O .

Accelerazione

Le componenti cartesiane del vettore velocità \mathbf{a} di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo due volte la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque l'accelerazione misurata da O' vale

$$\vec{a}' = \left(\frac{d^2 x'}{dt'^2}, \frac{d^2 y'}{dt'^2}, \frac{d^2 z'}{dt'^2} \right) \quad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \quad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

e sostituendo in (1) otteniamo

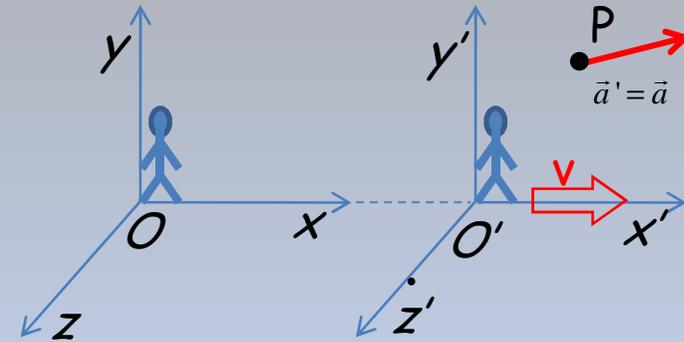
$$\vec{a}' = \left(\frac{d^2(x-vt)}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

ora si noti che la prima parentesi nell'ultimo membro è proprio l'accelerazione \mathbf{a} misurata da O (vedi la (2)) dunque

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della accelerazione impressa ad un corpo materiale.

Un corpo materiale che ha accelerazione \mathbf{a}' rispetto ad O' viene misurato con la stessa accelerazione \mathbf{a} dall'osservatore O



Forza

Ora cercheremo di stabilire la relazione esistente tra le misure della stessa forza da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito ricordiamo che una *forza* agente su di un corpo materiale è assimilabile alla *azione sviluppata da un dinamometro applicato al corpo materiale stesso e rappresentata da un segmento orientato (vettore)* la cui direzione e verso coincide con quella lungo la quale è disposto il dinamometro e la cui lunghezza è proporzionale alla intensità misurata dal dinamometro.

Dunque *per capire come due osservatori inerziali vedono la stessa forza è sufficiente chiedersi in che modo due osservatori inerziali vedono un segmento orientato di data lunghezza.*

Immaginiamo allora che su un certo corpo materiale agisca una forza che l'osservatore O' misura e poi rappresenta con il segmento orientato AB , disposto ad esempio nel piano $z'x'$, ed avente componenti AH lungo x' e HB lungo z' .

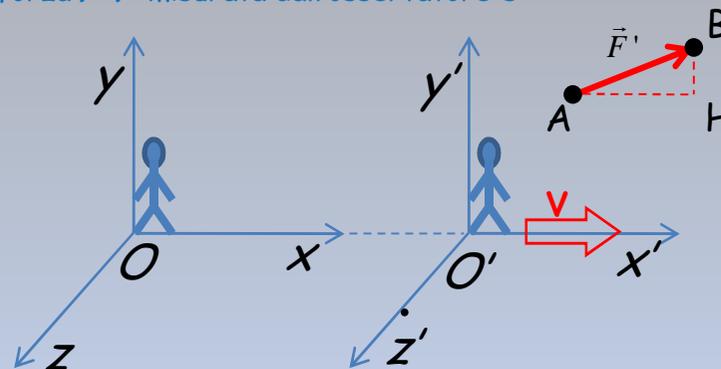
In che modo il segmento orientato AB (sostituto della forza) viene visto dall'osservatore O ?

Per rispondere è sufficiente ricordare che secondo le trasformazioni di Galileo la distanza tra due punti dello spazio assume lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali. Ne consegue allora che i segmenti AH , HB ed AB avranno lo stessa lunghezza sia per O' che per O il che implica che l'osservatore O misuri la stessa forza (uguale cioè in intensità direzione e verso) misurata da O'

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della forza applicata ad un corpo materiale.

Un corpo materiale soggetto ad una forza F misurata dall'osservatore O' sarà soggetto ad una forza $F=F'$ misurata dall'osservatore O



Massa inerziale

Da ultimo cercheremo la relazione esistente tra le misure della massa inerziale di un corpo da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito è sufficiente ricordare che *la massa inerziale di un corpo materiale si misura determinando il rapporto tra il modulo della forza applicata ed il modulo della accelerazione impressa $m=|F|/|a|$* . Dato che tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse forze e le stesse accelerazioni dobbiamo allora attenderci che tutti gli osservatori inerziali misurino anche lo stesso valore della massa inerziale

$$m' = m$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della massa inerziale di un corpo materiale.

