FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Dinamica Relativistica

Relatività, Energia e Ambiente

Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 23 maggio 2011

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

La Generalizzazione Relativistica delle Leggi della Meccanica

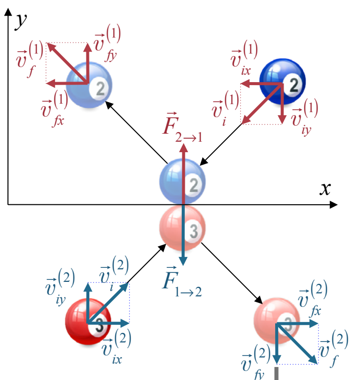
- **Principio d'inerzia** ereditato dalla meccanica classica:
  - Definisce la classe dei **SdR inerziali** e ne postula l'**esistenza**.
- **Covarianza** rispetto alle **trasformazioni di Lorentz**:
  - La nuova legge così soddisferà, automaticamente, il **principio di relatività** ed il postulato dell'**invarianza della velocità della luce**.
- Validità del **principio di corrispondenza**:
  - **Grandezze** e le **leggi fisiche**, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel **limite di velocità piccole** rispetto a quella della luce.

Conservazione della Quantità di Moto

- Consideriamo l'**urto elastico** in figura tra due sfere di **uguale massa** m.
- Consideriamo un **SdR** S in cui le **due sfere** abbiano **inizialmente velocità opposte**:

$$\vec{v}_i^{(1)} = -\vec{v}_i^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

- Quando le due sfere **urtano**, **per i loro centri** passa una **retta parallela all'asse** y.
- La **forza d'urto** F è perciò **parallela all'asse** y.
- Nell'urto **si invertono** perciò le **componenti** y **delle velocità**, mentre le **componenti** x restano **invariate**.



Conservazione della Quantità di Moto (II)

- In termini matematici:

$$\begin{cases} \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_f^{(1)} = -a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_f^{(2)} = a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

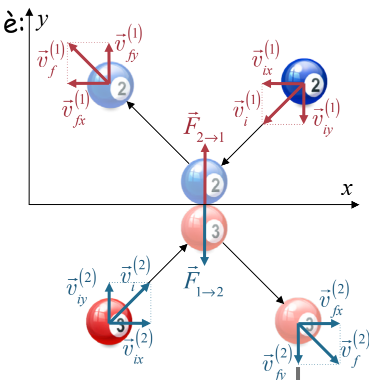
- La quantità di moto totale prima dell'urto è:

$$\vec{Q}_i = m\vec{v}_i^{(1)} + m\vec{v}_i^{(2)} = = m\left[-a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

- Mentre dopo l'urto è:

$$\vec{Q}_f = m\vec{v}_f^{(1)} + m\vec{v}_f^{(2)} = = m\left[-a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

- Dunque la **quantità di moto si conserva** nell'urto.



Trasformazioni di Galileo

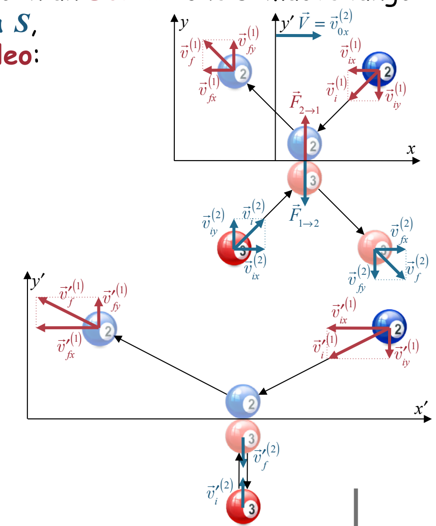
- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto in un **SdR S'** che si muove lungo l'asse x, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = v^{(1)}_{ix} - V = -a - a = -2a \\ v'^{(1)}_{iy} = v^{(1)}_{iy} = -b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{ix} = v^{(2)}_{ix} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = v^{(2)}_{iy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = v^{(1)}_{fx} - V = -a - a = -2a \\ v'^{(1)}_{fy} = v^{(1)}_{fy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = v^{(2)}_{fx} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = v^{(2)}_{fy} = -b \end{cases}$$



Trasformazioni di Galileo (II)

