

# Dinamica Relativistica

Relatività, Energia e Ambiente

Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 23 maggio 2011

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Prof. Domenico Galli

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

- **Principio d'inerzia** ereditato dalla meccanica classica:
  - Definisce la classe dei **SdR inerziali** e ne postula l'**esistenza**.
- **Covarianza** rispetto alle **trasformazioni di Lorentz**:
  - La nuova legge così soddisferà, automaticamente, il **principio di relatività** ed il postulato dell'**invarianza della velocità della luce**.
- Validità del **principio di corrispondenza**:
  - **Grandezze** e le **leggi fisiche**, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel **limite di velocità piccole** rispetto a quella della luce.

DOMENICO GALLI - Dinamica Relativistica

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

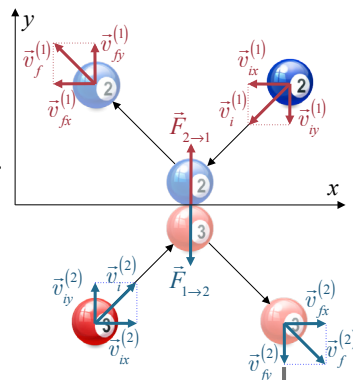
2

## Conservazione della Quantità di Moto

- Consideriamo l'**urto elastico** in figura tra due sfere di **uguale massa  $m$** .
- Consideriamo un **SdR  $S$**  in cui le **due sfere** abbiano **inizialmente velocità opposte**:

$$\vec{v}_i^{(1)} = -\vec{v}_i^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{i} + b\hat{j} \\ \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{i} - b\hat{j} \end{cases}$$

- Quando le due sfere **urtano**, per i loro centri passa una **retta parallela all'asse  $y$** .
- La **forza d'urto  $F$**  è perciò **parallela all'asse  $y$** .
- Nell'urto **si invertono** perciò le **componenti  $y$  delle velocità**, mentre le **componenti  $x$  restano invariate**.



## Conservazione della Quantità di Moto (II)

- In termini matematici:

$$\begin{cases} \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{i} - b\hat{j} & \vec{v}_f^{(1)} = -a\hat{i} + b\hat{j} \\ \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{i} + b\hat{j} & \vec{v}_f^{(2)} = a\hat{i} - b\hat{j} \end{cases}$$

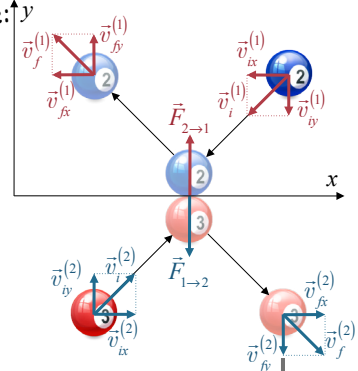
- La **quantità di moto totale prima dell'urto** è:  $\vec{Q}_i$

$$\begin{aligned} \vec{Q}_i &= m\vec{v}_i^{(1)} + m\vec{v}_i^{(2)} = \\ &= m[-a\hat{i} - b\hat{j}] + m[a\hat{i} + b\hat{j}] = \vec{0} \end{aligned}$$

- Mentre dopo l'urto è:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_f &= m\vec{v}_f^{(1)} + m\vec{v}_f^{(2)} = \\ &= m[-a\hat{i} + b\hat{j}] + m[a\hat{i} - b\hat{j}] = \vec{0} \end{aligned}$$

- Dunque la **quantità di moto si conserva nell'urto**.



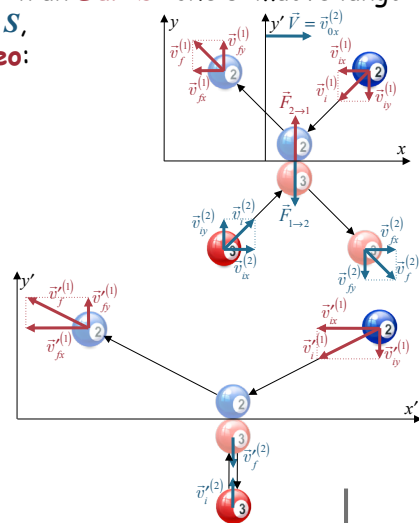
- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto in un **SdR S'** che si muove lungo l'asse  $x$ , con **velocità  $V = a$**  rispetto a  $S$ , utilizzando le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} v'_{ix} = v_{ix} - V = -a - a = -2a \\ v'_{iy} = v_{iy} = -b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{ix} = v^{(2)}_{ix} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = v^{(2)}_{iy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_{fx} = v_{fx} - V = -a - a = -2a \\ v'_{fy} = v_{fy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = v^{(2)}_{fx} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = v^{(2)}_{fy} = -b \end{cases}$$

