Conseguenze dell'esperimento di Michelson e Morley

L'esito negativo dell'esperimento di Michelson e Morley (MeM), confermato al di la di ogni dubbio nel 1887, condusse la fisica in una situazione assai complessa che si risolse solo con la formulazione della teoria della relatività ristretta nel 1905 da parte di A. Einstein.
Per comprendere questo periodo è necessario tenere presente che anche il risultato sperimentale più limpido, sotto il profilo logico, non è mai conclusivo in quanto sempre passibile di diverse interpretazioni. In effetti l'esperimento fu seguito da una impressionante varietà di idee e proposte tutte tese a spiegare ciò che costituiva l'unico punto fermo: *l'assenza di spostamento delle frange a seguito della rotazione dell'interferometro.* In linea di principio erano possibili due diversi posizioni:

non esiste l'etere luminifero:

allora, assumendo la validità dell'elettromagnetismo, il significato della velocità *c* non può che essere quello di rappresentare la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto ad un qualunque osservatore inerziale. Fu la strada imboccata da A. Einstein, <u>*capace di spiegare in modo naturale l'esito dell'esperimento di MeM ma al prezzo di radicale revisione dei concetti di spazio e tempo.*</u>

esiste l'etere luminifero:

Fu la strada più seguita. Tra le idee proposte ricordiamo:
i) **trascinamento dell'etere**: la terra, nel suo moto orbitale, *trascina l'etere* per cui il laboratorio e l'interferometro si trovano, in realtà, in quiete nell'etere stesso. Per questo motivo non si osserva alcun spostamento delle frange (tale ipotesi fu poco sostenuta poiché non riusciva a spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare);
ii) **contrazione di Lorentz-Fitzgerald**: la terra si muove nell'etere, che non viene trascinato, tuttavia, *il braccio allineato con il moto nell'etere, subisce una modifica della propria lunghezza* tale da compensare esattamente lo spostamento atteso delle frange. Si spiega dunque l'esito dell'esperimento di MeM ma al prezzo di un nuovo effetto fisico che, oltre ad essere spiacevolmente 'ad-hoc', *modifica la concezione galileiana dello spazio*. Inoltre, per spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare, Lorentz fu costretto anche a *modificare la concezione galileiana del tempo.*
<u>*L'etere dunque, anche nelle mani di Lorentz, non era più in grado di salvare le concezioni di spazio e tempo della fisica classica che comunque dovevano essere abbandonate. Per questo motivo c'era che cominciava a pensare che il concetto di etere fosse diventato inutile e che dovesse essere eliminato!*</u>

La Teoria della Relatività Ristretta

A. Einstein, in un famoso lavoro pubblicato nel 1905 in una rivista specializzata tedesca prende la direzione che tutti gli esperimenti a seguire dimostreranno essere quella giusta (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, pubblicato su Zeitschrift für Physik*).
In tale lavoro, il primo passo fu quello di ***abbandonare il concetto di etere***. A questo riguardo, è però interessante sapere che A. Einstein dichiarò che, al momento della formulazione della TRR, non era al corrente dell'esperimento di Michelson e Morley e che, *la ragione che lo spinse ad abbandonare tale concetto di fu soprattutto la possibilità di recuperare la completa equivalenza di tutti gli osservatori inerziali, sia per i fenomeni meccanici che per quelli elettromagnetici,* in accordo con la sua *intuizione che il principio di relatività galileiano dovesse essere un principio generale, valido per tutti i fenomeni fisici.*
Abbandonato il concetto di etere, l'unica possibile interpretazione della velocità *c*, che emergeva in modo naturale dalle equazioni di Maxwell che Einstein credeva assolutamente corrette, era quella che ***c fosse la velocità dell'onda elettromagnetica rispetto ad un qualunque sistema di riferimento inerziale.***
Una volta stabiliti questi due punti fermi, A. Einstein mostrò che era possibile costruire una visione della fisica (in particolare dell'elettromagnetismo) coerente con queste assunzioni purché si fosse disposti ad abbracciare una nuova concezione dello spazio e del tempo abbandonando quella familiare della fisica classica.
E' inutile sottolineare che tutto ciò sarebbe rimasto un ardito esercizio intellettuale se gli esperimenti, oramai numerosissimi, non avessero puntualmente confermato tutte le rivoluzionarie previsioni della nuova teoria!

Fatte queste premesse, possiamo formulare i due principi o postulati, che A. Einstein assunse come veri, e dai quali, in modo deduttivo, si ottengono tutte le conseguenze della TRR:

Primo postulato : *in tutti i riferimenti inerziali valgono le stesse leggi fisiche*

Secondo postulato: *in tutti i riferimenti inerziali la velocità della luce assume lo stesso valore*