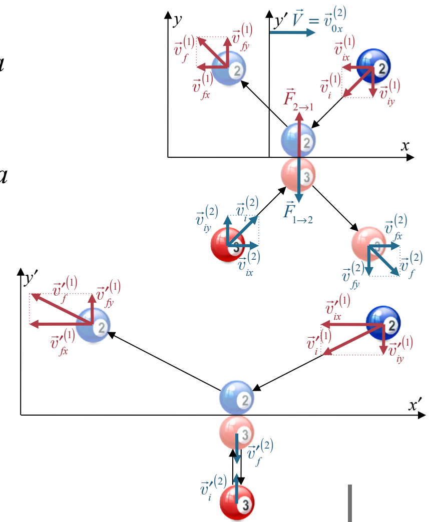
- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = mv'^{(1)}_{ix} + mv'^{(2)}_{ix} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{iy} = mv'^{(1)}_{iy} + mv'^{(2)}_{iy} = -mb + mb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{fx} = mv'^{(1)}_{fx} + mv'^{(2)}_{fx} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{fy} = mv'^{(1)}_{fy} + mv'^{(2)}_{fy} = +mb - mb = 0 \end{cases}$$

- Confrontando:

$$\left.\begin{aligned} Q'_{ix} &= Q'_{fx} \\ Q'_{iy} &= Q'_{fy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{Q}'_i = \vec{Q}'_f$$

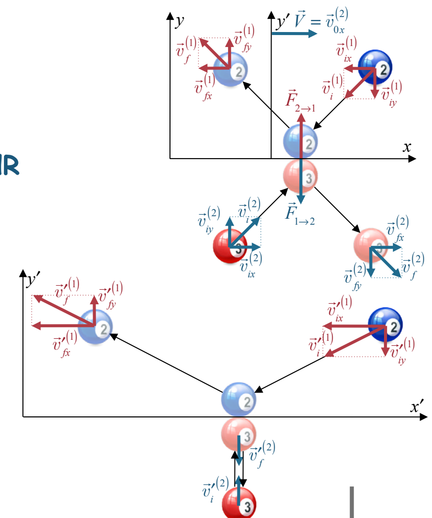


Trasformazioni di Galileo (III)

- La **quantità di moto "classica" si conserva** nell'urto anche nel **SdR S'**.
- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

si conserva nell'urto **in entrambi i SdR** considerati.



Trasformazioni di Lorentz

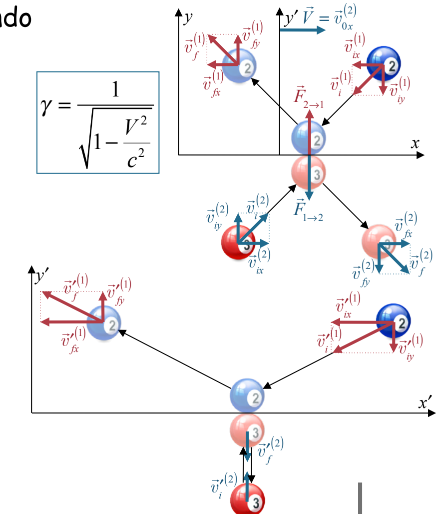
$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto nel **SdR S'** che si muove, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = \dfrac{v^{(1)}_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{ix}} = \dfrac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'^{(1)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(1)}_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{ix}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{ix} = \dfrac{v^{(2)}_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{ix}} = \dfrac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2}a} = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(2)}_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{ix}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a}{c^2}a} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$



Trasformazioni di Lorentz (II)

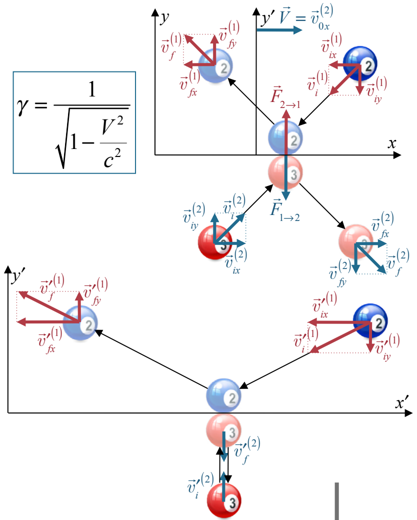
$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

- Analogamente, per le **velocità finali**:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{v^{(1)}_{fx} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{-a-a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v^{(1)}_{fy}}{1 - \frac{V}{c^2} v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = \dfrac{v^{(2)}_{fx} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{a-a}{1 - \frac{a}{c^2} a} = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v^{(2)}_{fy}}{1 - \frac{V}{c^2} v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \frac{a}{c^2} a} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Trasformazioni di Lorentz (III)