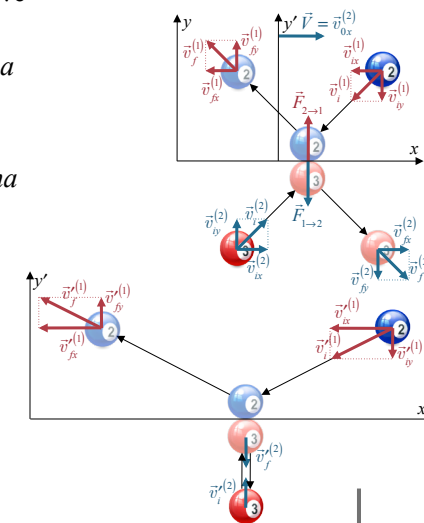


- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = mv'_{ix} + mv'_{ix} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{iy} = mv'_{iy} + mv'_{iy} = -mb + mb = 0 \\ Q'_{fx} = mv'_{fx} + mv'_{fx} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{fy} = mv'_{fy} + mv'_{fy} = +mb - mb = 0 \end{cases}$$

- Confrontando:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} = Q'_{fy} \end{cases} \Rightarrow \vec{Q}'_i = \vec{Q}'_f$$

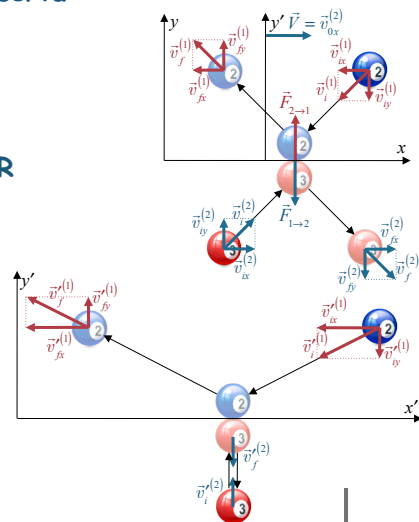


- La **quantità di moto "classica" si conserva** nell'urto anche nel **SdR S'**.

- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

si conserva nell'urto **in entrambi i SdR** considerati.

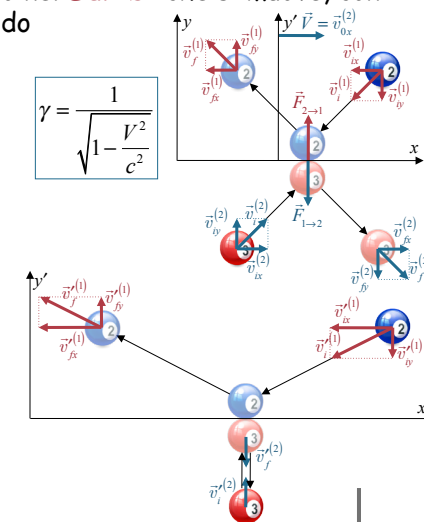


$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}$$

- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto nel **SdR S'** che si muove, con **velocità  $V = a$**  rispetto a  $S$ , utilizzando le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} v'_{ix} = \frac{v_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}} = \frac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'_{iy} = \frac{v_{iy}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}\right)} = \frac{-b}{\gamma \left(1 - \frac{a}{c^2}(-a)\right)} = \frac{-b}{\gamma \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)} \\ v'^{(2)}_{ix} = \frac{v^{(2)}_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v^{(2)}_{ix}} = \frac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2} a} = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = \frac{v^{(2)}_{iy}}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v^{(2)}_{ix}\right)} = \frac{b}{\gamma \left(1 - \frac{a}{c^2} a\right)} = \frac{b}{\gamma \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)} \end{cases}$$

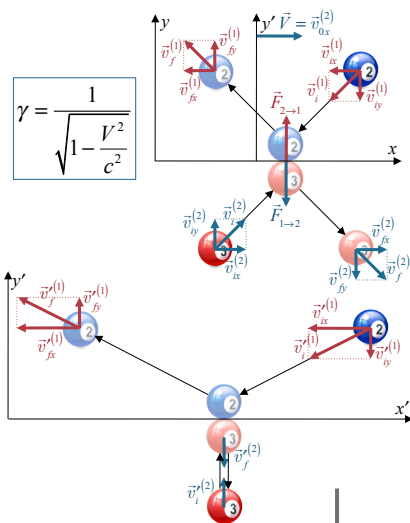
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