La modifica delle Trasformazioni di Galileo

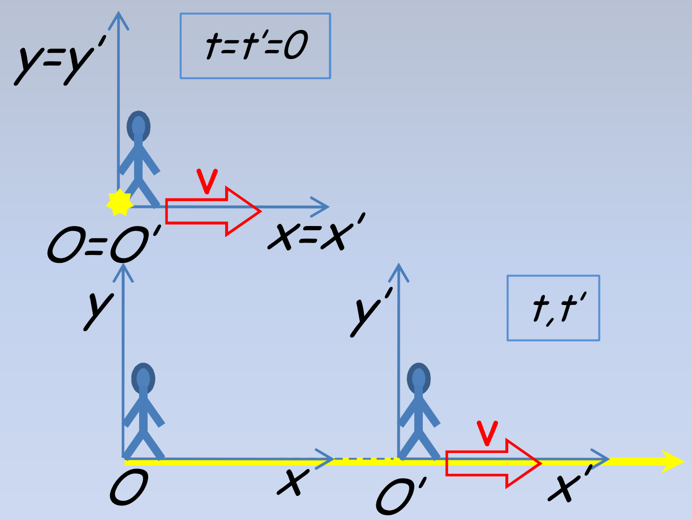
Mostreremo ora che le trasformazioni di Galileo contraddicono il secondo postulato per cui *risulta necessario procedere ad una loro modifica.*

Consideriamo i due soliti riferimenti O ed O', ed immaginiamo che, nel momento in cui le origini coincidono, dalla origine del riferimento mobile O' venga emesso un raggio di luce nella direzione delle x' positive. La posizione in funzione del tempo, del fronte del raggio, per l'osservatore O' vale

$$x' = ct'$$

Richiamando le Trasformazioni di Galileo e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct + vt \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = (c+v)t \\ - \end{cases}$$

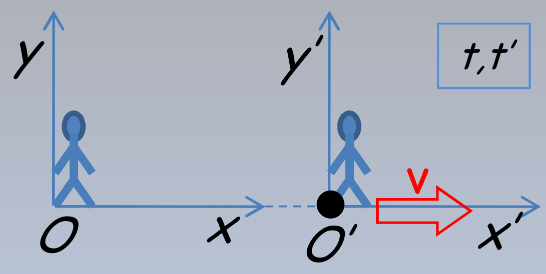


Il risultato mostra che l'osservatore O vede un raggio luminoso che si propaga nella direzione delle x positive con velocità *c'=(c+v) in completo disaccordo con il secondo postulato* che invece richiede che anche per l'osservatore O la velocità del raggio luminoso valga c!

NOTA: Vale la pena sottolineare quanto il secondo postulato sia in conflitto con il senso comune: dal punto di vista dell'osservatore O, il raggio luminoso ha seguito un percorso più lungo rispetto al riferimento O che rispetto al riferimento O'. Ciononostante il raggio si muove con la stessa velocità rispetto ad entrambi i riferimenti ! Ciò è possibile solo se sui ammette che i due osservatori misurino le durate degli stessi fenomeni in modo diverso.

Le modifiche delle Trasformazioni di Galileo possono essere individuate analizzando le seguenti situazioni fisiche:

i) *Un corpo materiale in quiete nell'origine del riferimento O', deve apparire in moto con velocità **v** all'osservatore O:*



$$\begin{cases} x' = 0 \\ x = vt \end{cases}$$

Evidentemente tale condizione può essere soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x' = x - vt \quad \rightarrow \quad x' = \alpha(x - vt)$$

dove α *è una costante da determinare.*

*Un corpo materiale è in quiete nel riferimento O esso deve apparire in moto con velocità **–v** all'osservatore O ':*

$$\begin{cases} x = 0 \\ x' = -vt' \end{cases}$$

Tale condizione può essere condizione soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x = x' + vt = x' + vt' \quad \rightarrow \quad x = \alpha(x' + vt')$$

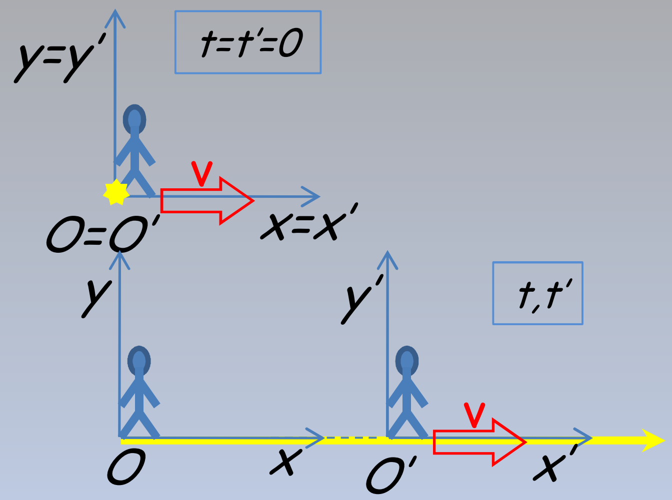
con *la stessa costante* α dato che i due osservatori sono del tutto equivalenti in accordo con il primo postulato. Confrontando le espressioni per x e x' arriviamo allora a comprendere che, in generale,

dati due osservatori O e O', in moto traslatorio uniforme, le trasformazioni di coordinate da O ad O' e da O' ad O (cioè le trasformazioni inverse) possono differire nel solo segno della velocità.

NOTA: è facile verificare che questa proprietà è soddisfatta dalle trasformazioni di Galileo.

ii) Un raggio luminoso, nel momento in cui le origini coincidono, viene emesso nella direzione delle x e x' positive. ***<u>In accordo con il secondo postulato, la posizione del fronte, nei rispettivi riferimenti, deve essere data dalle espressioni</u>***

$$x = ct \qquad e \qquad x' = ct'$$



iii) La eguaglianza $t'=t$, non può essere valida poiché contraddice il secondo postulato (esempio iniziale). La nuova relazione tra i tempi deve comunque essere lineare (altrimenti entra nelle formule il problema della origine) per cui scriveremo nel modo più generale possibile tipo $t'=at+bx$ che, per simmetria con quella relativa alle posizioni, prenderemo nella forma $t'=\beta(t+\gamma x)$.