L'invarianza delle leggi meccaniche per i diversi osservatori inerziali

Abbiamo appreso il fatto fondamentale che il modo in cui sono connesse tra loro le misure di spazio e tempo eseguite da due differenti osservatori inerziali in merito allo stesso evento fisico (trasformazioni di Galileo) determina anche le relazioni tra le misure di accelerazione, forza e massa inerziale. In particolare emerge il fatto rilevante che *in merito ad un dato fenomeno meccanico, tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse accelerazioni, forze e masse inerziali*. Quali sono le implicazioni per quanto riguarda le leggi meccaniche?

Primo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O' , un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze nulla. Sulla base del primo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto rettilineo uniforme. Per fissare le idee immagineremo che il moto si sviluppi nel piano $z'x'$ con una velocità w lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse x' . Le leggi orarie del moto, nel riferimento dell'osservatore O' , saranno (vedi figura)

$$x' = (w' \cos \alpha') t' \quad (1)$$

$$y' = (w' \sin \alpha') t' + y'_0$$

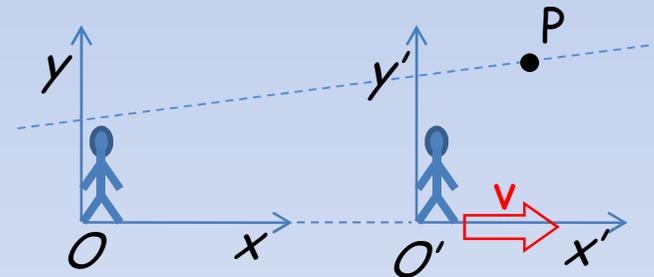
Questo principio apparirà valido anche per l'osservatore O ? Per capire quale traiettoria osserva O basterà tenere conto delle *Trasformazioni di Galileo* $x' = x - vt$, $z' = z$, $t' = t$ e sostituirle nelle (1). Si ottengono allora le equazioni

$$x - vt = (w' \cos \alpha') t \quad x = (w' \cos \alpha' + v) t \quad (2)$$

$$y = (w' \sin \alpha') t + y'_0 \quad y = (w' \sin \alpha') t + y'_0$$

che descrivono un moto rettilineo uniforme nel piano yx con velocità $w = [(w' \cos \alpha' + v)^2 + (w' \sin \alpha')^2]^{1/2} = [w'^2 + v^2 - 2w'v \cos \alpha']^{1/2}$ inclinata di un angolo $\alpha = \arctg[w' \sin \alpha' / (w' \cos \alpha' + v)]$ rispetto all'asse x . Avendo poi le forze lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali, anche l'osservatore O misurerà una forza nulla agente sul corpo materiale.

Il corpo materiale P si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento O'



Concludiamo allora che anche l'osservatore O misura un moto rettilineo uniforme nel caso in cui la forza agente sul corpo materiale sia nulla: il primo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali.

Secondo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O' , un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze non nulla. Sulla base del secondo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto accelerato secondo l'equazione

$$\vec{F}' = m' \vec{a}'$$

Quale equazione scriverà l'osservatore O ? Per capirlo è sufficiente ricordare che, misurando tutti gli osservatori inerziali le stesse accelerazioni, forze e masse inerziali, egli scriverà semplicemente

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

con la condizione $F=F'$, $m=m'$, $a=a'$. Dunque l'osservatore O scriverà esattamente la stessa espressione del secondo principio scritta dall'osservatore O' . Giungiamo allora alla conclusione che: tutti gli osservatori inerziali scrivono esattamente la stessa espressione (con lo stesso valore delle forze, masse inerziali ed accelerazioni) del secondo principio della dinamica.

Si può esprimere lo stesso contenuto fisico in modo più formale. Basta osservare che il punto di vista dei differenti osservatori inerziali, per quanto riguarda le misure di posizione e tempo, è dato dalle trasformazioni di Galileo e che tali punti di vista portano comunque tutti alla stessa espressione del secondo principio. Per questo possiamo affermare che il secondo principio della dinamica è invariante in forma per trasformazioni di Galileo.

Terzo principio della dinamica

Immaginiamo siano dati due corpi materiali in mutua interazione e che l'osservatore O' misuri su tali corpi forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la loro congiungente in accordo con il terzo principio della dinamica.

Tutto questo risulterà valido anche per un altro osservatore inerziale O ? Dato che le forze sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali possiamo certamente concludere che sarà così: anche l'osservatore O misurerà forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la congiungente i corpi materiali verificando quindi il terzo principio. Concludiamo allora che il terzo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali.

Possiamo riassumere le considerazioni di questo paragrafo affermando che le trasformazioni di Galileo conducono al risultato che le leggi della meccanica valgono per tutti gli osservatori inerziali ed in particolare il secondo principio ha anche la stessa forma.

Le leggi dell'elettromagnetismo

L'elettromagnetismo si pone l'obiettivo di studiare le forze elettriche e magnetiche le forze che, assieme a quelle gravitazionali, dominano il mondo macroscopico.