• Analogamente, per le **velocità finali**:

$$\begin{cases} v'_{fx} = \frac{v^{(1)} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}} = \frac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{v^{(1)}_y}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'_{fx} = \frac{v^{(2)} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}} = \frac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2}a} = 0 \\ v'_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{v^{(2)}_y}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a}{c^2}a} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$



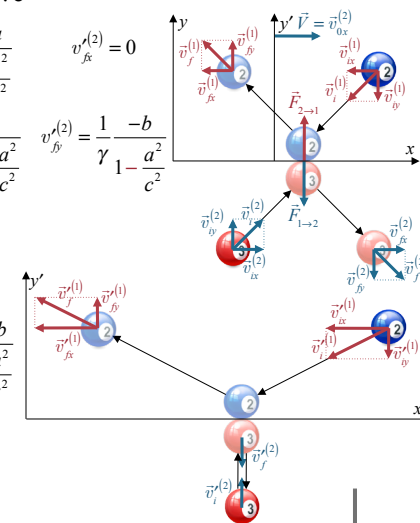
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

• Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fx} = 0 \\ v'^{(1)}_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fx} = 0 \\ v'^{(1)}_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

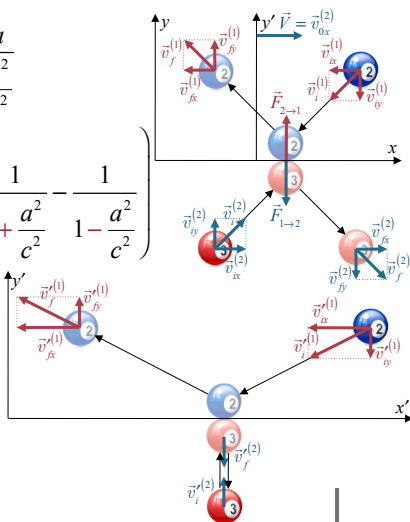
$$\begin{cases} Q'_{ix} = \frac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \frac{1}{\gamma} \frac{-mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{\gamma} \frac{mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} Q'_{fx} = \frac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{fy} = \frac{1}{\gamma} \frac{mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{\gamma} \frac{-mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



• Da cui:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\frac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \frac{mb}{\gamma} \left( -\frac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} Q'_{fx} = -\frac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{fy} = \frac{mb}{\gamma} \left( \frac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases}$$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

• Perciò:

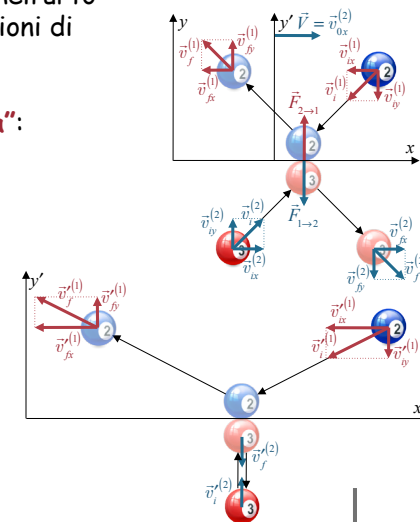
$$\begin{cases} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} \neq Q'_{fy} \end{cases} \Rightarrow \vec{Q}'_i \neq \vec{Q}'_f$$

• La quantità di moto **non si conserva** nell'urto nel **SdR S'**, utilizzando le trasformazioni di Lorentz.

• Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

**si conserva** nell'urto nel **SdR S** ma **non nel SdR S'**, se si utilizzano le **trasformazioni di Lorentz** per passare da un SdR all'altro.



- Per far sì che il **principio di conservazione della quantità di moto** sia **valido in tutti i SdR** è necessario **ri-definire** la quantità di moto.
- Cerchiamo allora una **nuova definizione di quantità di moto** che:
  - Sia **invariante per trasformazioni di Lorentz**;
  - Si riduca all'espressione classica nel limite  $v \ll c$**  (principio di corrispondenza).
- Occorre che la **componente  $y$  della quantità di moto** sia **indipendente** dalla **componente  $x$  della velocità** del SdR in cui si osserva l'urto.