Passiamo ora la costruzione delle nuove formule di trasformazione. Avremo allora per le ***trasformazioni da O ad O' e da O' ad O*** che si ricavano immediatamente

$$1)\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v}\left(x' + \dfrac{\alpha}{\beta} v t'\right) \\[2ex] t = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v}\left(t' - \dfrac{\beta}{\alpha}\gamma x'\right) \end{cases}$$

Dal requisito i) otteniamo immediatamente che devono essere soddisfatte le condizioni

$$3)\left\{ \frac{\alpha}{\beta} = 1 \right. \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta \qquad 4)\begin{cases} \alpha = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v} \\[2ex] \beta = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma v}}$$

Dal requisito ii), sostituendo nelle 1) x'=ct' e x=ct otteniamo invece

$$5)\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \alpha(ct - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma ct) \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \alpha(c - v)t \\ t' = \beta(1 + \gamma c)t \end{cases} \qquad c = \frac{\alpha(c - v)}{\beta(1 + \gamma c)} \quad \rightarrow \quad \gamma = -\frac{v}{c^2}$$

Tenendo conto delle 3), 4) e 5) otteniamo allora le espressioni

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad e \qquad \gamma = -v / c^2$$

le quali, sostituite nelle 1) e 2), forniscono le *nuove trasformazioni di coordinate* per *x* e *t*.

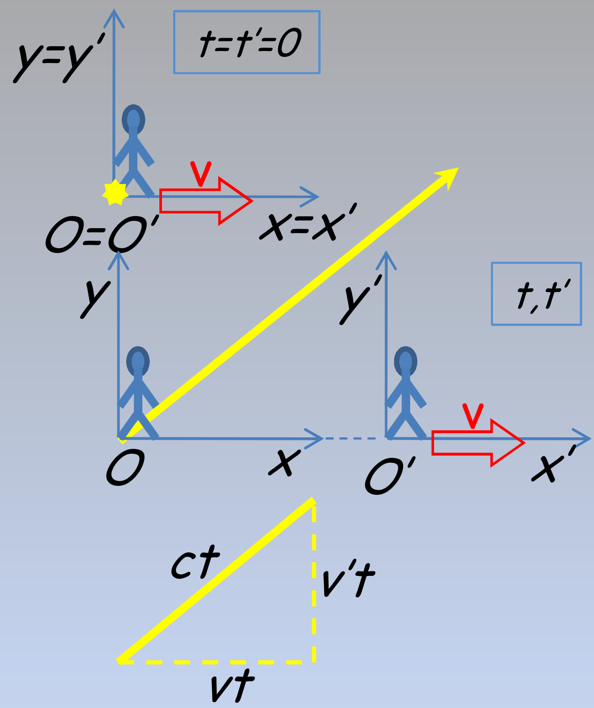
$$6) \quad O \rightarrow O' \quad \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2} x)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases} \qquad 7) \quad O' \rightarrow O \quad \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2} x')}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

Ora dobbiamo affrontare il problema delle trasformazioni delle coordinate *y* e *z* che, nel caso delle trasformazioni di Galileo, sono fornite dalle semplici leggi *y'=y* e *z'=z*. Continueranno ad essere valide? Ragioniamo come segue.

Si immagini una variante dell'esempio esaminato all'inizio nel quale, il raggio luminoso (nell'istante in cui le origini coincidono), viene indirizzato, nel riferimento in moto O', lungo l'asse delle y' positive. Mentre il raggio viaggia in direzione verticale verso l'alto per l'osservatore O', viaggia pure in direzione diagonale per O. Dopo un certo intervallo di tempo la traiettoria percorsa nel riferimento O potrebbe essere quella tracciata nella figura.

La posizione del fronte, nei due riferimenti, è data dalle equazioni

$$8)\begin{cases} y' = ct' \\ x' = 0 \end{cases} \qquad 9)\begin{cases} y = v't \\ x = vt \end{cases}$$



Si noti che O vede un raggio luminoso che si propaga in direzione diagonale con una velocità che deve valere *c* (in accordo con il secondo postulato) per cui si deve avere dal teorema di Pitagora

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (v't)^2 \qquad \text{da cui} \qquad v' = (c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,)t$$

sostituendo nelle 9) e riscrivendo sia le 8) che le 9), otteniamo

$$10)\begin{cases} y' = ct' \\ x' = 0 \end{cases} \qquad 11)\begin{cases} y = (c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,)t \\ x = vt \end{cases}$$

Ora, si deve richiamare la trasformazione del tempo data dalla seconda delle 6), e sostituirla nella prima delle 10), si ottiene

$$12)\begin{cases} y' = c\dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda delle 11) nella prima delle 12) abbiamo dalle quali, per confronto diretto, verifichiamo che la prima delle 13) coincide con la prima delle 11) per cui y'=y.

$$13)\begin{cases} y' = c\dfrac{(t - \frac{v}{c^2}vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (c\sqrt{1 - v^2/c^2})t \\ x' = 0 \end{cases}$$

Dunque

le leggi di trasformazione delle coordinate perpendicolari alla direzione del moto (considerazioni analoghe conducono allo stesso risultato per la coordinata z) non necessitano di alcuna correzione per cui

$$14)\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Riassumendo le *nuove trasformazioni delle coordinate* sono date dalle 6), 7) e 14).