*A differenza della teoria della gravitazione di Newton, l'elettromagnetismo, per espressa volontà di Faraday e Maxwell, venne sin dall'inizio formulato nel quadro del *concetto di campo* che permette di superare il paradosso fisico dell'azione istantanea tra corpi materiali distanti nello spazio (azione a distanza).*

*Secondo l'elettromagnetismo la carica elettrica Q e la corrente elettrica i modificano lo spazio circostante determinando la presenza di campi elettrici \mathbf{E} (generati dalle cariche elettriche) e campi magnetici \mathbf{B} (generati dalle correnti elettriche) secondo un insieme di relazioni dette *Equazioni di Maxwell* che riportiamo nella *forma integrale**

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q & \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} &= 0 & \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 i_{S_L} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

*Qualora altre cariche elettriche che indicheremo con q si trovino nello spazio ove siano presenti questi campi elettrici \mathbf{E} e magnetici \mathbf{B} esse saranno soggette ad una forza, detta *forza di Lorentz*, data dalla espressione*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

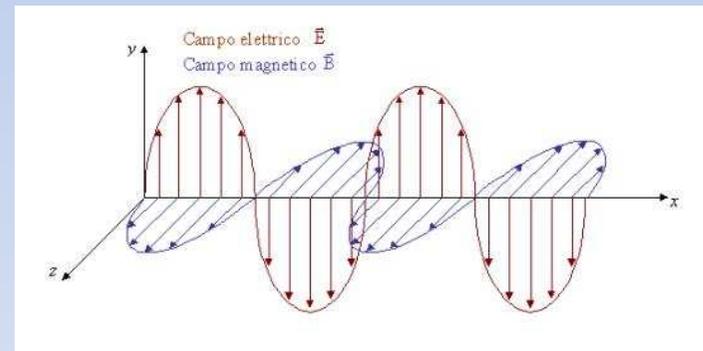
*infine la carica elettrica che risulta essere una proprietà intrinseca della materia non può essere ne creata ne distrutta ed è pertanto soggetta alla *legge della conservazione della carica* $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial\rho / \partial t$*

Campi elettrici, magnetici ed onde elettromagnetiche

Secondo l'elettromagnetismo l'azione di una carica elettrica su un'altra, distante nello spazio, non è una azione diretta ma si realizza in due fasi fisicamente distinte: la prima carica crea nello spazio circostante un campo elettrico e/o magnetico che una seconda carica in esso immersa percepisce subendo l'azione elettrica e/o magnetica (quando una azione naturale - gravitazionale, elettrica/magnetica, forte o debole - viene descritta con questo meccanismo si dice che è stata formulata una **teoria di campo** per quella azione).

Inoltre la teoria elettromagnetica prevede che il campo elettrico e/o magnetico, in alcuni contesti, riveli la propria esistenza in modo assai diretto: quando delle cariche elettriche vengono 'scosse' (ovvero accelerate dando luogo a correnti elettriche variabili nel tempo) i campi elettrici e magnetici ad esse associati cominciano ad oscillare in certa specifica configurazione detta **onda elettromagnetica** (raggi X, luce, onde radio) che si allontana dalle cariche alla fantastica **velocità c** soddisfacendo una nota equazione detta **equazione delle onde di d'Alembert**

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$



trasportando con se quantità di moto (pressione di radiazione), momento angolare ed energia che in pochissimo tempo possono essere prelevati in punti assai distanti da quello in cui ha avuto origine l'onda.

L'elettromagnetismo realizza dunque una potente sintesi riconducendo ad una unica causa - la carica elettrica - i fenomeni elettrici, magnetici ed ottici. **Contiene tuttavia aspetti assai problematici** : rispetto a quale riferimento si deve intendere misurata la velocità c di propagazione dell'onda elettromagnetica ? Il campo elettrico e/o magnetico deve essere identificato con un mezzo fisico? Se sì dotato di quali proprietà?

L'etere come possibile interpretazione dell'elettromagnetismo

Sul finire dell'800 sembrava assolutamente naturale porre in relazione l'elettromagnetismo con *i fenomeni ondulatori allora noti tantopiù che questi fornivano in modo naturale una risposta ai precedenti quesiti.*

Si sapeva infatti che all'interno dei mezzi materiali, solidi, liquidi o gassosi che fossero, gli stati di distensione e compressione del mezzo potevano propagarsi, trasportando quantità di moto, momento angolare ed energia (senza trasporto di materia), e che tale propagazione era descritta proprio dalla equazione delle onde di D'Alembert .

