Domenico Galli

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Introduzione alla Relatività Ristretta
III parte

http://www.fondazioneocchialini.it

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 20 Aprile 2010

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Trasformazioni di Lorentz

Il cambiamento di SdR in meccanica relativistica.

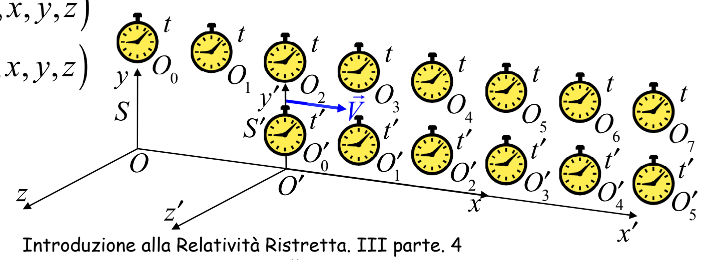
Le Nuove Leggi di Trasformazione

- Vogliamo ora formulare le nuove leggi di trasformazione che sostituiscano la trasformazione di Galileo.
- Ci baseremo sui seguenti postulati:
  - Validità del **Principio di Relatività Ristretta**:
    - le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i SdR inerziali;
  - **Invarianza** della **velocità della luce nel vuoto**:
    - la luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità che ha lo stesso valore c in tutti i SdR inerziali;
  - **Omogeneità** dello **spazio-tempo**:
    - Le leggi della fisica sono invarianti per **traslazioni** nello spazio o nel tempo;
  - **Isotropia** dello **spazio-tempo**:
    - Le leggi della fisica sono invarianti per **rotazioni**.

La Forma Generale

- Innanzitutto le trasformazioni che cerchiamo possono coinvolgere le 3 variabili **spaziali** x, y e z e, a differenza delle trasformazioni di Galileo, anche la variabile **temporale** t.

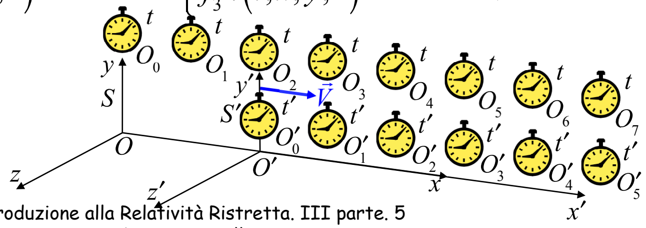
$$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) \\ x' = f_1(t,x,y,z) \\ y' = f_2(t,x,y,z) \\ z' = f_3(t,x,y,z) \end{cases}$$



La Forma Generale (II)

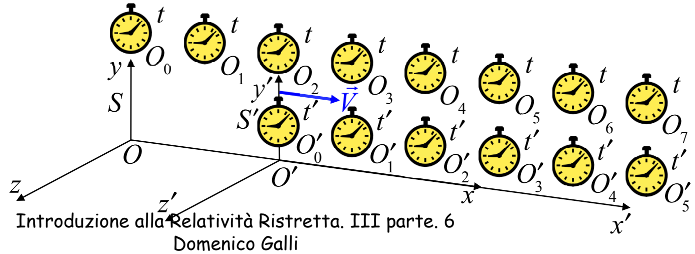
- In queste trasformazioni f_0, f_1, f_2 e f_3. sono funzioni generiche che associano a una quaterna ordinata di numeri reali un altro numero reale:

$$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) \\ x' = f_1(t,x,y,z) \\ y' = f_2(t,x,y,z) \\ z' = f_3(t,x,y,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0 : (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow t' \in \mathbb{R} \\ f_1 : (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow x' \in \mathbb{R} \\ f_2 : (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow y' \in \mathbb{R} \\ f_3 : (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow z' \in \mathbb{R} \end{cases}$$



La Forma Generale (III)

- Procederemo ora nel cercare le **restrizioni** che i **postulati** prima elencati (relatività, invarianza della velocità della luce, omogeneità e isotropia dello spazio-tempo) **impongono alla forma** delle **funzioni f_0, f_1, f_2 e f_3**.



Omogeneità dello Spazio-Tempo

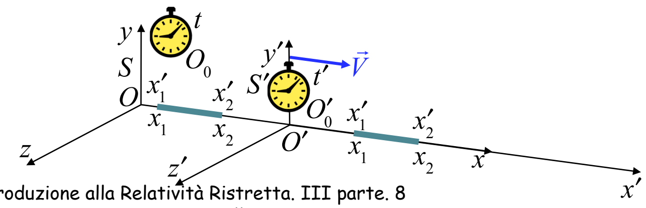
- Qualunque esperimento deve dare esattamente gli stessi risultati se viene ripetuto nelle stesse condizioni fisiche in punti diversi dello spazio e in tempi diversi (**omogeneità** dello spazio-tempo).
  - In altre parole le leggi della fisica debbono essere **invarianti per traslazioni** nello **spazio** o nel **tempo**.
  - Si tratta di un requisito fondamentale, in quanto sarebbero poco utili leggi che cambiano a seconda della posizione o nel tempo.
- Questo requisito impone alle funzioni f_0, f_1, f_2 e f_3 di essere **lineari** (ovvero di essere funzioni di primo grado).