- La componente  $y$  della quantità di moto classica si scrive, per un singolo punto materiale:
- Il numeratore  $\Delta y$  **non cambia** passando a un SdR in moto relativo lungo  $x$ , mentre **cambia  $\Delta t$** .
- Potremmo allora prendere il **tempo proprio  $\tau$  invece del tempo  $t$** , perché  $\Delta \tau$  **non cambia**:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$Q_y^{(\text{relativistica})} = m \frac{\Delta y}{\Delta \tau} = m \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y = \frac{m v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Definiamo quindi la **quantità di moto relativistica**:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} = m c \gamma \vec{\beta}$$

- Poiché risulta:

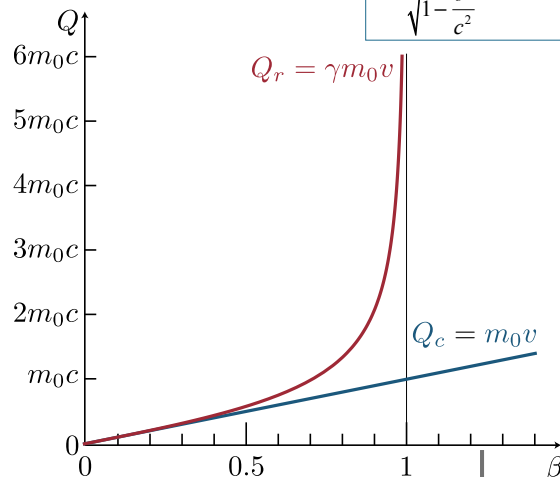
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} 1$$

si ha:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} \xrightarrow{v \ll c} m \vec{v}$$

- Dunque il **principio di corrispondenza** è **soddisfatto**.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

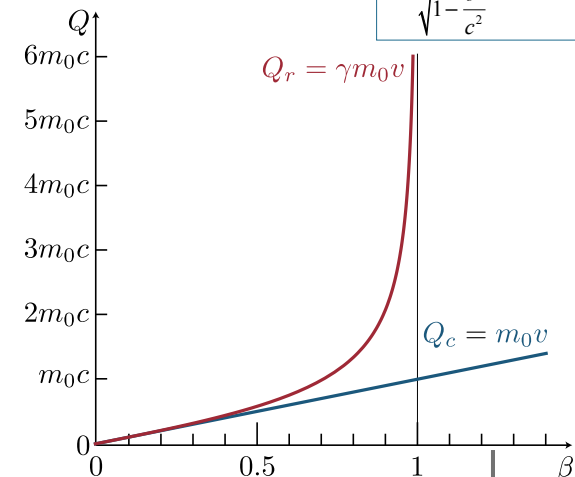


- La **quantità di moto relativistica** così definita:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} = m c \gamma \vec{\beta}$$

**si conserva negli urti in tutti i SdR inerziali.**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$



- Possiamo anche esprimere la quantità di moto relativistica (detta  $m_0$  la "massa classica") come:

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

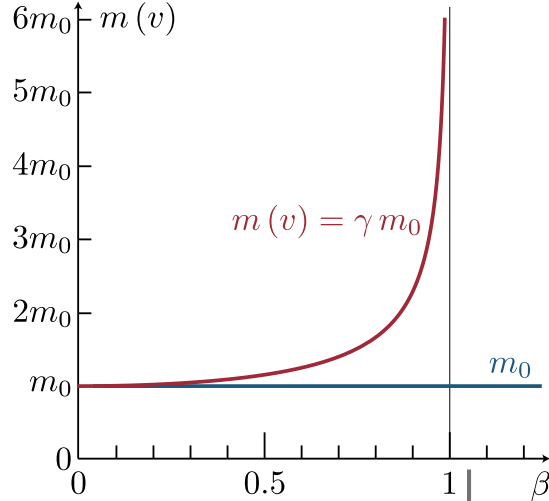
come:

$$\vec{Q} = m(v) \vec{v}$$

dove la quantità:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

è detta **massa relativistica**.



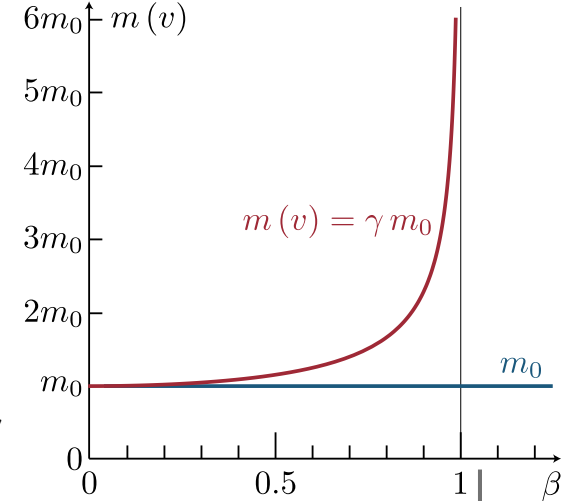
- Nell'espressione della **massa relativistica**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la "massa classica"  $m_0$  è anche la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