Per questo sembrò inevitabile immaginare l'esistenza di un mezzo fisico di tipo elastico che poteva essere perturbato localmente dalle cariche elettriche sia in quiete (cariche statiche) che in movimento (correnti elettriche). La perturbazione, consistente in stati di compressione e distensione (identificati con i campi elettrici e/o magnetici), poteva poi propagarsi allontanandosi dal punto in cui erano stata generata (onda elettromagnetica). In completa analogia con i fenomeni ondulatori allora noti, la velocità c doveva sicuramente intendersi come riferita al mezzo fisico stesso. Infine il mezzo non poteva certo essere di natura materiale come poteva esserlo un solido un liquido od un gas dato che i corpi materiali, con tutta evidenza, si muovevano all'interno di esso senza subire alcuna resistenza.

Un mezzo fisico con simili proprietà aveva fatto il suo ingresso nella fisica circa 150 anni prima in relazione alle ricerche nel campo dell'ottica:

Una sollecitazione pone in oscillazione un certo punto della superficie dell'acqua che poi la propaga lontano.



L'etere luminifero, da *Traité de la lumière*, C. Huygens, 1691:

Se ora si esamina quale può essere questa materia nella quale si estende il movimento che viene dai corpi luminosi, materia che chiamo eterea [etherée], si vedrà che non è la stessa che serve alla propagazione del suono. Poiché si trova che quest'ultima è propriamente l'aria che sentiamo e che respiriamo: e se anche la si toglie da un recipiente, non se ne toglie l'altra materia che serve alla luce. Il che può provarsi racchiudendo un corpo che suona in un recipiente di vetro [...] si può pensare che queste particelle di etere, nonostante la loro piccolezza, siano a loro volte composte di altre parti e che la loro elasticità consista nel movimento molto rapido di una materia molto sottile[...]

L'ottica progredì rapidamente nel primo decennio dell'800 con le fondamentali ricerche sperimentali di Thomas Young sui fenomeni della diffrazione e soprattutto della interferenza che stabilirono definitivamente la natura ondulatoria della luce. La comprensione dei fenomeni ottici fu però completa solo con i lavori di Augustin Jean Fresnel che oltre ad essere un abile sperimentatore (scoprì il fenomeno della polarizzazione e riprodusse tutti i risultati di Young) era pure un raffinato matematico capace di formulare una teoria in grado di spiegare tutti i fenomeni ottici. Le sue teorie, formulate in una serie di lavori presentati a più riprese all'Accademia delle scienze di Parigi negli anni tra il 1815 ed il 1819, erano interpretate per mezzo del concetto di etere luminifero:

L'etere, A.J. Fresnel 1815-1819.

[...] è l'incontrarsi di raggi che produce interferenza. Questo mi sembra del tutto opposto all'ipotesi dell'emissione di particelle e conferma il sistema che fa consistere la luce nelle vibrazioni di un fluido particolare [...]

Quasi contemporaneamente, le ricerche di Ampere e poi quelle di Faraday, prepararono il terreno alla grande sintesi maxwelliana (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873) che porterà alla completa comprensione dei fenomeni elettrici e magnetici ed alla scoperta fondamentale che la luce stessa è un fenomeno elettromagnetico. Il concetto di etere ne uscì ulteriormente rafforzato poichè Maxwell stesso pensava che i campi elettrici e magnetici pensati da Faraday e matematicamente descritti dalla sua teoria fossero stati di tensione di un mezzo capace di propagarli sotto forma di onde elettromagnetiche. Inoltre tutto l'apparato formale dell'elettromagnetismo (flussi e circuitazioni dei campi vettoriali) era stato fortemente influenzato dall'idrodinamica di Stokes sviluppata in quegli stessi anni.

Maxwell era dunque profondamente convinto dell'esistenza dell'etere:

La voce 'Ether', nona edizione dell'Enciclopedia Britannica, J.C. Maxwell, 1878:

[...]Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza [...]

L'ideazione e lo studio di tecniche capaci di evidenziare l'esistenza di questo mezzo fu uno dei temi dominanti della fisica della seconda metà dell'800. Lo si pensava particolarmente rigido in quanto capace di trasmettere le vibrazioni elettromagnetiche ad altissima velocità ma, al tempo stesso, altrettanto rarefatto poiché incapace di opporre resistenza all'avanzamento dei corpi materiali. Si pensava inoltre che in tale mezzo il sole, forse, si trovasse in quiete e la terra sicuramente in moto a causa del moto di rivoluzione.

Le implicazioni della esistenza dell'etere

Il concetto di etere era dunque necessario per spiegare alcuni aspetti problematici dell'elettromagnetismo: oltre ad interpretare i campi elettrici e magnetici come stati di tensione e distensione del mezzo esso forniva soprattutto una interpretazione naturale alla velocità c che altro non era che la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto all'etere (come v poteva essere la velocità del suono rispetto all'aria).