Omogeneità dello Spazio-Tempo (II)

- Mostriamo con un **esempio** che se le funzioni f_0, f_1, f_2 e f_3 **non** sono **lineari** lo **spazio** **non** sarebbe **omogeneo**.
- Supponiamo che la coordinata x si trasformi come:

$$x' = f_1(t,x,y,z) = a\,x^2$$

- Consideriamo ora la misura di un'asta di lunghezza unitaria (nel SdR S) collocata lungo l'asse x.



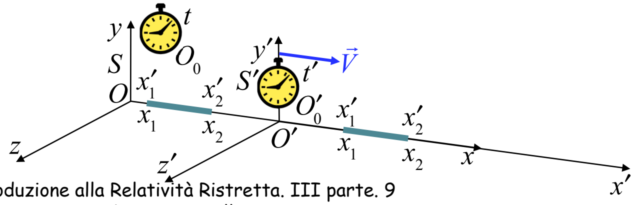
Omogeneità dello Spazio-Tempo (III)

- Se l'asta è collocata con le estremità in $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, allora la sua lunghezza in S' vale:

$$l' = \left|x_2' - x_1'\right| = a\left(x_2^2 - x_1^2\right) = a\left(4-1\right) = 3a$$

- Se invece l'asta è collocata con le estremità in $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$, allora la sua lunghezza in S' vale:

$$l' = \left|x_2' - x_1'\right| = a\left(x_2^2 - x_1^2\right) = a\left(16-9\right) = 7a$$

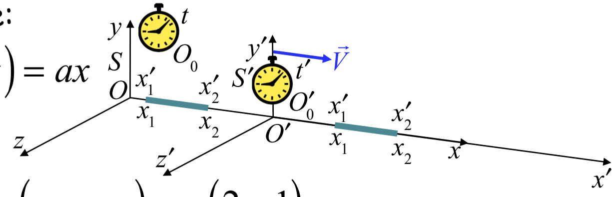


Omogeneità dello Spazio-Tempo (IV)

- Quindi, anche se la lunghezza dell'asta è sempre unitaria in S, la misura compiuta dall'osservatore di S' darebbe **risultati diversi** a **seconda** del **punto dello spazio in cui l'asta è stata posta**.

- Se invece la coordinata x si trasformi come la funzione lineare:

$$x' = f_1\left(t,x,y,z\right) = ax$$



si ha:

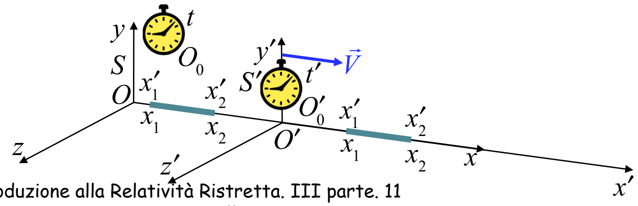
$$l' = \left|x_2' - x_1'\right| = a\left(x_2 - x_1\right) = a\left(2-1\right) = a$$

$$l' = \left|x_2' - x_1'\right| = a\left(x_2 - x_1\right) = a\left(4-3\right) = a$$

Omogeneità dello Spazio-Tempo (V)

- La forma più generale di trasformazioni lineari è data dalle espressioni:

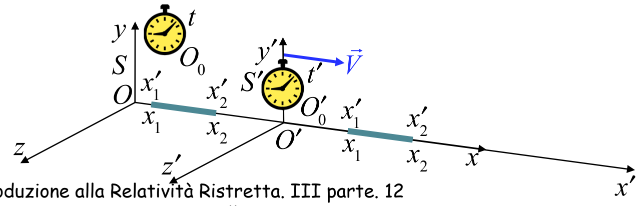
$$\begin{cases} t' = f_0\left(t,x,y,z\right) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + b_0 \\ x' = f_1\left(t,x,y,z\right) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = f_2\left(t,x,y,z\right) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = f_3\left(t,x,y,z\right) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$$



Omogeneità dello Spazio-Tempo (VI)

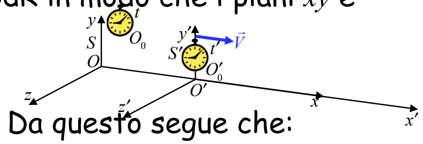
- Se supponiamo che i due SdR coincidano e i loro orologi siano sincronizzati quando $t = t' = 0$ allora i temini b_0, b_1, b_2 e b_3 si annullano e si ha:

$$\begin{cases} t' = f_0\left(t,x,y,z\right) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1\left(t,x,y,z\right) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2\left(t,x,y,z\right) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = f_3\left(t,x,y,z\right) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$



Disposizione degli Assi Cartesiani

- Se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i piani xy e $x'y'$ coincidano, allora si ha che:



$$z = 0 \;\Leftrightarrow\; z' = 0$$

qualsiasi siano i valori di t, x e y. Da questo segue che:

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0$$

$$z' = f_3(t,x,y,z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{33}z$$

- Analogamente, se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i piani xz e $x'z'$ coincidano, allora si ha che:

$$y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' = 0$$

qualsiasi siano i valori di t, x e z. Da questo segue che:

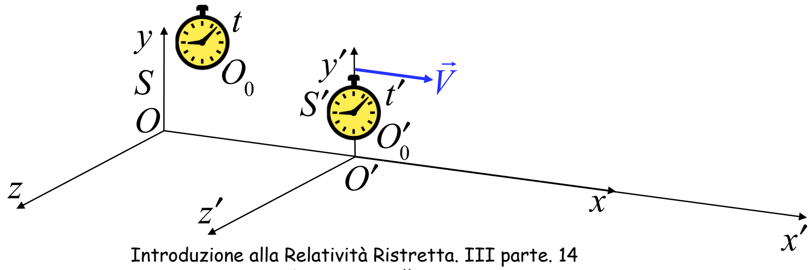
$$a_{20} = a_{21} = a_{23} = 0$$

$$y' = f_2(t,x,y,z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{22}y$$

Disposizione degli Assi Cartesiani (II)

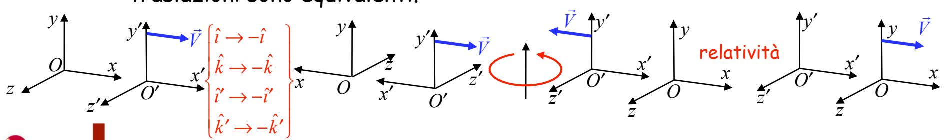
- Avremo quindi:

$$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t,x,y,z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t,x,y,z) = a_{22}y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = a_{33}z \end{cases}$$



Isotropia e Relatività

- Sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente a_{22}.
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi x, z, x' e z'.
  - L'equazione di trasformazione di y non cambia.
  - I ruoli di S e S' risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di 180° attorno all'asse y i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
  - Infine, sostituiamo la traslazione di S' rispetto a S con la traslazione di S rispetto a S' con verso opposto. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.



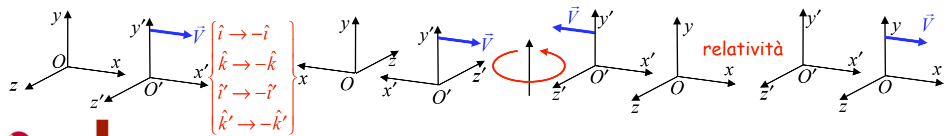
Isotropia e Relatività (II)

- Invertendo contemporaneamente i 4 assi x, z, x' e z':
  - **L'equazione di trasformazione di y non cambia**.
  - Otteniamo così una configurazione che differisce da quella di partenza soltanto per lo **scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici**.
- Insieme alla trasformazione:

$$y' = a_{22}y$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$y = a_{22}y'$$



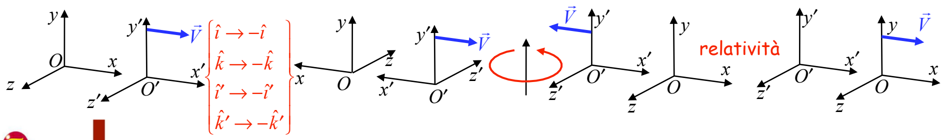
Isotropia e Relatività (III)

- Si ha quindi:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_{22} y \\ y &= a_{22} y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' = a_{22} y = a_{22} a_{22} y'$$

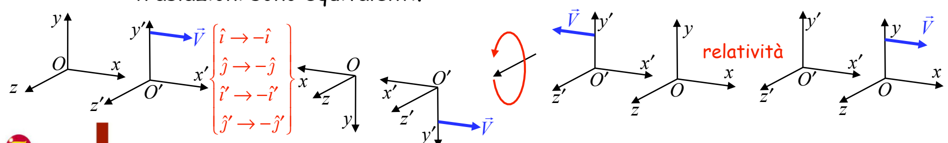
$$a_{22} a_{22} = 1$$

$$a_{22} = 1$$



Isotropia e Relatività (IV)

- Analogamente, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente a_{33}.
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi x, y, x' e y'.
  - L'equazione di trasformazione di z non cambia.
  - I ruoli di S e S' risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di 180° attorno all'asse z i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
  - Infine, sostituiamo la traslazione di S' rispetto a S con la traslazione di S rispetto a S' con verso opposto. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.



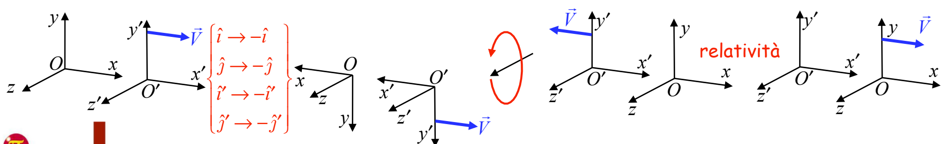
Isotropia e Relatività (V)

- Invertendo contemporaneamente i 4 assi x, y, x' e y':
  - L'equazione di trasformazione di z non cambia.
  - Otteniamo così una configurazione che differisce da quella di partenza soltanto per lo scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici.
- Insieme alla trasformazione:

$$z' = a_{33} z$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$z = a_{33} z'$$