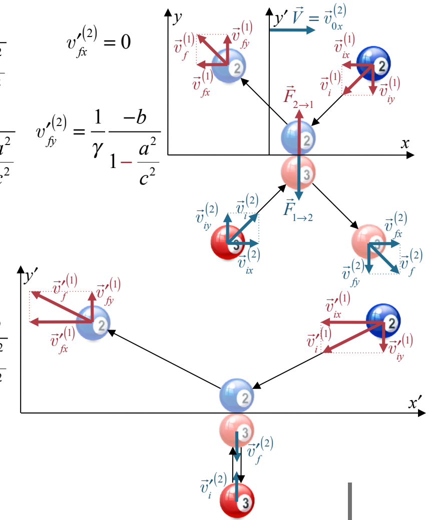
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = \dfrac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{ix} = 0 \\ v'^{(1)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fx} = 0 \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = \dfrac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = \dfrac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Trasformazioni di Lorentz (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

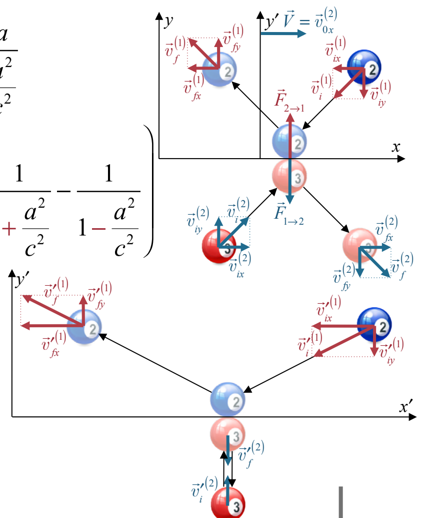
- Da cui:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\dfrac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \dfrac{mb}{\gamma} \left(-\dfrac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = -\dfrac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{fy} = \dfrac{mb}{\gamma} \left(\dfrac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} - \dfrac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases}$$

- Perciò:

$$\left. \begin{array}{l} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} \neq Q'_{fy} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{Q}'_i \neq \vec{Q}'_f$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



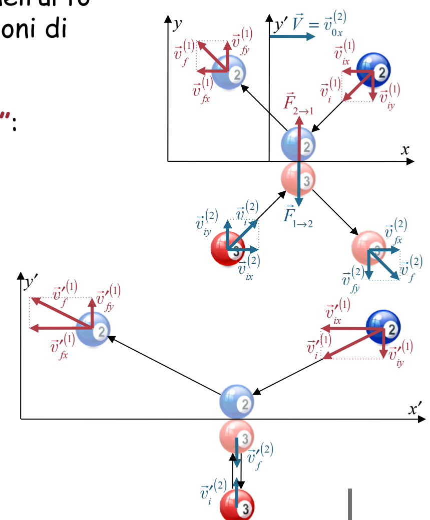
Trasformazioni di Lorentz (V)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La quantità di moto **non si conserva** nell'urto nel **SdR S'**, utilizzando le trasformazioni di Lorentz.
- Dunque **la quantità di moto "classica"**:

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

si conserva nell'urto nel **SdR S** ma **non** nel **SdR S'**, se si utilizzano le **trasformazioni di Lorentz** per passare da un SdR all'altro.



Quantità di Moto Relativistica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per far sì che il **principio di conservazione della quantità di moto** sia **valido in tutti i SdR** è necessario **ri-definire** la quantità di moto.
- Cerchiamo allora una **nuova definizione** di **quantità di moto** che:
  - Sia **invariante per trasformazioni di Lorentz**;
  - **Si riduca all'espressione classica** nel **limite** $v << c$ (principio di corrispondenza).
- Occorre che la **componente y della quantità di moto** sia **indipendente** dalla **componente x della velocità** del SdR in cui si osserva l'urto.

Quantità di Moto Relativistica (II)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La componente y della quantità di moto classica si scrive, per un singolo punto materiale:

$$Q_y^{(\text{classica})} = mv_y = m\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

- Il numeratore **Δy non cambia** passando a un SdR in moto relativo lungo x, mentre **cambia Δt**.
- Potremmo allora prendere il **tempo proprio τ invece del tempo t**, perché $\Delta\tau$ **non cambia**:

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$Q_y^{(\text{relativistica})} = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = m\gamma\frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Quantità di Moto Relativistica (III)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}}$$

- Definiamo quindi la **quantità di moto relativistica**:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta}$$