- La massa  $m_0$  è perciò detta **massa a riposo o massa invariante**:

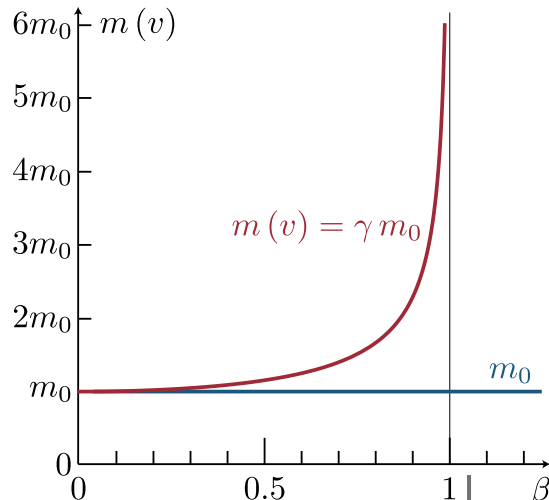
- È invariante per trasformazioni di Lorentz in quanto, **per definizione**, è la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.



- L'**aumento relativistico della massa**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- È stato **verificato** in vari **esperimenti** di deflessione di elettroni;
- È **verificato** inoltre nel funzionamento di tutti gli **acceleratori di particelle**.



- Il **Secondo Principio della Dinamica**, detto anche **Legge di Newton**, si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \quad \vec{Q} = m\vec{v}$$

- In **meccanica classica** (essendo **m costante**) si può scrivere anche nella forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- In **meccanica relativistica** è necessario considerare la **dipendenza della massa dalla velocità**:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(v)\vec{v}] = m(v) \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm(v)}{dt} \vec{v} = m(v) \vec{a} + \frac{dm(v)}{dt} \vec{v}$$

per cui **forza e accelerazione non hanno più la stessa direzione**.

- Utilizzando la **massa a riposo**  $m_0$ , si può scrivere:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = m_0 \left( \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m_0 \left( \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \vec{a} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v^2 &= \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \\ &= \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \\ &= 2\vec{v} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

- Calcolando la derivata di  $\gamma$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{c^2} 2\vec{v} \cdot \vec{a} \right) = \\ &= \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \end{aligned}$$

- Avremo quindi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = m_0 \left( \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \vec{a} \right) = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma \vec{a}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

- Infine:

$$\vec{F} = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma \vec{a}$$

- La forza ha una **componente parallela all'accelerazione** e una **componente parallela alla velocità**.

- Consideriamo l'identità matematica:

$$1 = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{v^2}{c^2}}_{\gamma^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\underbrace{1 - \frac{v^2}{c^2}}_{\beta^2 \gamma^2}} \Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

- La quantità  $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2$  è un **invariante per trasformazioni di Lorentz**, essendo sempre uguale a 1.

- Moltiplicando la ambo i membri della relazione  $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$  per  $m_0^2 c^4$  (pure **invariante per trasformazioni di Lorentz**) si ottiene:

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4$$

- Ricordando che  $Q = \gamma m_0 v = m_0 c \gamma \beta$ , ovvero:

$$Q^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 \beta^2$$

si ottiene, per quanto visto:

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 = m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x$$

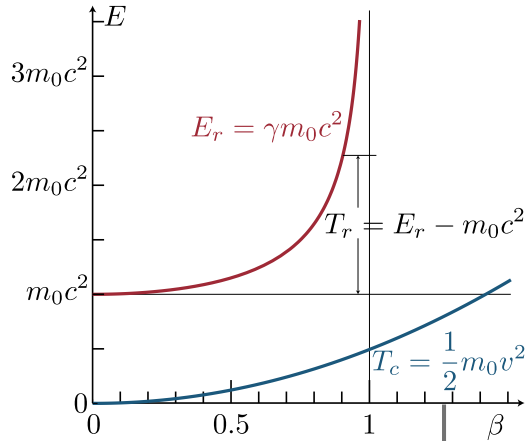
- Consideriamo ora nel primo termine la quantità  $\gamma m_0 c^2$ . Nel **limite non relativistico**  $v \ll c$  si ha:

$$\gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (v \ll c)$$

$$\gamma m_0 c^2 \approx m_0 c^2 + \overbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}^{T_c} \quad (v \ll c)$$

- Nel **II termine** riconosciamo l'**energia cinetica classica**  $T_c$ .
- Possiamo allora definire l'**energia totale relativistica** come:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