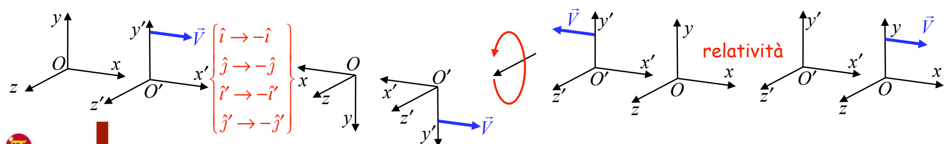
Isotropia e Relatività (VI)

- Si ha quindi:

$$\left.\begin{aligned} z' &= a_{33} z \\ z &= a_{33} z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow z' = a_{33} z = a_{33} a_{33} z'$$

$$a_{33} a_{33} = 1$$

$$a_{33} = 1$$



Isotropia e Relatività (VII)

- Avremo quindi:

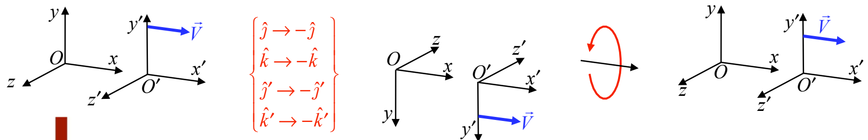
$$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t,x,y,z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$

Isotropia e Relatività (VIII)

- In maniera simile, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio possiamo determinare i coefficienti a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}.
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi y, z, y' e z'.
  - Le equazioni di trasformazione di x e t cambiano nel seguente modo:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$

  - I ruoli di S e S' risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di 180° attorno all'asse x i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.



Isotropia e Relatività (IX)

- Insieme alle trasformazioni:

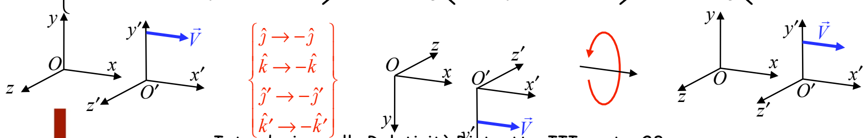
$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases}$$

devono perciò valere anche le trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$

- Sommandole membro a membro:

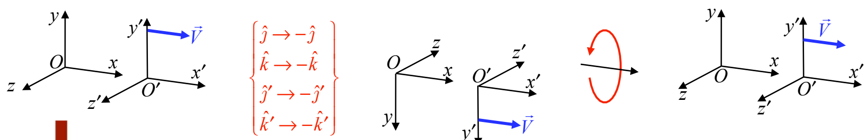
$$\begin{cases} t' + t' = a_{00}t + a_{01}x + \cancel{a_{02}y} + \cancel{a_{03}z} + a_{00}t + a_{01}x - \cancel{a_{02}y} - \cancel{a_{03}z} \\ x' + x' = a_{10}t + a_{11}x + \cancel{a_{12}y} + \cancel{a_{13}z} + a_{10}t + a_{11}x - \cancel{a_{12}y} - \cancel{a_{13}z} \end{cases}$$



Isotropia e Relatività (X)

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t,x,y,z) = a_{10}t + a_{11}x \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$



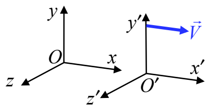
La Velocità Relativa dei Due SdR

- Osserviamo che un punto materiale che sia **in quiete nell'origine** del SdR S' ($x'=0$) nel SdR S deve avere velocità V:

$$x'=0 \iff x=Vt$$

- Sostituendo nelle leggi di trasformazione, otteniamo:

$$x'=a_{10}t+a_{11}x$$
$$0=a_{10}t+a_{11}Vt=\left(a_{10}+a_{11}V\right)t,\ \forall t$$
$$a_{10}+a_{11}V=0$$
$$a_{10}=-a_{11}V$$



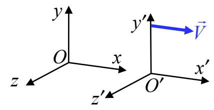
La Velocità Relativa dei Due SdR (II)

- Avremo quindi:

$$a_{10}=-a_{11}V$$
$$x'=a_{10}t+a_{11}x=-a_{11}Vt+a_{11}x=a_{11}\left(x-Vt\right)$$

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t'=f_0\left(t,x,y,z\right)=a_{00}t+a_{01}x \\ x'=f_1\left(t,x,y,z\right)=a_{11}\left(x-Vt\right) \\ y'=f_2\left(t,x,y,z\right)=y \\ z'=f_3\left(t,x,y,z\right)=z \end{cases}$$



Omogeneità, Isotropia e Relatività

- Le leggi di trasformazione:

$$\begin{cases} t'=f_0\left(t,x,y,z\right)=a_{00}t+a_{01}x \\ x'=f_1\left(t,x,y,z\right)=a_{11}\left(x-Vt\right) \\ y'=f_2\left(t,x,y,z\right)=y \\ z'=f_3\left(t,x,y,z\right)=z \end{cases}$$

  sono le **più generali** leggi compatibili con i postulati di **Omogeneità** e **Isotropia** dello spazio e con il Principio di **Relatività**.
  - Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Galileo**.
  - Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Lorentz**.