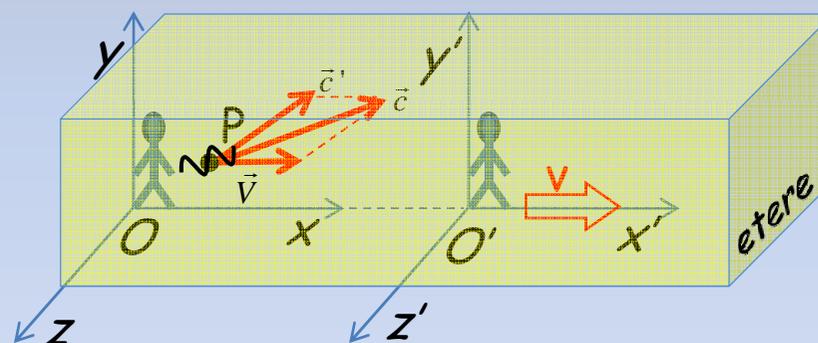
In conseguenza di questo fatto un osservatore in quiete rispetto all'etere avrebbe dovuto misurare una velocità della luce pari a c mentre un qualunque altro osservatore, in moto con velocità uniforme V rispetto all'etere, avrebbe dovuto misurare un valore della velocità della luce differente, dipendente dall'angolo tra c e V , secondo la formula

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$$

Si deduce allora che, diversamente da quanto accade in meccanica, per quanto riguarda i fenomeni elettromagnetici, i sistemi di riferimento inerziali sono diversi tra loro fornendo una diversa velocità dell'onda elettromagnetica.

Dato che la velocità dell'onda elettromagnetica viene derivata dalle equazioni dell'elettromagnetismo, dobbiamo concludere che le leggi dell'elettromagnetismo devono assumere una forma dipendente dal riferimento inerziale adottato e quindi anche che per i fenomeni elettromagnetici non vale il principio di relatività galileiano ed infine che le equazioni dell'elettromagnetismo non sono invarianti in forma rispetto a trasformazioni di galileo (non è facile mostrare direttamente questo fatto operando sulle equazioni di Maxwell).

Un'onda elettromagnetica si muove con velocità c rispetto al riferimento O in quiete nell'etere



Un esperimento per verificare l'esistenza dell'etere

Tenendo presente quanto detto nella pagina precedente è facile capire l'idea che Maxwell stesso propose intorno al 1870: definendo V il modulo della velocità della terra rispetto all'etere si ha che facendo propagare un raggio luminoso nella stessa direzione e verso del moto terrestre si deve misurare una velocità della luce $c'=c-V$ mentre facendolo propagare nella stessa direzione ma verso opposto si deve misurare una velocità della luce $c''=c+V$.

L'effetto percentuale da misurare vale

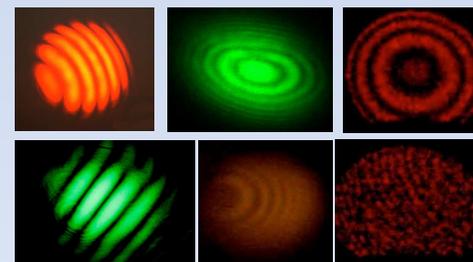
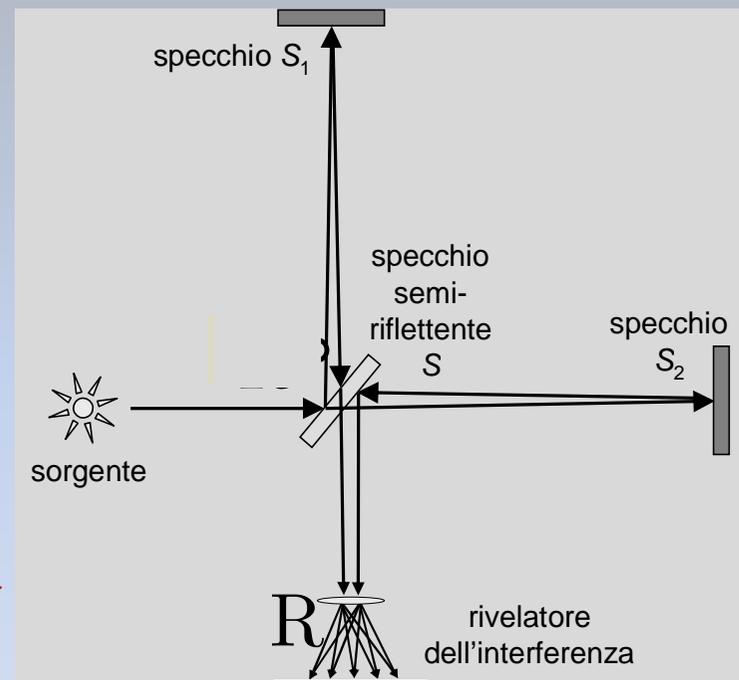
$$\frac{c''-c'}{c} = \frac{2v}{c} = \frac{2 \times 30}{300000} = 2 \times 10^{-4}$$

dove, come suggerito da Maxwell, si è assunta la velocità della terra rispetto all'etere uguale a quella dovuta al suo moto di rivoluzione attorno al sole (sole in quiete nell'etere).