- Potremo scrivere la precedente identità invariante:

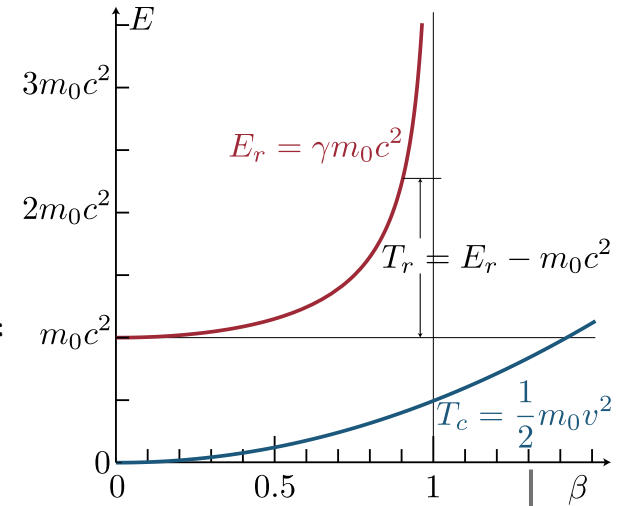
$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

come:

$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

- Essendo il **II membro** invariante per trasformazioni di Lorentz, anche il **I membro è invariante**:

$$E'^2 - Q'^2 c^2 = E^2 - Q^2 c^2$$



- I 3 termini dell'equazione:

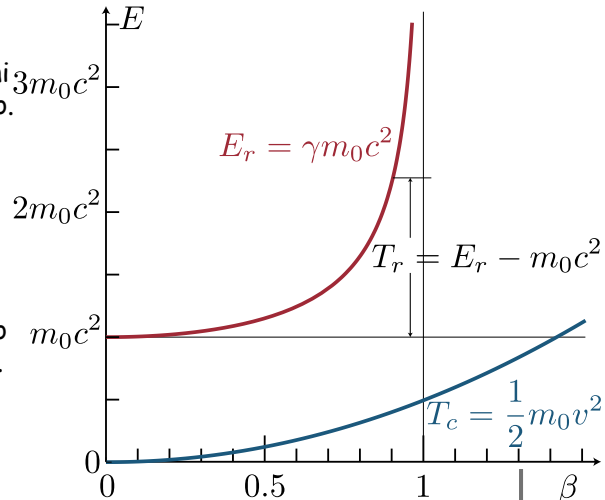
$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

hanno tutti le dimensioni di un'energia al quadrato.

- Il termine:

$$E_0 = m_0 c^2$$

è l'**energia** che il corpo possiede quando la sua **velocità è nulla**. È detto perciò **energia a riposo**.

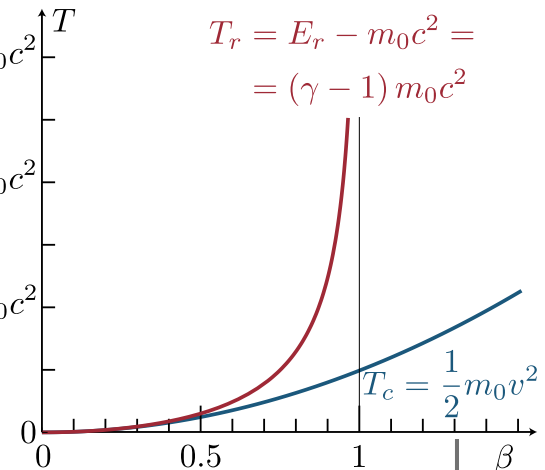


- L'**energia cinetica relativistica** si può scrivere come:

$$\begin{aligned} T_r &= E - E_0 = E - m_0 c^2 = \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = \\ &= (\gamma - 1) m_0 c^2 \end{aligned}$$

- Come abbiamo visto:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \xrightarrow{v \ll c} \\ &\xrightarrow{v \ll c} m_0 c^2 \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \dots \right) - 1 \right) \\ T_r &\xrightarrow{v \ll c} T_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned}$$