Trasformazioni di Galileo

- Nelle trasformazioni di **Galileo** il **tempo** è **assoluto**, ovvero non cambia passando da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$t'=t,\ \forall t$$
$$t'=a_{00}t+a_{01}x=t,\ \forall t$$
$$\begin{cases} a_{00}=1 \\ a_{01}=0 \end{cases}$$

- Inoltre le **lunghezze non cambiano** nel passaggio da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$\Delta x'=\Delta x$$
$$\begin{cases} \Delta x'=x_2'-x_1'=a_{11}\left(x_2-\cancel{Vt}\right)-a_{11}\left(x_1-\cancel{Vt}\right)=a_{11}\left(x_2-x_1\right) \\ \Delta x'=\Delta x=x_2-x_1 \end{cases}$$
$$a_{11}=1$$

Trasformazioni di Galileo (II)

- Sostituendo le condizioni:
  $a_{00}=1,\ a_{01}=0,\ a_{11}=1$
  nelle trasformazioni:
  $$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t,x,y,z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$
  otteniamo le **trasformazioni di Galileo**:
  $$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = t \\ x' = f_1(t,x,y,z) = x - Vt \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Galileo (III)

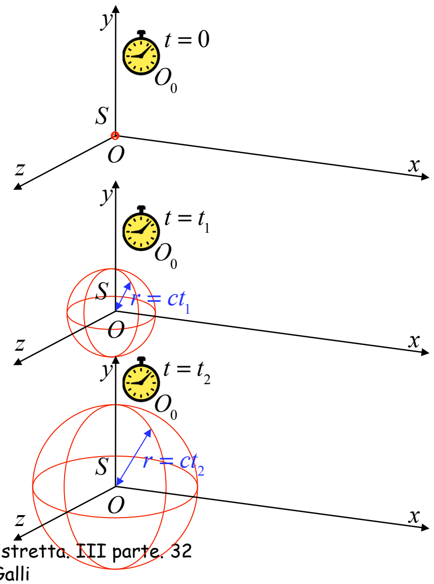
- Nelle trasformazioni di Galileo:
  $$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = t \\ x' = f_1(t,x,y,z) = x - Vt \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$
- Lo **spazio** è **assoluto**:
  - La distanza tra due punti non dipende dal SdR:
- Il **tempo** è **assoluto**:
  - L'intervallo di tempo non dipende dal SdR.

Invarianza della Velocità della Luce

- La relatività di Einstein sostituisce:
  - i vincoli di Galileo sullo spazio-tempo , evidentemente troppo radicali:
    - **spazio assoluto** e **tempo assoluto**.
  - con un altro tipo di vincolo sulle proprietà dello spazio-tempo:
    - l'**invarianza della velocità della luce**.
- Dovremo imporre questa condizione alle trasformazioni generiche:
  $$\begin{cases} t' = f_0(t,x,y,z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t,x,y,z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t,x,y,z) = y \\ z' = f_3(t,x,y,z) = z \end{cases}$$

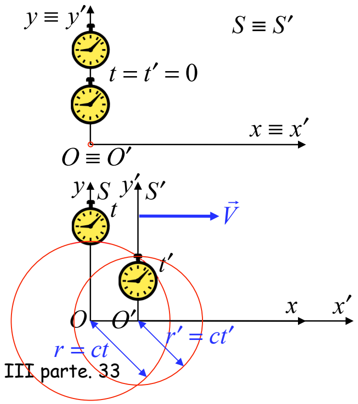
Fronte d'Onda Sferico

- Consideriamo un'**onda sferica** di luce prodotta da una **sorgente puntiforme**.
- Consideriamo un fronte d'onda che all'istante $t=0$ ha raggio $r=0$.
- Il fronte d'onda è una superficie sferica il cui raggio aumenta con il tempo:
  $$r(t) = ct$$
  $$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)} = ct$$
  $$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t) = c^2t^2$$



Invarianza della Velocità della Luce

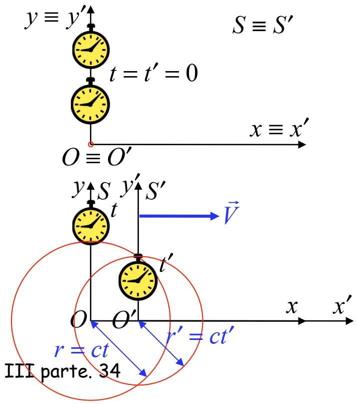
- Supponiamo ora che il fronte d'onda sferico abbia raggio $r=0$ nell'istante $t=t'=0$ in cui i due SdR S e S' sono sovrapposti.
- Per l'invarianza della velocità della luce:
  - Nel **SdR S** il fronte d'onda è una superficie sferica di **centro O** e **raggio crescente $r=ct$**.
  - Nel **SdR S'** il fronte d'onda è ancora una superficie sferica di **centro O'** e **raggio crescente $r'=ct'$**.