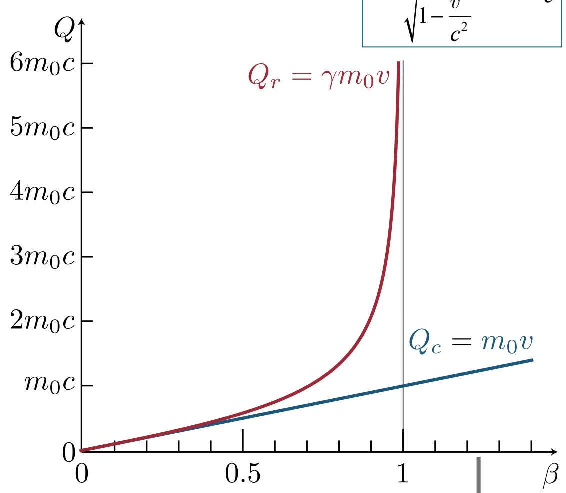
- Poiché risulta:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow[v \ll c]{} 1$$

si ha:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} \xrightarrow[v \ll c]{} m\vec{v}$$

- Dunque il **principio di corrispondenza** è **soddisfatto**.



Quantità di Moto Relativistica (IV)

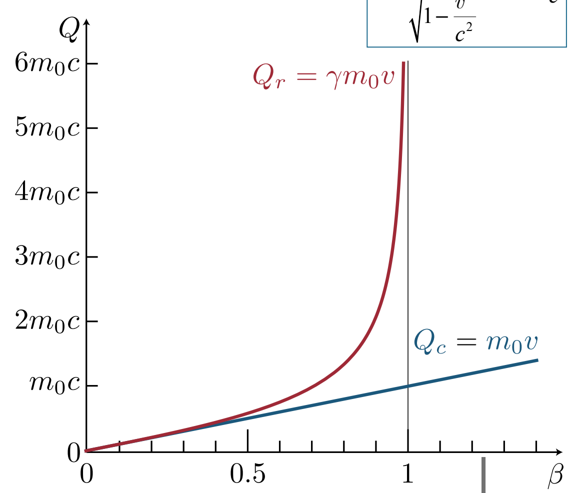
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}}$$

- La **quantità di moto relativistica** così definita:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta}$$

si conserva negli **urti** in **tutti** i **SdR inerziali**.



Massa Relativistica

- Possiamo anche esprimere la quantità di moto relativistica (detta m_0 la "**massa classica**") come:

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

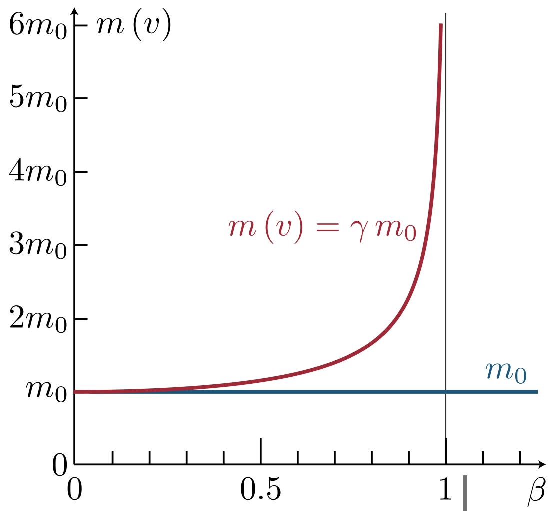
come:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v}$$

dove la quantità:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

è detta **massa relativistica**.



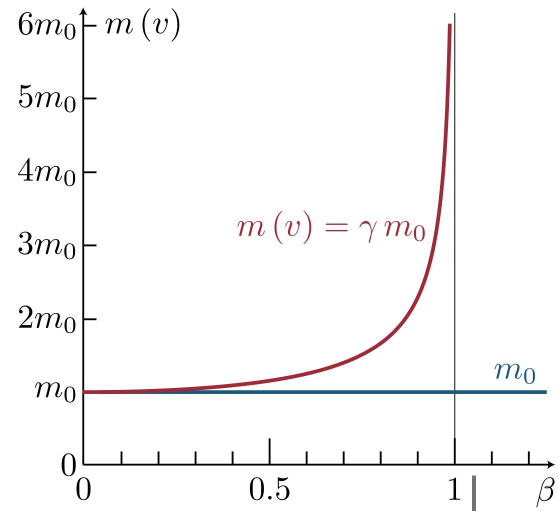
Massa Relativistica (II)

- Nell'espressione della **massa relativistica**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

la "massa classica" m_0 è anche la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

- La massa m_0 è perciò detta **massa a riposo** o **massa invariante**:
  - È invariante per trasformazioni di Lorentz in quanto, **per definizione**, è la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