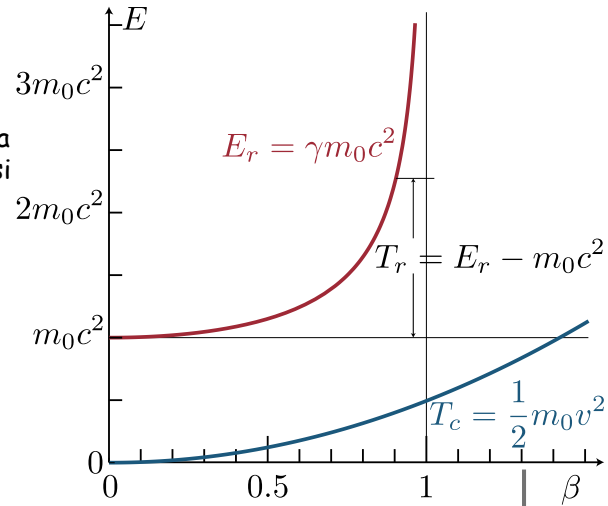


- Si osservi inoltre che, dalle 2 definizioni:

$$\begin{cases} \vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda e ricavando  $\vec{Q}$  si ottiene:

$$\vec{Q} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$



- Un corpo in **quiete** possiede un'energia **non nulla**:
  - Meccanica classica: l'energia è definita a meno di una **costante additiva arbitraria**.
  - La **relatività** **fixa** il valore di tale **costante** attribuendole un significato ben definito:
    - Quantità di **energia contenuta nella massa** del corpo.
- Una parte dell'**energia a riposo**, o tutta, può **trasformarsi** in energia cinetica o in un'altra forma di energia.
- **Nuova legge di conservazione**:
  - **Generalizza** le due leggi classiche di conservazione:
    - Massa;
    - Energia meccanica.

- Nella **Fisica Classica** l'**energia meccanica** si conserva.
- Nella **Chimica Classica** si conserva la **massa (legge di Lavoisier)**.
- Nella **Fisica Relativistica** **massa** ed **energia meccanica** possono **non conservarsi**:
  - È possibile **conversione** di massa in energia o viceversa.
- Tuttavia si conserva la **somma dell'energia meccanica e della massa** (quest'ultima moltiplicata per  $c^2$ ).

- Nei processi (relativistici) tra **nuclei** o **particelle** subnucleari le **trasformazioni di massa in energia cinetica** avvengono continuamente:
  - P. es., una particella può decadere in due particelle più leggere (somma masse < massa madre) e più veloci:
    - Parte della **massa** della particella madre si è trasformata in **energia cinetica**.
  - Viceversa facendo scontrare 2 protoni ad altissima energia in un acceleratore di particelle si possono **ottenere particelle di massa molto superiore** alla somma delle masse dei 2 protoni:
    - Parte dell'**energia cinetica** si è trasformata in **massa**.

- Vogliamo ora trovare **come cambiano quantità di moto ed energia nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.**
- Abbiamo definito la **quantità di moto relativistica** come:

$$Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

- Inoltre, dalle definizioni di energia e tempo proprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \Rightarrow E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

- Dunque dalle trasformazioni delle coordinate troviamo le trasformazioni di energia e quantità di moto, mediante una sostituzione:

$$\begin{cases} ct \rightarrow \frac{E}{c} \\ x \rightarrow Q_x \\ y \rightarrow Q_y \\ z \rightarrow Q_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta Q_x \right) \\ Q'_x = \gamma \left( Q_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases}$$

- Dalle espressioni:

$$E = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \quad Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

considerando che  $m_0$ ,  $c$  e  $\Delta \tau$  sono **invarianti** per **trasformazioni di Lorentz**, si vede che le 4 grandezze:

$$\bar{Q} = \left( \frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right) = \frac{m_0}{\Delta \tau} (c \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \propto (c \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta \bar{s}$$

**si debbono trasformare**, per trasformazioni di Lorentz, **come** le grandezze  $(c \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , che costituiscono un **quadrivettore**.

- Dunque anche la quaterna ordinata (**4-impulso**):

$$\bar{Q} = \left( \frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right)$$

rappresenta un **quadrivettore** dello **spazio di Minkowsky**.

- Avremo inoltre, per la **norma di Minkowski quadrata** del 4-vettore:

$$\|Q\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q_x^2 - Q_y^2 - Q_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q^2 = m_0^2$$

$$\|Q\|^2 = m_0^2$$

$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

- Avremo in conclusione, per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta Q_x \right) \\ Q'_x = \gamma \left( Q_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{E}{c} = \gamma \left( \frac{E'}{c} + \beta Q'_x \right) \\ Q_x = \gamma \left( Q'_x + \beta \frac{E'}{c} \right) \\ Q_y = Q'_y \\ Q_z = Q'_z \end{cases}$$

- La **4-velocità** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct, x, y, z) = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt}(ct, x, y, z) = \gamma \frac{d}{dt}(ct, x, y, z) = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct, x, y, z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v})$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- La 4-velocità è un **4-vettore tangente** alla **linea di universo** nello spazio di Minkowski.
- Si ha inoltre la relazione tra **4-impulso** e **4-velocità**:

$$\bar{Q} = \left( \frac{E}{c}, \vec{Q} \right) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = m_0 \gamma (c, \vec{v}) = m_0 \bar{u}$$

- Ricordiamo che l'intervallo di **tempo proprio**  $\Delta\tau$  di una particella in moto con velocità  $v$  (ovvero l'intervallo di tempo misurato nell'SdR in cui la particella è in quiete) si scrive:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

dove  $\Delta t$  è l'intervallo di tempo misurato nel SdR in cui la particella si muove con velocità  $v$ .