Invarianza della Velocità della Luce (II)

- Per l'invarianza della velocità della luce dovranno perciò valere, simultaneamente, le due relazioni:

$$\begin{cases} r^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2t^2 \\ r'^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2t'^2 \end{cases}$$



Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2t^2 \\ r'^2(t') = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2t'^2 \end{cases}$$

- Sostituiamo nella seconda relazione le variabili con gli apici ottenute dalle trasformazioni generiche:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{11}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ a_{11}^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{00}t + a_{01}x)^2 \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (II)

- Sviluppiamo e raccogliamo le variabili:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ a_{11}^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{00}t + a_{01}x)^2 \end{cases}$$

$$a_{11}^2x^2 + a_{11}^2V^2t^2 - 2a_{11}^2Vtx + y^2 + z^2 = c^2a_{00}^2t^2 + c^2a_{01}^2x^2 + 2c^2a_{00}a_{01}tx$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ (a_{11}^2 - c^2a_{01}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(Va_{11}^2 + c^2a_{00}a_{01})tx = (c^2a_{00}^2 - V^2a_{11}^2)t^2 \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (III)

- Confrontando termine a termine le due relazioni (debbono essere equivalenti $\forall (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$):

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \\ \left(a_{11}^2-c^2a_{01}^2\right)x^2+y^2+z^2-2\left(Va_{11}^2+c^2a_{00}a_{01}\right)tx=\left(c^2a_{00}^2-V^2a_{11}^2\right)t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}^2-c^2a_{01}^2=1 \\ Va_{11}^2+c^2a_{00}a_{01}=0 \\ c^2a_{00}^2-V^2a_{11}^2=c^2 \end{cases}$$

- Da questo sistema possiamo ricavare le 3 incognite a_{00}, a_{01} e a_{11}.

Trasformazioni di Lorentz (IV)

$$\begin{cases} a_{11}^2-c^2a_{01}^2=1 \\ Va_{11}^2+c^2a_{00}a_{01}=0 \\ c^2a_{00}^2-V^2a_{11}^2=c^2 \end{cases}$$

- Ricaviamo a_{01} dalla seconda e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} a_{11}^2-c^2\left(-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}}\right)^2=1 \Rightarrow a_{11}^2-\dfrac{V^2a_{11}^4}{c^2a_{00}^2}=1 \Rightarrow c^2a_{00}^2a_{11}^2=V^2a_{11}^4+c^2a_{00}^2 \\ a_{01}=-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}} \\ c^2a_{00}^2=V^2a_{11}^2+c^2 \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (V)

$$\begin{cases} c^2a_{00}^2a_{11}^2=V^2a_{11}^4+c^2a_{00}^2 \\ a_{01}=-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}} \\ c^2a_{00}^2=V^2a_{11}^2+c^2 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo ambo i membri della III per ${a_{11}}^2$ e sottraendola dalla I:

$$\begin{cases} c^2a_{00}^2a_{11}^2=V^2a_{11}^4+c^2a_{00}^2 \\ a_{01}=-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}} \\ c^2a_{00}^2a_{11}^2=V^2a_{11}^4+c^2a_{11}^2 \Rightarrow a_{00}^2-a_{11}^2=0 \Rightarrow a_{00}=\pm a_{11} \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (VI)

$$\begin{cases} c^2a_{00}^2a_{11}^2=V^2a_{11}^4+c^2a_{00}^2 \\ a_{01}=-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}} \\ a_{00}=\pm a_{11} \end{cases}$$

- Sostituendo a_{00} ricavato dalla III nella I:

$$\begin{cases} c^2a_{11}^4=V^2a_{11}^4+c^2a_{11}^2 \Rightarrow \left(c^2-V^2\right)a_{11}^4-c^2a_{11}^2=0 \Rightarrow \left(c^2-V^2\right)a_{11}^2-c^2=0 \\ a_{01}=-\dfrac{Va_{11}^2}{c^2a_{00}} \\ a_{00}=\pm a_{11} \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (VII)

- Infine sostituendo:

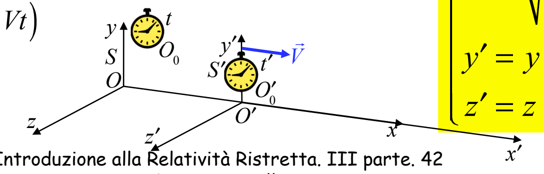
$$\begin{cases} \left(c^2 - V^2\right) a_{11}^2 = c^2 \;\Rightarrow\; a_{11}^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - V^2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \;\Rightarrow\; a_{11} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} = -\dfrac{V a_{11}^2}{c^2 a_{00}} = \mp \dfrac{V a_{11}}{c^2} = \mp \dfrac{V}{c^2} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

- Dove scegliamo i segni superiori per avere gli assi x e x' e gli assi t e t' concordi.