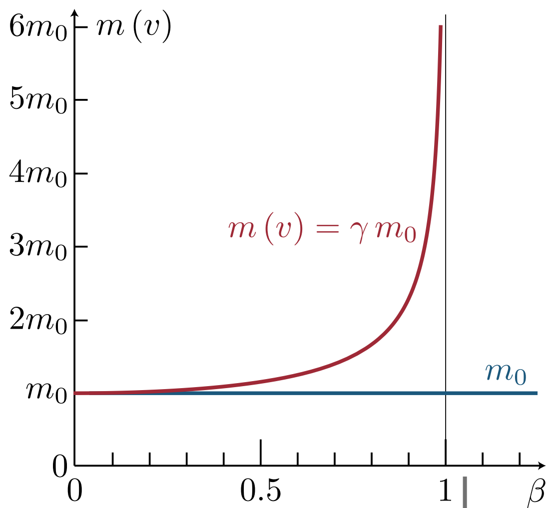


Massa Relativistica (III)

- L'**aumento relativistico della massa**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

  - È stato **verificato** in vari **esperimenti** di deflessione di elettroni;
  - È **verificato** inoltre nel funzionamento di tutti gli **acceleratori di particelle**.



Il Secondo Principio della Dinamica

- Il **Secondo Principio della Dinamica**, detto anche **Legge di Newton**, si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \qquad \vec{Q} = m\vec{v}$$

- In **meccanica classica** (essendo m **costante**) si può scrivere anche nella forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- In **meccanica relativistica** è necessario considerare la **dipendenza della massa dalla velocità**:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(v)\vec{v}\right] = m(v)\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v} = m(v)\vec{a} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v}$$

per cui **forza** e **accelerazione non** hanno più la **stessa direzione**.

Il Secondo Principio della Dinamica (II)

- Utilizzando la **massa a riposo m_0**, si può scrivere:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m_0 \vec{v}\right) = m_0\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m_0\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}v^2 &= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \\ &= \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \\ &= \vec{v}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{v} = \\ &= 2\vec{v}\cdot\vec{a}\end{aligned}}$$

- Calcolando la derivata di γ si ha:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{c^2}2\vec{v}\cdot\vec{a}\right) =$$

$$= \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

Il Secondo Principio della Dinamica (III)

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}}$$

- Avremo quindi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m_0\vec{v}\right) = m_0\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right) = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

- Infine:

$$\vec{F} = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

- La forza ha una **componente parallela all'accelerazione** e una **componente parallela alla velocità**.

Energia Relativistica

- Consideriamo l'identità matematica:

$$1 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \underbrace{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\gamma^2} - \underbrace{\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\beta^2\gamma^2} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

- La quantità $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2$ è un **invariante per trasformazioni di Lorentz**, essendo sempre uguale a 1.
- Moltiplicando la ambo i membri della relazione $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ per $m_0{}^2c^4$ (pure **invariante per trasformazioni di Lorentz**) si ottiene:

$$m_0^2c^4\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m_0^2c^4$$

Energia Relativistica (II)

- Ricordando che $Q = \gamma m_0 v = m_0 c\gamma\beta$, ovvero:

$$Q^2 = m_0^2c^2\gamma^2\beta^2$$

si ottiene, per quanto visto:

$$m_0^2c^4\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m_0^2c^4$$

$$m_0^2c^4\gamma^2 - m_0^2c^4\beta^2\gamma^2 = m_0^2c^4$$

$$m_0^2c^4\gamma^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 + \frac{1}{2}x}$$

- Consideriamo ora nel primo termine la quantità $\gamma m_0 c^2$. Nel **limite non relativistico $v << c$** si ha:

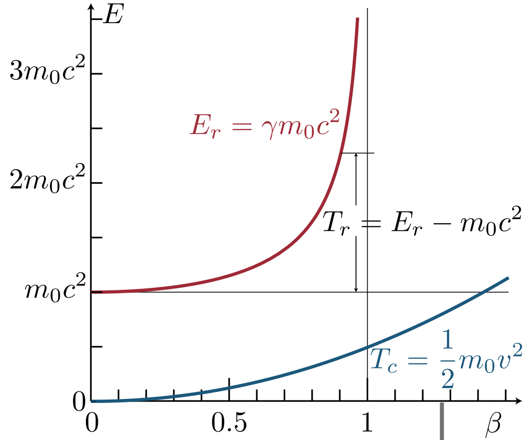
$$\gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \qquad (v \ll c)$$

Energia Relativistica (III)

$$\gamma m_0 c^2 \simeq m_0 c^2 + \overbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}^{T_c} \qquad (v \ll c)$$

- Nel **II termine** riconosciamo l'**energia cinetica classica** T_c.
- Possiamo allora definire l'**energia totale relativistica** come:

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$



Energia Relativistica (IV)

- Potremo scrivere la precedente identità invariante:

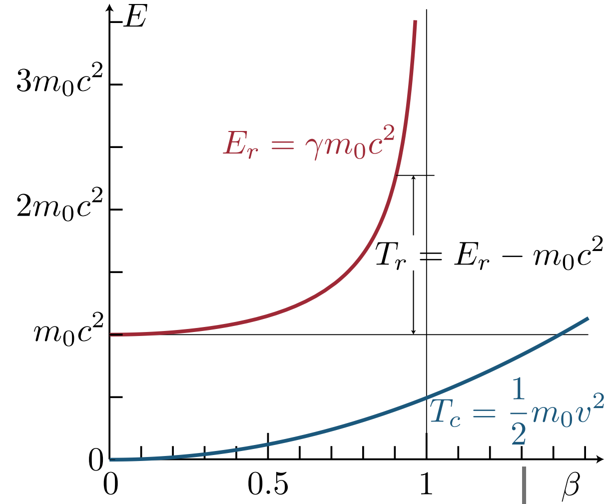
$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

come:

$$\boxed{E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4}$$

- Essendo il II membro invariante per trasformazioni di Lorentz, anche il **I membro è invariante**:

$$E'^2 - Q'^2 c^2 = E^2 - Q^2 c^2$$



Energia Relativistica (V)

- I 3 termini dell'equazione:

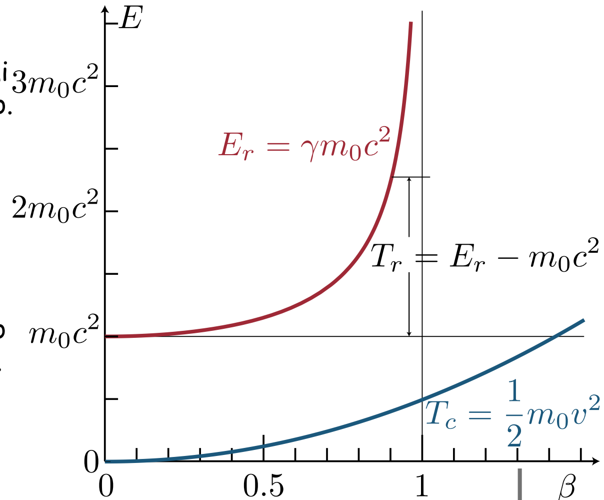
$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

hanno tutti le dimensioni di un'energia al quadrato.

- Il termine:

$$E_0 = m_0 c^2$$

è l'**energia** che il corpo possiede quando la sua **velocità è nulla**. È detto perciò **energia a riposo**.



Energia Relativistica (VI)

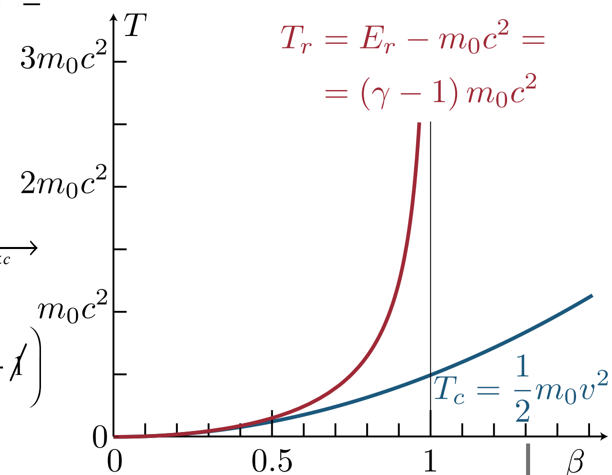
- L'**energia cinetica relativistica** si può scrivere come:

$$T_r = E - E_0 = E - m_0 c^2 =$$
$$= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 =$$
$$= (\gamma - 1) m_0 c^2$$

- Come abbiamo visto:

$$T_r = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \xrightarrow[v \ll c]{}$$
$$\xrightarrow[v \ll c]{} m_0 c^2 \left(\cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \cancel{1} \right)$$
$$T_r \xrightarrow[v \ll c]{} T_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$$T_r = E_r - m_0 c^2 =$$
$$= (\gamma - 1) m_0 c^2$$