Le nuove trasformazioni della posizione e del tempo tra due osservatori inerziali:

le trasformazioni di Lorentz

Nelle pagine precedenti abbiamo mostrato che i due postulati, posti a fondamento della TRR e certamente in conflitto con le trasformazioni di Galileo, hanno un forte valore costruttivo conducendo ad *un nuovo insieme di trasformazioni delle misure di posizione e tempo tra osservatori inerziali dette* ***Trasformazioni di Lorentz***

Se l'osservatore O misura un certo evento fisico nella posizione spaziale *(x,y,z)* e temporale *t* allora O' misurerà quello stesso evento nella posizione spaziale *(x',y',z')* e temporale *t'* secondo le formule qui a lato.

$$O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2}x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

NOTA: Queste trasformazioni furono trovate, a partire dal 1887, da G. Fitzgerald, J. Larmor, H. Lorentz e W. Voigt essenzialmente per spiegare l'esito nullo dell'esperimento di Michelson e Morley. Pare che J. Larmor avesse compreso l'effetto della dilatazione del tempo in esse nascosto, e Lorentz la loro proprietà di lasciare invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo, ma fu A. Einstein che per primo chiarì fino in fondo il loro vero significato fisico.

Le Trasformazioni di Galileo sono sempre sbagliate?

Premesso che le corrette trasformazioni delle misure di posizione e tempo sono quelle di Lorentz, è comunque vero che, in certi contesti fisici, queste sono molto ben approssimate dalle trasformazioni di Galileo. Richiamando le trasformazioni di Lorentz è facile rendersi conto quando questo accade

$$O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sim (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sim t \end{cases} \qquad O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sim (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2}x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sim t' \end{cases}$$

Si osservi che, nel caso in cui si possa trascurare il rapporto v^2/c^2 nelle radici quadrate e vx/c^2 nelle trasformazioni del tempo, si ottengono esattamente le Trasformazioni di Galileo. Ora, il termine v^2/c^2 è trascurabile quando la velocità della traslazione del riferimento è piccola rispetto alla velocità della luce. Per quanto riguarda, invece, il termine vx/c^2, si osservi che x rappresenta la posizione dell'evento fisico rispetto al riferimento O e che, se l'evento è connesso ad un qualche moto di velocità v' lungo x, avremo $x=v't$ per cui si ha $vx/c^2 = vv'/c^2$ che è trascurabile se anche questa velocità è piccola rispetto alla velocità della luce.

Dunque riassumendo ***le Trasformazioni di Galileo possono essere assunte valide quando la velocità di traslazione del riferimento e le velocità dei processi fisici in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce.***

NOTA: Un primo risultato della TRR è quindi quello di stabilire che in fisica i concetti di 'velocità grande' o 'velocità piccola' hanno un senso assoluto poiché ogni velocità deve essere riferita a quella della luce. Dunque, secondo la TRR i*n fisica esiste una scala assoluta delle velocità.*

Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
gli effetti relativistici

Le trasformazioni di Lorentz sono profondamente diverse da quelle di Galileo. Esse comportano una così radicale modifica dei concetti di spazio, tempo e di tutte le grandezze dinamiche, che si suole dare il nome di *effetti relativistici* a tutti i fenomeni che ne derivano e che solitamente si differenziano in modo clamoroso dai corrispondenti fenomeni classici previsti dalle trasformazioni di Galileo.
Certamente l'ambito classico è più vicino alla nostra intuizione, ma questo è solo dovuto al fatto che la nostra esperienza matura in contesti caratterizzati da velocità piccole rispetto a quella della luce. I cosiddetti *effetti relativistici* non sono effetti *sono la realtà che noi stessi sperimenteremmo qualora ci muovessimo con velocità rilevanti rispetto a c.*
Prima di iniziare la nostra analisi vogliamo porre le trasformazioni di Lorentz in una forma equivalente ma più utile per le considerazioni che seguiranno. Immaginiamo che l'osservatore O, ad esempio, misuri due eventi fisici nelle posizioni spaziali e temporali (x_1,y_1,z_1), t_1 e (x_2,y_2,z_2), t_2. L'osservatore O' li misurerà allora nelle posizioni spaziali e temporali

$$x_1' = \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad y_1' = y_1 \quad z_1' = z_1 \quad t_1' = \frac{(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad x_2' = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad y_2' = y_2 \quad z_2' = z_2 \quad t_2' = \frac{(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

E' allora evidente che possiamo sottrarre membro a membro le coordinate corrispondenti per ottenere (si ragioni in modo analogo con le trasformazioni da O' ad O) le **Trasformazioni di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali**

$$O \to O' \quad \begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \qquad O' \to O \quad \begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

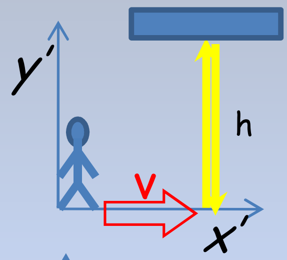
Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
la dilatazione dei tempi

Esaminiamo la trasformazione degli intervalli temporali da O' ad O. Rispetto alla trasformazione di Galileo $(t_2 - t_1) = (t_2^{'} - t_1^{'})$, compaiono differenze essenziali nei punti indicati

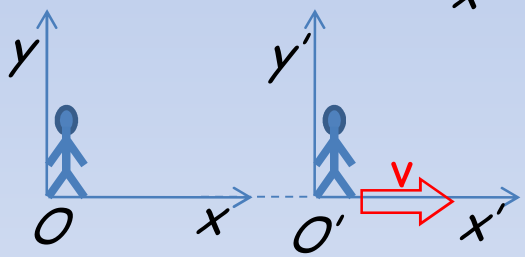
A

$$1) \qquad (t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'}) + \frac{v}{c^2}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

B



Quale è il significato fisico di queste differenze ?