Trasformazioni di Lorentz (VIII)

- Sostituendo ora i parametri ottenuti nelle trasformazioni generiche si ottiene infine:

$$\begin{cases} a_{00} = a_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} = -\dfrac{V}{c^2} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} t' = a_{00} t + a_{01} x \\ x' = a_{11}\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{cases} t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}}$$



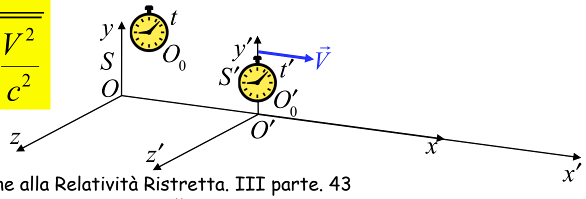
Trasformazioni di Lorentz (IX)

- Per semplificare le formule spesso si indica con β il cosiddetto **parametro di velocità**, ovvero la velocità misurata in un sistema naturale di unità di misura in cui $c = 1$:

$$\boxed{\beta = \frac{V}{c}}$$

e con γ il cosiddetto **fattore di Lorentz**:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}}$$

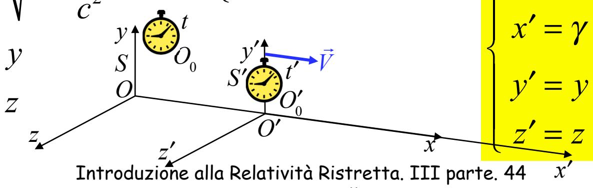


Trasformazioni di Lorentz (X)

- Utilizzando questi simboli si può scrivere:

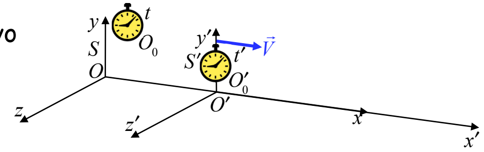
$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{V}{c} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2} x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}}$$

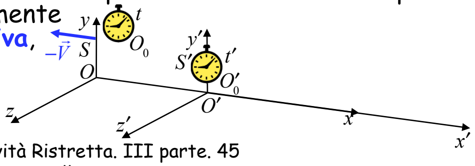


Trasformazioni Inverse

- Si possono ottenere **invertendo** le precedenti trasformazioni:
  - Ovvero ricavando le 4 variabili senza apici t, x, y e z in funzione delle 4 variabili con apici t', x', y' e z' dalle precedenti relazioni.
  - Si tratta in questo caso di risolvere un sistema di 4 equazioni in 4 incognite di I grado.
- Si possono anche ottenere, più semplicemente, applicando il **principio di relatività**:
  - **reciprocità** del moto relativo dei due SdR:
    - Se S si muove rispetto a S' con velocità V allora S' si muove rispetto a S con velocità $-V$.



  - **scambiando** tra loro coordinate **con** apici e coordinate **senza** apici e **invertendo** contemporaneamente il **verso della velocità relativa**, si devono ottenere relazioni altrettanto valide.



Trasformazioni Inverse (II)

- Si ha quindi:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Il Principio di Corrispondenza

- Einstein comprese che le **regole** con cui le leggi della natura si **trasformano** nel passaggio da un SdR all'altro hanno origine unicamente nelle **proprietà dello spazio-tempo**:
  - Devono quindi essere uguali per **tutti** i fenomeni:
    - **Meccanici** ed **elettromagnetici**.
- D'altro canto le **trasformazioni di Galileo** avevano ottenuto un **ottimo accordo sperimentale** con la **meccanica** dei corpi macroscopici con velocità molto inferiori alla velocità della luce (**dominio di applicabilità** delle trasformazioni di Galileo).
- Affinché le trasformazioni di Lorentz mantengano l'**accordo sperimentale** delle trasformazioni di Galileo nel loro dominio di applicabilità è necessario che esse **si riducano alle trasformazioni di Galileo nel limite** $V << c$.

Il Principio di Corrispondenza (II)

- È chiaro che nel limite $V << c$ si ha:

$$\beta = \frac{V}{c} \xrightarrow[V \ll c]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{c^2} \xrightarrow[V \ll c]{} 0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow[V \ll c]{} 1$$

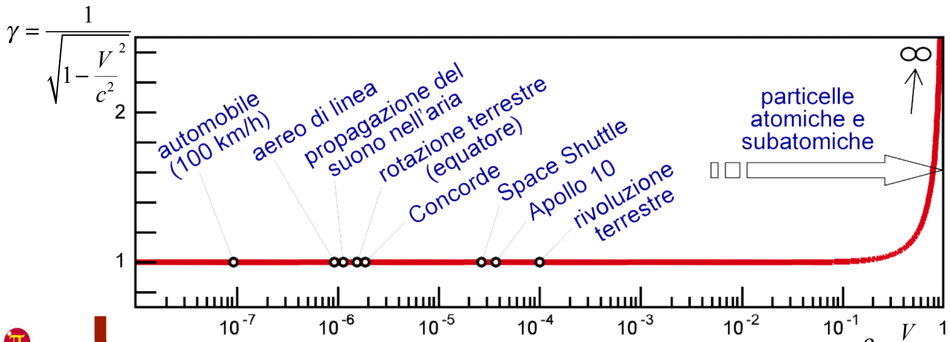
e dunque, come atteso:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow[V \ll c]{} \begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Lorentz **Galileo**

Il Principio di Corrispondenza (III)

- **Deviazione** delle previsioni della relatività di **Einstein** da quella di **Galileo** all'aumentare della velocità del moto:
  - Dipendenza del **fattore di Lorentz** γ dal **parametro di velocità** β.