- Utilizzando l'**intervallo di tempo proprio**  $\Delta\tau$  si possono costruire altri quadri-vettori (4-vettori):
  - Tutti** i quadri-vettori **si trasformano**, per Trasformazioni di Lorentz, **come** il quadri-vettore  $(ct, x, y, z)$ ;
  - Per trovare le leggi di trasformazione è sufficiente sostituire le componenti, come abbiamo fatto per il 4-vettore energia-impulso.

$$\left( \frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right)$$

- La norma di Minkowski quadrata della **4-velocità**:

$$\bar{u} = \frac{d}{d\tau}(ct, x, y, z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

è data da:

$$\|\bar{u}\|^2 = \gamma^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

$$\|\bar{u}\|^2 = c^2$$

- Tutti i corpi si muovono nello spazio-tempo alla velocità della luce**:
  - Un oggetto **in quiete nello spazio** si muove **comunque nel tempo**;
  - Se un oggetto si muove **più velocemente nello spazio** allora si muove **più lentamente nel tempo** (dilatazione del tempo).

- La **4-accelerazione** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

- Sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = \\ &= \gamma \left( \frac{d\gamma}{dt} c, \frac{d\gamma}{dt} v_x + \gamma \frac{dv_x}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} v_y + \gamma \frac{dv_y}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} v_z + \gamma \frac{dv_z}{dt} \right) = \\ &= \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_x + \gamma^2 a_x, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_y + \gamma^2 a_y, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} v_z + \gamma^2 a_z \right) = \\ &= \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \end{aligned}$$

- Avremo quindi, per la **4-accelerazione** :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

- La 4-accelerazione è il **4-vettore normale** alla **linea di universo**.

- Derivando l'espressione:

$$\|\bar{u}\|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u} = c^2$$

rispetto a  $\tau$  si ha inoltre:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} \cdot \bar{u} = 0$$

$$\bar{a} \cdot \bar{u} = 0$$

- I 4-vettori **velocità** e **accelerazione** sono sempre **ortogonali** tra loro.

- La **4-forza** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{Q}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c}, \vec{Q} \right)$$

$$\begin{cases} \bar{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

- Data la definizione di Energia e Quantità di Moto relativistica, si ha:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{Q}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c}, \vec{Q} \right) = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = m_0 \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v}) = m_0 \bar{a}$$

$$\bar{F} = m_0 \bar{a}$$

- Si ricordi che, per il **Secondo Principio della Dinamica** si ha, per i 3-vettori:

$$\vec{F} = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma \vec{a}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

per cui la potenza (**lavoro per unità di tempo**) si scrive:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= m_0 \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a} \frac{v^2}{c^2} + m_0 \gamma \vec{a} \cdot \vec{v} = m_0 \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a} \left[ \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right] = \\ &= m_0 \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a} \left[ \frac{v^2}{c^2} + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = m_0 \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

- La **4-forza** si può scrivere come:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \bar{a} \right)$$

$$\bar{F} = m_0 \bar{a} = m_0 \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \bar{a} \right) = \left( m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma^2 \bar{a} \right)$$

- Si ha pertanto:

$$\bar{F} = \left( m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma^2 \bar{a} \right) = \left( \frac{\gamma}{c} \bar{F} \cdot \vec{v}, \gamma \bar{F} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \bar{a}}{c^2} \vec{v} + m_0 \gamma \bar{a} \\ \bar{F} \cdot \vec{v} &= m_0 \gamma^3 \vec{v} \cdot \bar{a} \end{aligned}$$

$$\bar{F} = \left( \frac{\gamma}{c} \bar{F} \cdot \vec{v}, \gamma \bar{F} \right)$$

- La **componente temporale** della 4-forza è legata al **lavoro** compiuto dalla forza per unità di tempo.

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**Prof. Domenico Galli****Dipartimento di Fisica****domenico.galli@unibo.it**<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli><https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>