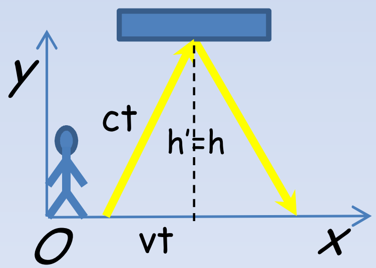


Per saggiare il significato del ***termine B*** immaginiamo un raggio luminoso che, nel riferimento O', parte dal punto x_1', y_1' al tempo t_1', si propaga in direzione verticale per un tratto h, incontra uno specchio che lo riflette fino a tornare nello stesso punto x_1', y_1' al tempo t_2'. Gli eventi fisici '*partenza del raggio luminoso*' e '*ritorno del raggio luminoso*' hanno una separazione spaziale nulla (e quindi annullano il termine A)

$$2) \qquad (x_2^{'} - x_1^{'}) = 0$$

mentre hanno una separazione temporale non nulla pari a

$$3) \qquad (t_2^{'} - t_1^{'}) = 2h/c$$

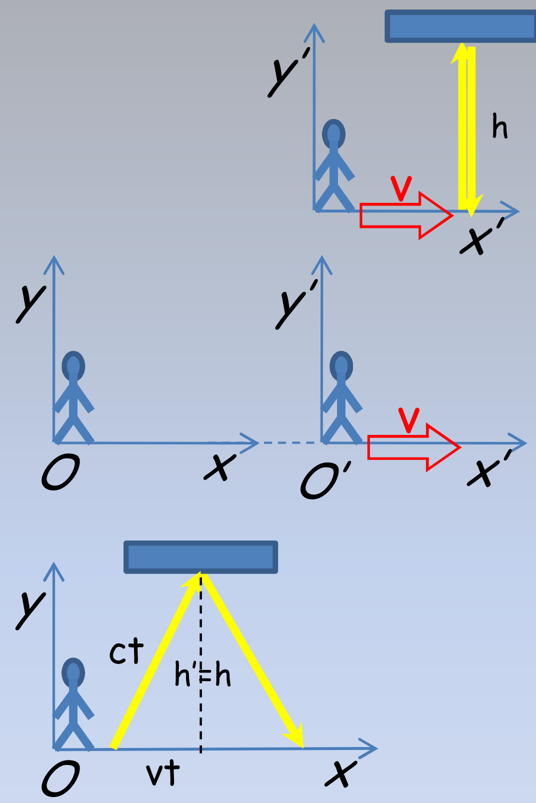


Quale separazione temporale misura invece O ? Sostituendo le 2) e 3) nella 1) otteniamo

$$4) \qquad (t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dunque un tempo più lungo! Ponendo $t_2 - t_1 = \Delta t_M$ e $t_2' - t_1' = \Delta t_0$ si ha

4) $$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

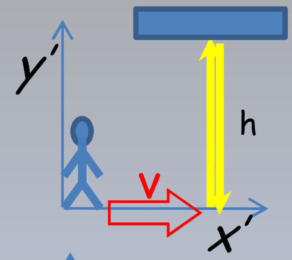


da cui risulta che
due eventi che hanno una distanza temporale Δt_0 per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza temporale Δt_M ,più lunga, dall'osservatore in movimento.
A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariato per lui l'intervallo temporale Δt_0 tra gli eventi, aumenta quello Δt_M misurato da O, che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.
Tale effetto, formalmente dovuto al termine B della 1), viene detto ***dilatazione degli intervalli temporali*** o ***dilatazione del tempo***
e mostra che
secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria durata degli eventi fisici.
Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo,
la durata di un evento fisico è una grandezza relativa
e non assoluta.

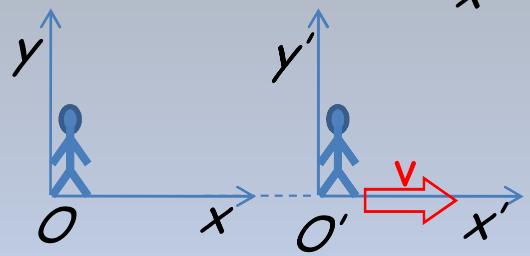
E' utile arrivare allo stesso risultato ragionando direttamente con i raggi luminosi !