La Velocità Limite

- Nelle trasformazioni di Lorentz il **fattore di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

diverge per $V \to c$ e **non** è **reale** per $V > c$:

$$\lim_{V\to c} \gamma = \infty$$

$$V > c \quad \Rightarrow \quad \gamma \notin \mathbb{R}$$

- Questo pone un limite superiore per il modulo della velocità di traslazione reciproca dei SdR.

$$V < c$$

Trasformazioni delle Velocità

- Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \qquad x' = \gamma\left(x - Vt\right), \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

si ottiene:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma\left(x-Vt\right)}{\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)} = \frac{x-Vt}{t-\frac{V}{c^2}x} = \frac{\frac{x}{t}-V}{1-\frac{V}{c^2}\frac{x}{t}} = \frac{v_x - V}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)} = \frac{1}{\gamma}\frac{y}{t}\frac{1}{1-\frac{V}{c^2}\frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

$$v'_z = \frac{z'}{t'} = \frac{z}{\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)} = \frac{1}{\gamma}\frac{z}{t}\frac{1}{1-\frac{V}{c^2}\frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

Trasformazioni delle Velocità (II)

- Otteniamo quindi le leggi di trasformazione delle velocità:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1-\dfrac{V}{c^2}v_x} \\[2ex] v'_y = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v_y}{1-\dfrac{V}{c^2}v_x} \\[2ex] v'_z = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v_z}{1-\dfrac{V}{c^2}v_x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1+\dfrac{V}{c^2}v'_x} \\[2ex] v_y = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v'_y}{1+\dfrac{V}{c^2}v'_x} \\[2ex] v_z = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v'_z}{1+\dfrac{V}{c^2}v'_x} \end{cases}$$

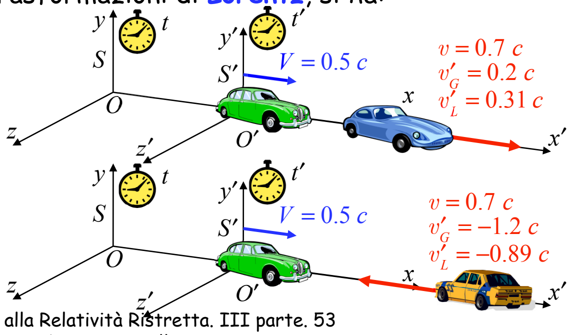
Trasformazioni delle Velocità (II)

- Nell'**esempio** in figura le due auto si muovono con velocità $0.5\,c$ e $0.7\,c$ nel SdR della strada.
- La velocità di un'auto rispetto all'altra, con le trasformazioni di **Galileo**, sarebbe:

$$v'_G = v - V = \pm 0.7c - 0.5c = \begin{cases} 0.2c \\ -1.2c < -c \end{cases}$$

- Utilizzando invece le trasformazioni di **Lorentz**, si ha:

$$v'_L = \frac{v-V}{1-\frac{V}{c^2}v} = \frac{\pm 0.7c - 0.5c}{1-\frac{0.5c}{c^2}(\pm 0.7c)} = \begin{cases} 0.31c \\ -0.89c \end{cases}$$



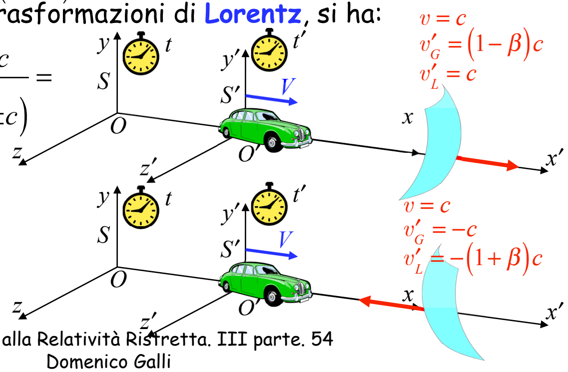
Trasformazioni delle Velocità (III)

- Nell'**esempio** in figura l'auto si muove con velocità βc nel SdR della strada.
- La velocità dell'onda rispetto all'auto, con le trasformazioni di **Galileo**, sarebbe:

$$v'_G = v - V = \pm c - \beta c = \begin{cases} (1-\beta)c \\ -(1+\beta)c < -c \end{cases}$$

- Utilizzando invece le trasformazioni di **Lorentz**, si ha:

$$v'_L = \frac{v-V}{1-\frac{V}{c^2}v} = \frac{\pm c - \beta c}{1-\frac{\beta c}{c^2}(\pm c)} = \frac{(\pm 1-\beta)c}{1\mp\beta} = \begin{cases} c \\ -c \end{cases}$$



Trasformazioni delle Velocità (IV)

- La velocità del fronte d'onda **vale dunque sempre** c nella meccanica relativistica,
  - qualsiasi sia β,
  - cioè in qualsiasi sistema di riferimento in moto rispetto a S.
- La **velocità della luce nel vuoto** rappresenta quindi un **limite**:
  - non può essere oltrepassato nemmeno componendo tra di loro velocità prossime o uguali a quelle della luce.