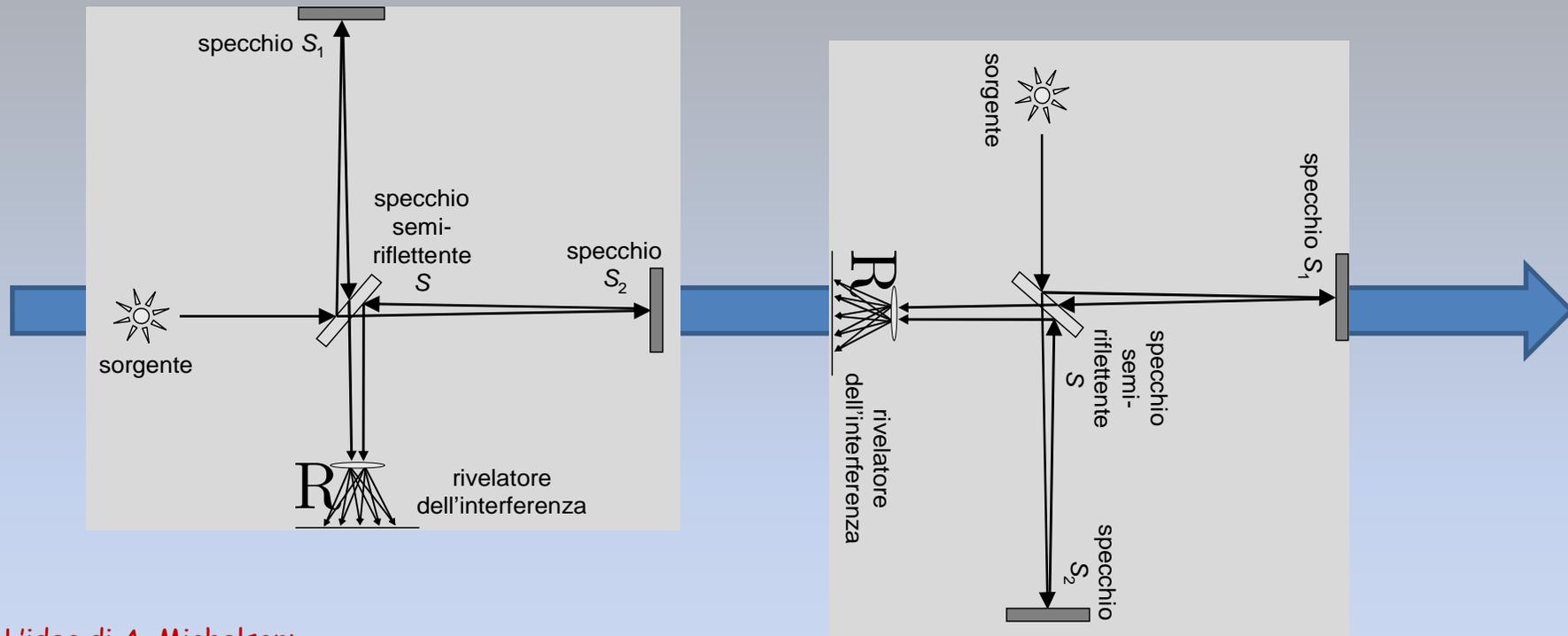
La strada suggerita da Maxwell richiedeva dunque una misura di velocità troppo precisa per le tecniche allora disponibili.

Per questo **A. Michelson** decise di affrontare il problema in modo diverso affidandosi ad un fenomeno ottico molto sensibile, quello della **interferenza**, che essendo regolato dalla lunghezza d'onda λ (si tenga presente che per la luce visibile $\lambda \sim 500$ nm) può mettere in evidenza effetti piccoli.

Ospite di H. von Helmholtz a Berlino, nel 1880 ideò una apparecchiatura ottica di enorme sensibilità, ancor oggi usata, detta **interferometro**.



se si modifica in un qualunque modo il cammino ottico di uno dei due raggi allora si osserva uno spostamento delle frange di interferenza!



L'idea di A. Michelson:

- i) se l'interferometro viene disposto con un braccio lungo la direzione del moto terrestre la luce che si propaga lungo quel braccio ha una velocità differente da quella che si propaga nell'altro. In questa situazione si osserva una certa **figura d'interferenza I_1** ;
- ii) se ora si ruota l'intero apparato, il ruolo dei bracci viene scambiato e si osserva una diversa **figura d'interferenza I_2** ,

dal confronto di I_1 con I_2 , in particolare dallo spostamento delle frange, Michelson sperava di evidenziare la velocità del moto terrestre rispetto all'etere e dunque una dimostrazione della esistenza dell'etere stesso.

Assumiamo il riferimento dell'etere nel quale la terra e con essa l'interferometro si muove tenendo presente che in tale riferimento la luce si propaga con velocità c ! Calcoliamo i tempi di arrivo dei raggi luminosi nei diversi punti dell'interferometro:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$c^2 t_1^2 = v^2 t_1^2 + L^2$$

$$t_1 = \frac{L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$AB' = AH + HB'$$

$$c t_1' = v t_1' + L$$

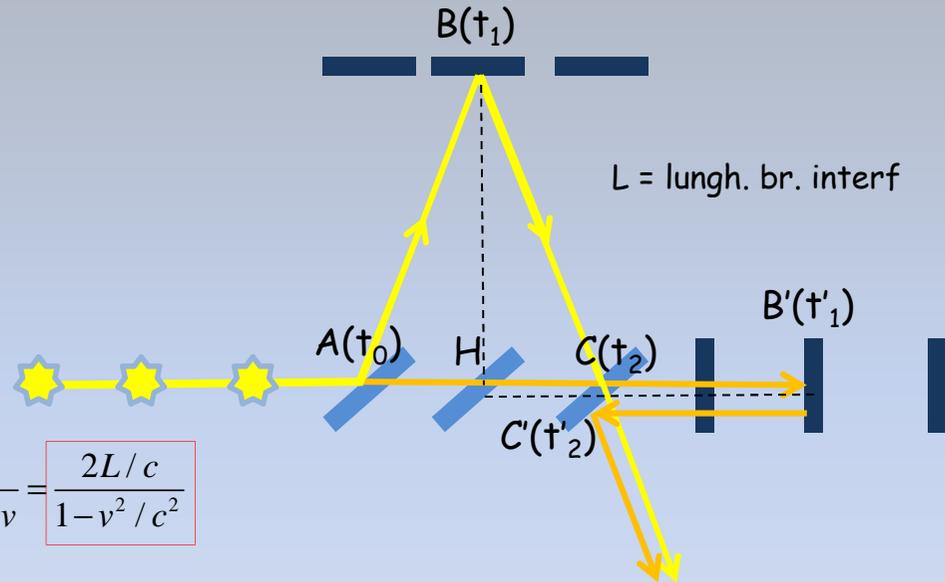
$$t_1' = \frac{L}{c-v}$$

$$HB' = HC' + C'B'$$

$$L = v(t_2' - t_1') + c(t_2' - t_1')$$

$$(t_2' - t_1') = \frac{L}{c+v}$$

$$t_2' = \frac{L}{c+v} + t_1' = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L/c}{1-v^2/c^2}$$



$$t_2' - t_2 = \frac{2L/c}{1-v^2/c^2} - \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) =$$

$$= \frac{2L}{c} \left(\frac{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v^2/c^2} \right) = \frac{2L}{c} \left(\frac{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v^2/c^2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) =$$

$$= \frac{2L}{c} \frac{1-(1-v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)(1+\sqrt{1-v^2/c^2})} = \frac{2L}{c} \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)(1+\sqrt{1-v^2/c^2})} \approx \frac{2L}{c} \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{L v^2}{c c^2}$$

I raggi luminosi dopo avere seguito percorsi diversi si ricongiungono nei punti C e C' (faccia inferiore dello specchio semiargentato) propagandosi sovrapposti fino al cannocchiale di osservazione.

Si noti che pur essendo partiti da A nello stesso istante (prima il raggio era indiviso) giungono in C e C' in tempi diversi proprio perché diversa è lunghezza dei cammini percorsi.

In particolare il raggio in giallo percorre una distanza

$$d_1 = c(t_2 - t_0)$$

mentre il raggio in arancione percorre una distanza

$$d_2 = c(t'_2 - t_0)$$

La configurazione in cui si sovrappongono (se cresta+cresta o cresta+ventre o altro) dipende (vedi figura) dalla differenza dei cammini percorsi

$$d = d_2 - d_1 = c(t'_2 - t_0) - c(t_2 - t_0) = c(t'_2 - t_2)$$

che risulta essere uguale (vedi pagina precedente) a

$$d = L(v^2/c^2)$$

d'altra parte la configurazione in cui si sovrappongono determina anche il grado di illuminamento osservato nel punto del cannocchiale colpito dai due raggi.

Immaginiamo ora di selezionare nel cannocchiale un massimo di illuminamento. Questo significa che

$$d = L(v^2/c^2) = N\lambda$$

con N intero. Immaginiamo ora di ruotare di 90 gradi tutto l'apparato. La differenza dei cammini d inverte esattamente segno e la nel cannocchiale dove si osservava un massimo ora si osserva un'altra configurazione che dipende dal numero di lunghezze d'onda contenute (questo numero può essere frazionario)

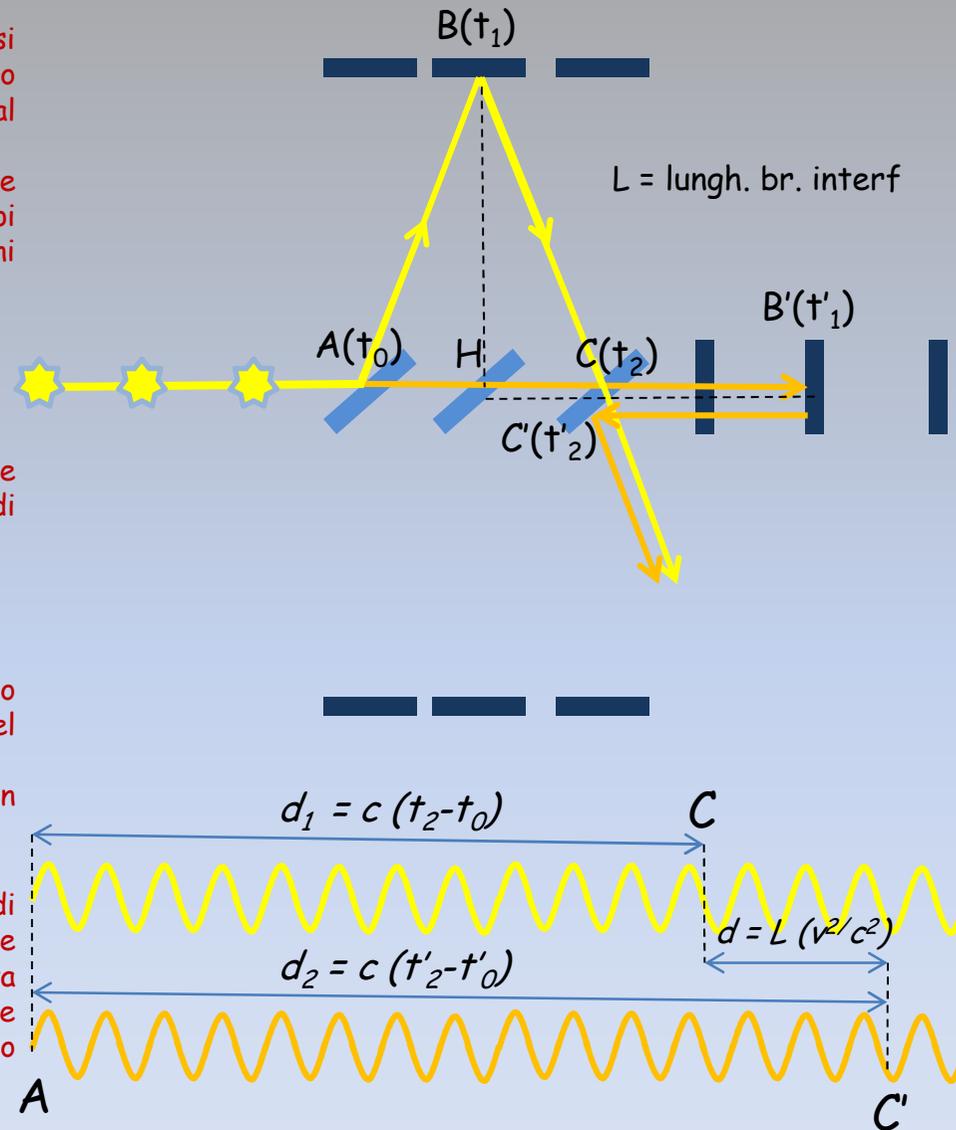
$$-d = -L(v^2/c^2) = N'\lambda$$

Facendo la differenza si ottiene

$$2L(v^2/c^2) = (N - N')\lambda = x\lambda$$

da cui ricaviamo la frazione

$$x = \frac{2L v^2}{\lambda c^2}$$



La formula precedente conferma le attese:

se l'etere esiste allora la velocità di propagazione della luce nei due bracci dell'interferometro è differente. Sulla base delle formule ottenute nelle pagine precedenti dobbiamo allora ottenere che la rotazione dell'interferometro di 90 gradi deve produrre uno spostamento delle frange d'interferenza pari a

$$x = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

che nel caso dell'interferometro usato da A. Michelson nel 1881 fornisce

$$x = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} = \frac{2 \times 1,2}{5,7 \times 10^{-5}} \left(\frac{30}{300000} \right)^2 = 0,04$$

A. Michelson non osservò alcun effetto! A. Michelson, in collaborazione questa volta con E. Morley, ripeté l'esperimento nel 1887 migliorando la sensibilità dello strumento che avrebbe dovuto fornire uno spostamento delle frange pari a

$$x = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} = 0,4$$

anche in questo caso Michelson e Morley non osservarono alcun effetto!

Fine della lezione di Martedì 13 Aprile 2010