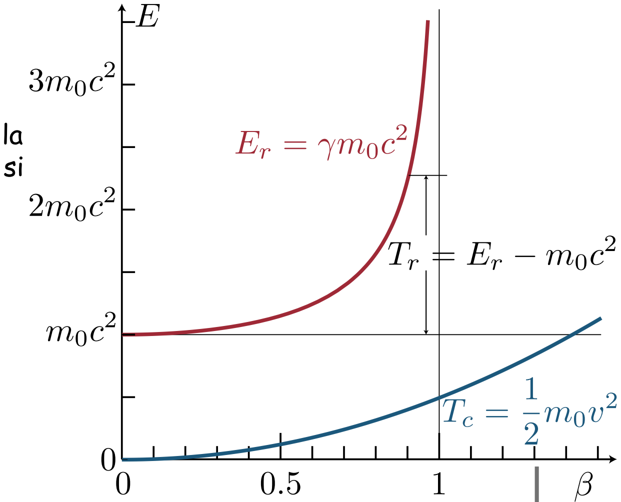
Energia Relativistica (VII)

- Si osservi inoltre che, dalle 2 definizioni:

$$\begin{cases} \vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda e ricavando Q si ottiene:

$$\vec{Q} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$



Energia Relativistica (VIII)

- Un corpo in **quiete** possiede un'energia **non nulla**:
  - Meccanica classica: l'energia è definita a meno di una **costante additiva arbitraria**.
  - La **relatività fissa** il valore di tale **costante** attribuendole un significato ben definito:
    - Quantità di **energia contenuta nella massa** del corpo.
- Una parte dell'**energia a riposo**, o tutta, può **trasformarsi** in energia cinetica o in un'altra forma di energia.
- **Nuova legge di conservazione**:
  - **Generalizza** le due leggi classiche di conservazione:
    - Massa;
    - Energia meccanica.

Conservazione dell'Energia Relativistica

- Nella **Fisica Classica** l'**energia meccanica** si conserva.
- Nella **Chimica Classica** si conserva la **massa** (**legge di Lavoisier**).
- Nella **Fisica Relativistica massa** ed **energia meccanica** possono **non conservarsi**:
  - È possibile **conversione** di massa in energia o viceversa.
- Tuttavia si conserva la **somma dell'energia meccanica e della massa** (quest'ultima moltiplicata per c^2).

Conservazione dell'Energia Relativistica (II)

- Nei processi (relativistici) tra **nuclei** o **particelle** subnucleari le **trasformazioni di massa in energia cinetica** avvengono continuamente:
  - P. es., una particella può decadere in due particelle più leggere (somma masse < massa madre) e più veloci:
    - Parte della **massa** della particella madre si è trasformata in **energia cinetica**.
  - Viceversa facendo scontrare 2 protoni ad altissima energia in un acceleratore di particelle si possono **ottenere particelle di massa molto superiore** alla somma delle masse dei 2 protoni:
    - Parte dell'**energia cinetica** si è trasformata in **massa**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia

- Vogliamo ora trovare **come cambiano quantità di moto ed energia** nel **passaggio da un SdR inerziale a un altro**.
- Abbiamo definito la **quantità di moto relativistica** come:

$$Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

- Inoltre, dalle definizioni di energia e tempo proprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (II)

- Dalle espressioni:

$$E = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \quad Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

considerando che m_0, c e $\Delta\tau$ sono **invarianti** per **trasformazioni di Lorentz**, si vede che le 4 grandezze:

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right) = \frac{m_0}{\Delta \tau}\left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) \propto \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \Delta \bar{s}$$

si debbono trasformare, per trasformazioni di Lorentz, **come** le grandezze $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, che costituiscono un **quadrivettore**.

- Dunque anche la quaterna ordinata (**4-impulso**):

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right)$$

rappresenta un **quadrivettore** dello **spazio di Minkowsky**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (III)

- Dunque dalle trasformazioni delle coordinate troviamo le trasformazioni di energia e quantità di moto, mediante una sostituzione:

$$\begin{cases} ct \to \frac{E}{c} \\ x \to Q_x \\ y \to Q_y \\ z \to Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q'_x = \gamma\left(Q_x - \beta \frac{E}{c}\right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (IV)

- Avremo inoltre, per la **norma di Minkowski quadrata** del 4-vettore:

$$\boxed{E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4}$$

$$\left\|Q\right\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q_x^2 - Q_y^2 - Q_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q^2 = m_0^2$$

$$\left\|Q\right\|^2 = m_0^2$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (V)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Avremo in conclusione, per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{c} = \gamma\left(\dfrac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q'_x = \gamma\left(Q_x - \beta\dfrac{E}{c}\right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{E}{c} = \gamma\left(\dfrac{E'}{c} + \beta Q'_x\right) \\ Q_x = \gamma\left(Q'_x + \beta\dfrac{E'}{c}\right) \\ Q_y = Q'_y \\ Q_z = Q'_z \end{cases}$$

Altri Quadrivettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Ricordiamo che l'intervallo di **tempo proprio** $\Delta\tau$ di una particella in moto con velocità v (ovvero l'intervallo di tempo misurato nell'SdR in cui la particella è in quiete) si scrive:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

dove Δt è l'intervallo di tempo misurato nel SdR in cui la particella si muove con velocità v.