L'osservatore O' osserva un raggio luminoso che compie un moto di andata e ritorno con velocità ***c*** lungo la verticale. Dato che lo spazio percorso vale *2h*, la durata del fenomeno vale

$$5)\qquad \Delta t_0 = 2h / c$$



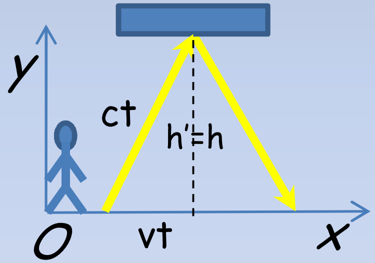
Cosa vede invece l'osservatore O? Tenendo presente il principio della costanza della velocità della luce, da semplici considerazioni cinematiche si ottiene immediatamente la figura a lato. Il tempo *t* impiegato a raggiungere lo specchio soddisfa la relazione



$$ct = \sqrt{h^2 + (vt)^2}$$

e vale dunque

$$t = \frac{h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



per cui il tempo di andata e ritorno, che è il doppio di tale tempo, vale

$$\Delta t_M = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

se in tale espressione sostituiamo la 5) otteniamo [confronta con la 4)]

$$6)\qquad \boxed{\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

la quale chiarisce che ***l'osservatore O misura un intervallo temporale Δt_M più lungo di quello Δt_0 misurato da O', perché il raggio luminoso, che anche per lui si muove con velocità c, deve compiere un percorso più lungo.***
Nel caso in cui la velocità i traslazione si avvicina a *c* il fenomeno apparirà ad O occupare un intervallo temporale tendente all'infinito dato che il raggio luminoso dovrà percorrere un cammino tendente anch'esso all'infinito.

Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
la relatività della simultaneità

Richiamando ancora la trasformazione del tempo da O' ad O

$$1) \qquad (t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

A

B

cercheremo ora di individuare un fenomeno dove il termina A sia non nullo in modo da capirne il significato. La cosa più semplice è individuare un fenomeno tale che $(t_2'-t_1')=0$ in modo che l'unico termine attivo sia proprio quello che ci interessa.

Per saggiare il significato del termine A allora, immaginiamo che nel riferimento O', lungo la direzione x', siano disposti due traguardi distanti Δx_0 nelle posizioni x_1' e x_2'. Ad un certo istante, dal punto di mezzo (tra i due traguardi), due raggi luminosi partono lungo l'asse x' in versi opposti, raggiungendo, dopo un certo tempo, i traguardi stessi. Senza dubbio *per l'osservatore O' i raggi raggiungono i traguardi contemporaneamente.*

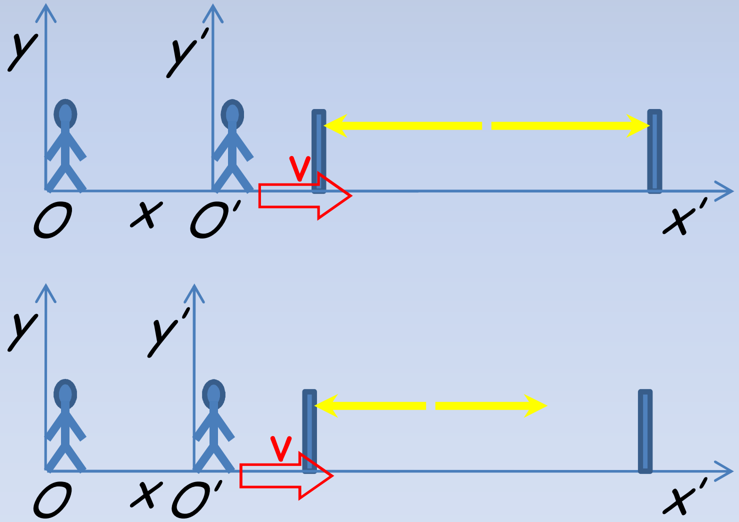
I due eventi fisici, in questo caso, sono rappresentati dall'arrivo dei raggi luminosi sui traguardi ed hanno (per l'osservatore O') la seguente separazione spaziale

$$(x_2' - x_1') = \Delta x_0$$

Mentre, per quanto detto, hanno una separazione temporale nulla

$$(t_2' - t_1') = \Delta t_0 = 0$$

Notiamo subito che, secondo la formula, al contrario di O', l'osservatore O vede i due eventi non contemporanei. La loro distanza temporale vale infatti

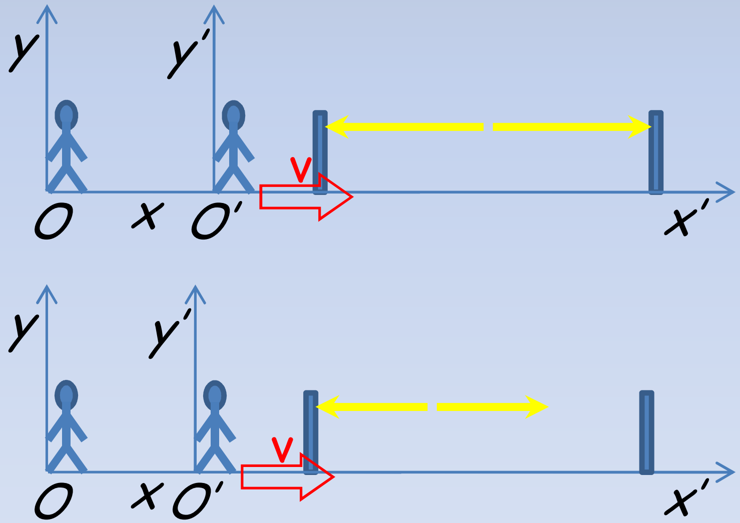


$$(t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ *da cui*

$$\Delta t_M = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Concludiamo allora che, ***due eventi simultanei per l'osservatore in quiete non sono simultanei per l'osservatore in movimento che li vede separati temporalmente in modo crescente con la loro distanza nel riferimento di quiete.***
Tale fenomeno, che ha una origine differente da quello della dilatazione dei tempi vista pocanzi essendo ascrivibile al termine A) della 1), viene detto
de-sincronizzazione degli intervalli temporali o ***de-sincronizzazione del tempo***
e mostra che
secondo le trasformazioni di Lorentz la simultaneità di eventi fisici spazialmente separati vale per un osservatore inerziale ma non per gli altri .
Contrariamente a quanto accade con le trasformazioni di Galileo, secondo le trasformazioni di Lorentz
la simultaneità degli eventi fisici è un concetto relativo.

E' utile arrivare allo stesso risultato ragionando direttamente con i raggi luminosi !



L'osservatore O' vede i raggi luminosi partire dal centro, tra i due traguardi, e raggiungere gli stessi nello medesimo istante, per cui afferma che $\Delta t'=0$. Le posizioni però sono differenti essendo $\Delta x'=\Delta x_0$.
L'osservatore O, invece, vede il raggio 1) che raggiunge il traguardo prima del raggio 2). In particolare, per lui il raggio 1) raggiunge il traguardo ad un tempo t_1 dopo l'emissione dato da

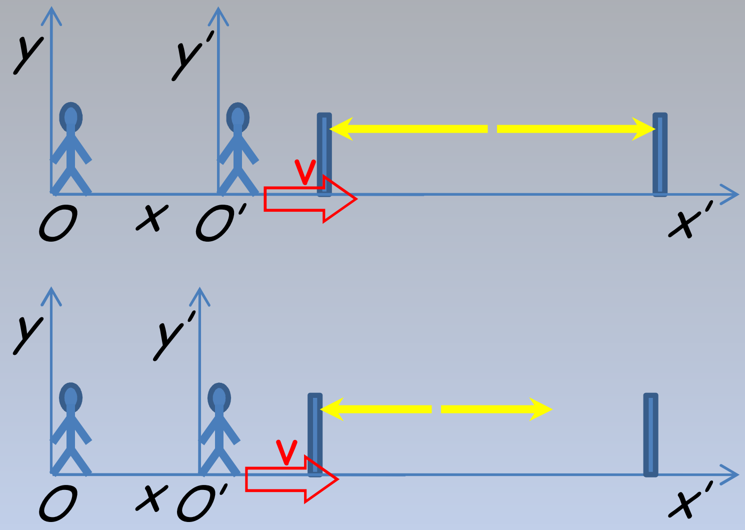
$$x_0 - ct_1 = x_0 - \frac{L_M}{2} + vt_1$$

(si noti che abbiamo indicato la distanza tra i traguardi con L_M e non semplicemente con L perché L è la distanza tra i traguardi nel riferimento O' in cui sono in quiete e noi vogliamo prevedere la possibilità che tale distanza possa essere differente per l'osservatore O che invece li vede in moto).
Analogamente per il raggio 2) avremo

$$x_0 + ct_2 = x_0 + \frac{L_M}{2} + vt_2$$

Dalle precedenti relazioni ricaviamo allora

$$t_1 = \frac{L_M/2}{c+v} \qquad t_2 = \frac{L_M/2}{c-v}$$



e quindi la separazione temporale tra gli eventi misurata da O che vale

$$1) \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}L_M}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Questa formula è simile a quella che abbiamo visto in precedenza

$$2) \quad (t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ma non uguale. Affinchè lo siano è necessario che

$$\frac{\frac{v}{c^2}L_M}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene $\quad 3) \quad L_M = L\sqrt{1-v^2/c^2}$

Ovvero è necessario ammettere che una distanza lungo la direzione del moto che l'osservatore in quiete misura di valore *L* viene misurata con una valore L_M più corto da quello in moto. Torneremo su questo fenomeno che prende il nome di contrazione delle lunghezze ma per ora ammettiamolo in modo da ottenere sostituendo la 3) in 1)

$$4) \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}L\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Introducendo dunque l'effetto della contrazione delle lunghezze abbiamo ricostruito con la sola cinematica dei raggi luminosi la formula

$$4)\quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

che possiamo riscrivere immediatamente come

$$\Delta t_M = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e che è in effetti è identica a quella che volevamo interpretare.
Dunque ***mentre l'osservatore O' vede i raggi luminosi raggiungere i traguardi nello stesso istante, l'osservatore O vede i due raggi raggiungere i traguardi in istanti diversi, poiché per lui uno corre incontro al traguardo mentre l'altro lo insegue.***
Questo fatto è davvero notevole! Infatti un intervallo che l'osservatore O' giudica puramente spaziale (si ricordi che i traguardi sono raggiunti nello stesso istante per lui) viene interpretato come spaziale da O (i due traguardi sono raggiunti in punti diversi anche per lui) ma anche come temporale poiché i due eventi non sono simultanei per lui. Questo fatto mostra che *la natura spaziale o temporale di un intervallo è una questione di punti vista non una proprietà assoluta indipendente dal riferimento.*
Vale la pena ricordare, a questo proposito, che le trasformazioni di Galileo ammettevano che un intervallo puramente temporale per un osservatore potesse essere interpretato come spaziale e temporale da un altro (fenomeno periodico per O' si chiude in tempi diversi ed in punti diversi per O). Tuttavia un intervallo puramente spaziale per un osservatore, rimaneva tale per ogni altro. In relatività il cerchio si chiude e si osserva una completa reversibilità dei punti di vista per cui ***la definizione della natura spaziale o temporale di un intervallo acquisisce un carattere completamente relativo.***

Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz: la contrazione delle lunghezze

Le trasformazioni di Lorentz affermano che gli intervalli spaziali disposti perpendicolarmente alla direzione del moto sono misurati con lo stesso valore da tutti gli osservatori inerziali. Di questi dunque non ci occuperemo.

Diversa è invece la situazione per gli intervalli spaziali disposti lungo la direzione del moto. Richiamiamo le trasformazioni

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per studiare il significato di questa trasformazione si può immaginare di considerare due eventi che avvengono nel riferimento O' nello stesso istante ($t'_1 = t'_2$) ma in punti differenti x_1' e x_2' ad una distanza L'. Avremo dunque i seguenti intervalli

$$(t_2' - t_1') = 0 \qquad (x_2' - x_1') = L$$

che sostituiti nella legge di trasformazione forniscono

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x_2 - x_1 = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad L = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene che la distanza che O' misura L', viene misurata con valore L da O che risulta essere più lunga. Questo ragionamento *sembrerebbe condurci verso l'effetto della dilatazione delle lunghezze.*

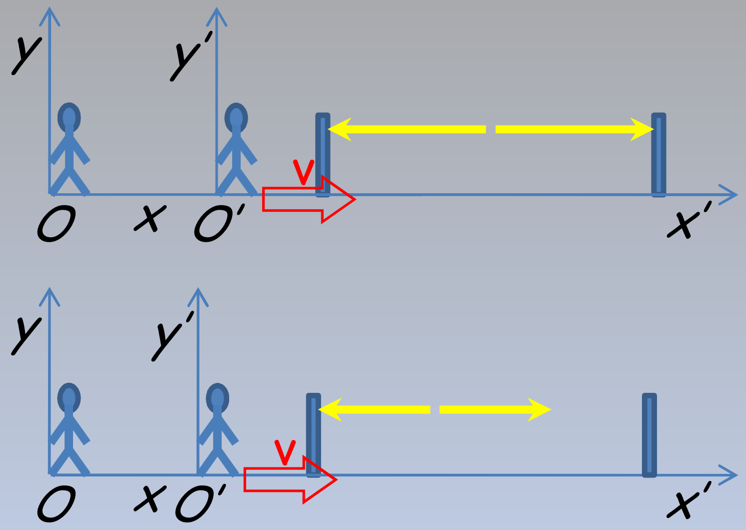
C'è un errore in questa impostazione che possiamo cercare di chiarire con un esempio.

Immaginiamo di dovere misurare la lunghezza di un treno in transito nella stazione. Potremmo innanzitutto disporre osservatori dotati di cronometro lungo il marciapiede per una lunghezza sufficiente a comprendere l'intero treno. Poi i cronometri dovranno essere sincronizzati tra loro ovvero marciare perfettamente paralleli (Si può pensare di inviare un segnale luminoso lungo il marciapiede ricevuto il quale ogni osservatore posizionerà il cronometro ad un tempo anticipato pari a d/c dove d è la distanza dell'osservatore dal punto di emissione del segnale). Al passaggio del treno ogni osservatore annoterà i tempi in cui vede di fronte a se la testa o la coda del treno. E' ragionevole assumere come lunghezza del treno la distanza di due osservatori (qualunque) che vedono la testa e la coda del treno nello stesso istante.

Dunque la distanza dei traguardi misurata da O può essere definita come la distanza tra due osservatori in quiete nel riferimento O che vedono, nello stesso istante, i due traguardi nei punti dello spazio da loro occupati.

In questa misura è cruciale il concetto di simultaneità che essendo relativo ci fa capire immediatamente che osservatori inerziali in moto relativo misureranno valori differenti della distanza tra i traguardi ed, in particolare, valori differenti da quello misurato dall'osservatore in quiete rispetto ai medesimi.

Prima di anticipare le conclusioni troviamo comunque la relazione tra la distanza misurata da O' (osservatore in quiete rispetto ai traguardi) e quella misurata da O (osservatore che vede i traguardi in moto).



Siano dati allora nel riferimento O', lungo la direzione *x'*, due traguardi fermi distanti *L* nelle posizioni x_1' e x_2'. Come osservato in precedenza O' può decidere di misurare la distanza tra i traguardi come vuole, essendo fermi il tempo non gioca alcun ruolo nella sua misura e si ha

$$(x_2' - x_1') = L \qquad (t_2' - t_1') = qualunque$$

Sulla base della definizione data invece la distanza tra i traguardi misurata dall'osservatore O coincide con la distanza degli osservatori in quiete in O che vedono i traguardi nello stesso istante'

$$(x_2 - x_1) = L_M \qquad (t_2 - t_1) = 0$$

dove il pedice M ricorda che si tratta di una distanza tra oggetti (traguardi) in movimento.
Dalle trasformazioni di Lorentz per gli intervalli abbiamo

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} L_M = \dfrac{L + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} L_M = \dfrac{L + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \quad L_M = \frac{L - v\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

dunque in generale cambiando leggermente la notazione

$$\Delta x_M = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Delta x_M = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

per cui concludiamo che ***due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale Δx_0 per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx_M più corta dall'osservatore in movimento.***

A questo proposito si noti che aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto ***contrazione degli intervalli spaziali*** o ***contrazione delle lunghezze*** e mostra che ***secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici***. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, ***la distanza tra due eventi è una grandezza relativa*** e non assoluta.