- Utilizzando l'**intervallo di tempo proprio** $\Delta\tau$ si possono costruire altri quadrivettori (4-vettori):
  - **Tutti** i quadrivettori **si trasformano**, per Trasformazioni di Lorentz, **come** il quadrivettore (ct, x, y, z);
  - Per trovare le leggi di trasformazione è sufficiente sostituire le componenti, come abbiamo fatto per il 4-vettore energia-impulso. $\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right)$

Quadri-Velocità

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La **4-velocità** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct,x,y,z) = \frac{d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt}(ct,x,y,z) = \gamma\frac{d}{dt}(ct,x,y,z) = \left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z\right)$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct,x,y,z) = \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right) = \gamma\left(c, \vec{v}\right)$$

- La 4-velocità è un **4-vettore tangente** alla **linea di universo** nello spazio di Minkowski.
- Si ha inoltre la relazione tra **4-impulso** e **4-velocità**:

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right) = \left(\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}\right) = m_0\gamma\left(c, \vec{v}\right) = m_0\bar{u}$$

Quadri-Velocità (II)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La norma di Minkowski quadrata della **4-velocità**:

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct,x,y,z) = \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right)$$

è data da:

$$\|\bar{u}\|^2 = \gamma^2\left(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) = \gamma^2\left(c^2 - v^2\right) = \gamma^2 c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = c^2\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

$$\|\bar{u}\|^2 = c^2$$

- **Tutti i corpi si muovono** nello **spazio-tempo** alla **velocità della luce**:
  - Un oggetto **in quiete nello spazio si muove comunque nel tempo**;
  - Se un oggetto si muove **più velocemente nello spazio** allora si muove **più lentamente nel tempo** (dilatazione del tempo).

Quadri-Accelerazione

- La **4-accelerazione** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z\right) = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma \vec{v}\right)$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

- Sviluppando si ha:

$$\bar{a} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}c, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_x + \gamma\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_y + \gamma\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_z + \gamma\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_x + \gamma^2 a_x, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_y + \gamma^2 a_y, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_z + \gamma^2 a_z\right) =$$

$$= \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)$$

Quadri-Accelerazione (II)

- Avremo quindi, per la **4-accelerazione** :

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right) = \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)$$

- La 4-accelerazione è il **4-vettore normale** alla **linea di universo**.
- Derivando l'espressione:

$$\left\|\bar{u}\right\|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = c^2$$

rispetto a τ si ha inoltre:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\bar{u} = 0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{u} = 0$$

- I 4-vettori **velocità** e **accelerazione** sono sempre **ortogonali** tra loro.

Quadri-Forza

- La **4-forza** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{F} = \frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{Q} = \gamma m_0\vec{v}\\ E = \gamma m_0 c^2\end{cases}$$

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right)$$

- Data la definizione di Energia e Quantità di Moto relativistica, si ha:

$$\bar{F} = \frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right) = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma m_0 c, \gamma m_0\vec{v}\right) = m_0\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right) = m_0\bar{a}$$

$$\bar{F} = m_0\bar{a}$$

Quadri-Forza (II)

- Si ricordi che, per il **Secondo Principio della Dinamica** si ha, per i 3-vettori:

$$\vec{F} = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right)$$

per cui la potenza (**lavoro per unità di tempo**) si scrive:

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\frac{v^2}{c^2} + m_0\gamma\vec{a}\cdot\vec{v} = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\left[\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right] =$$

$$= m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\left[\frac{v^2}{c^2} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}$$

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La **4-forza** si può scrivere come:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

$$\bar{F} = m_0 \bar{a} = m_0 \left(\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) = \left(m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma^2 \vec{a} \right)$$

- Si ha pertanto:

$$\vec{F} = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma \vec{a}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m_0 \gamma^3 \vec{v}\cdot\vec{a}$$

$$\bar{F} = \left(m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma^2 \vec{a} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma \vec{F} \right)$$

$$\bar{F} = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{F}\cdot\vec{v},\ \gamma \vec{F} \right)$$

- La **componente temporale** della 4-forza è legata al **lavoro** compiuto dalla forza per unità di tempo.

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica