



Introduzione al calcolo vettoriale

Vincenzo Vagnoni

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e
Fondazione Giuseppe Occhialini

Fossombrone, 26 Marzo 2010

<http://www.fondazioneocchialini.it>



Grandezze fisiche



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

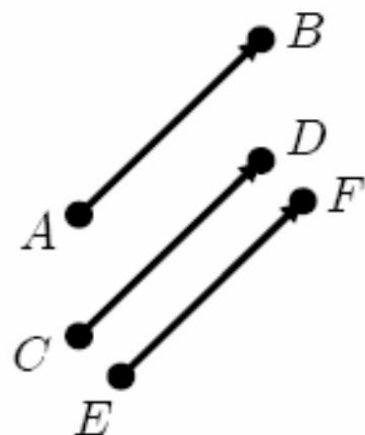
- **Grandezze scalari**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* e una *unità di misura*.
 - Esempi: lunghezza, tempo, superficie, volume, massa, temperatura, carica elettrica, ecc.
- **Grandezze vettoriali**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* (detto modulo o norma), una *direzione*, un *verso* e una *unità di misura*.
 - Esempi: spostamento rettilineo di un punto, velocità, accelerazione, forza, momento di una forza, momento di dipolo elettrico, ecc.
- **Grandezze tensoriali**: la loro specificazione è ancora più complicata
 - Esempi: rotazione, tensore di inerzia, ecc.



Cos'è un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\vec{v} = B - A = D - C = F - E$$

Notazioni equivalenti:

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \underline{v} = \overline{v}$$

■ **Prototipo**: spostamento rettilineo di un punto.

- Spostamento di un punto da A a B $\xleftarrow[\text{su}]{1-1}$ segmento orientato che congiunge A con B .
- Esistono infiniti segmenti orientati che rappresentano spostamenti rettilinei di egual lunghezza, paralleli ed equiversi.
 - Chiamiamo **vettore** $\vec{v}$ il "**quid**" **comune** a tali segmenti orientati (Vailati-Enriquez).
 - Oppure, definiti equipollenti due segmenti orientati di egual lunghezza, paralleli ed equiversi, definiamo **vettore** $\vec{v}$ la **classe di equivalenza** dei segmenti orientati rispetto alla relazione di equipollenza (Frege-Russel).



Caratteristiche di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Modulo** (o **norma**): distanza tra origine A e vertice B . Si indica con $\|\vec{v}\| = |\vec{v}| = v$
- **Direzione**: orientamento nello spazio della retta su cui giace il segmento orientato AB .
- **Verso**: senso di percorrenza.



- Medesima direzione, medesimo verso, moduli diversi.



- Medesimo modulo, direzione diversa.



- Medesimo modulo, medesima direzione, verso opposto.



Uguaglianza tra vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Due vettori si dicono **uguali** se, e soltanto se, hanno:
 - il **medesimo modulo**,
 - la **medesima direzione**,
 - il **medesimo verso**.
- Se due vettori non sono uguali si dicono **disuguali**, ma **non** è possibile definire una **relazione d'ordine** in quanto non si può trovare un criterio per affermare che un vettore è maggiore o minore di un altro.

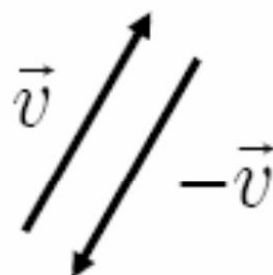


Vettore opposto e vettore nullo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$, si definisce **vettore opposto** $-\vec{v}$ un vettore avente stessa direzione, stesso modulo ma verso opposto.



- Si chiama **vettore nullo** $\vec{0}$ un vettore che ha modulo nullo (in questo caso direzione e verso sono indeterminati).



Cos'è un versore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si chiamano **versori** i vettori di modulo unitario.
- Per ogni vettore $\vec{v}$ **non nullo** esiste un versore che ha la stessa direzione orientata:

$$\hat{v} = \text{vers } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

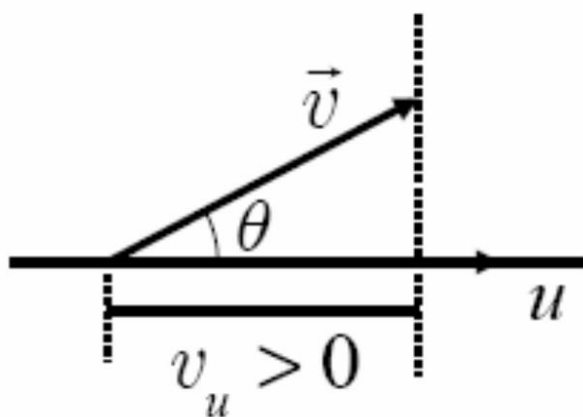


Proiezione di un vettore lungo una direzione

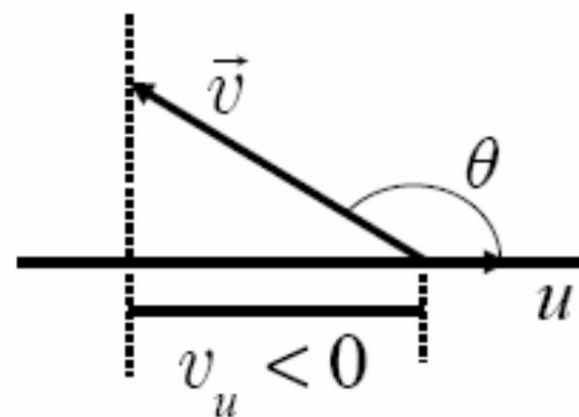


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u , si definisce **la componente** di $\vec{v}$ su u e si indica con v_u il prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il coseno dell'angolo θ che il vettore forma con la direzione orientata u .



$$v_u = \|\vec{v}\| \cos \theta$$



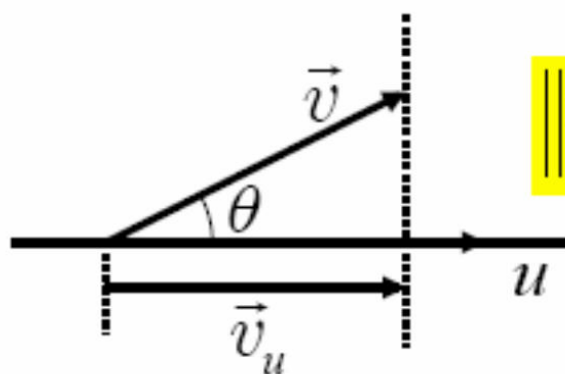


Proiezione di un vettore lungo una direzione

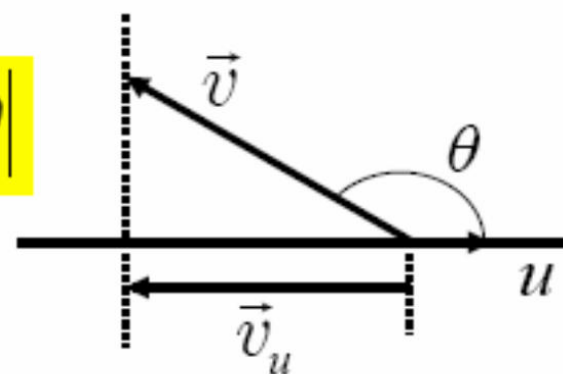


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u , si definisce **il componente** di $\vec{v}$ su u e si indica con $\vec{v}_u$ il vettore che ha per modulo il valore assoluto della **la** corrispondente componente v_u e per verso: lo stesso verso di u se $v_u > 0$; il verso contrario se $v_u < 0$.



$$\|\vec{v}_u\| = |v_u| = \|\vec{v}\| |\cos \theta|$$



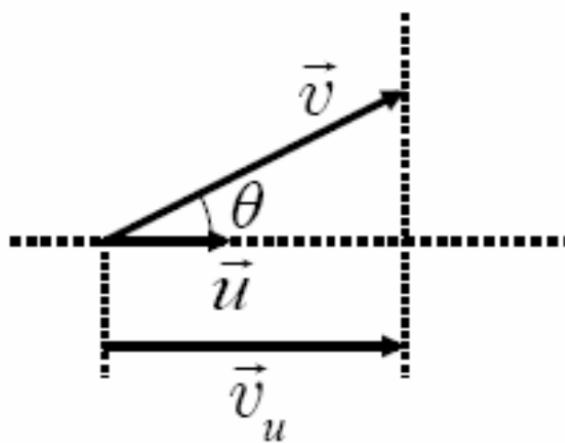


Proiezione di un vettore lungo un altro vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si definisce **il** componente o **la** componente di un vettore $\vec{v}$ su un altro vettore $\vec{u}$ (o su un versore $\hat{u}$) come il componente o la componente di $\vec{v}$ rispetto alla direzione orientata di $\vec{u}$ o $\hat{u}$.



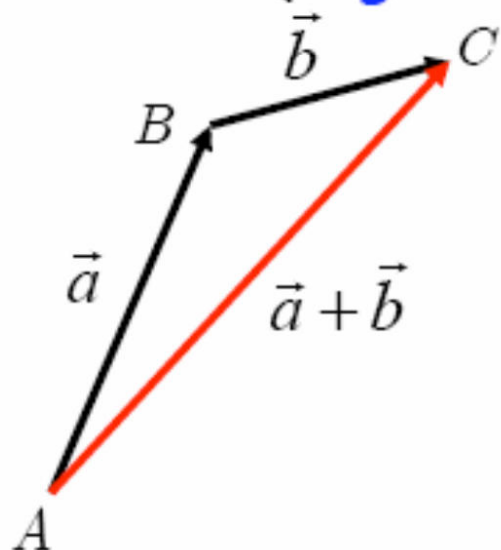


Somma di vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Prototipo: spostamento rettilineo di un punto.
- Se considero due spostamenti successivi dello stesso punto: prima da A a B , poi da B a C .
- Il risultato (**somma** dei due vettori) è lo spostamento da A a C (**regola del triangolo**):



$$C - A = (C - B) + (B - A)$$

Ovvero, indicando:

$$\vec{a} = B - A, \quad \vec{b} = C - B$$

Sarà:

$$\vec{a} + \vec{b} = C - A$$

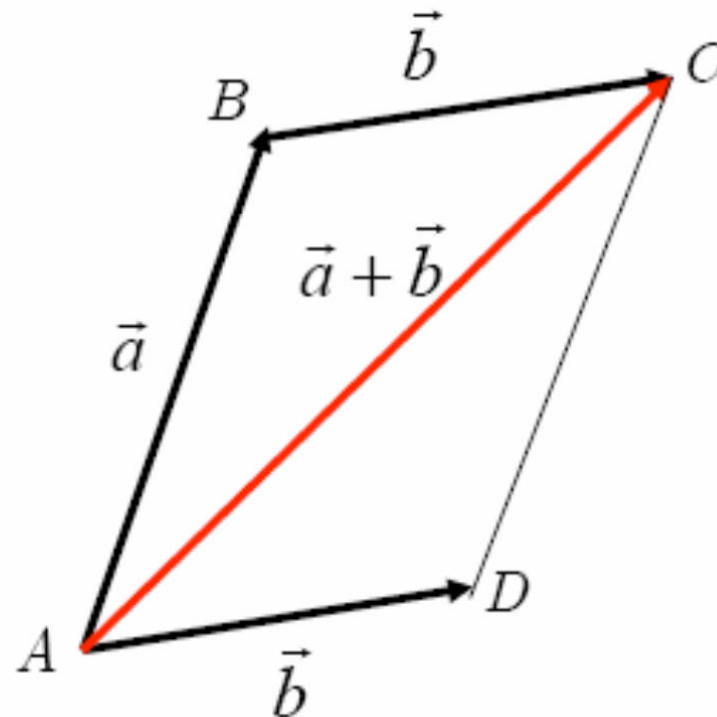


Regola del parallelogramma



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La somma $\vec{a} + \vec{b} = C - A$ è la **diagonale** del parallelogramma $ABCD$ avente per lati i segmenti orientati $B - A$ e $D - A$.



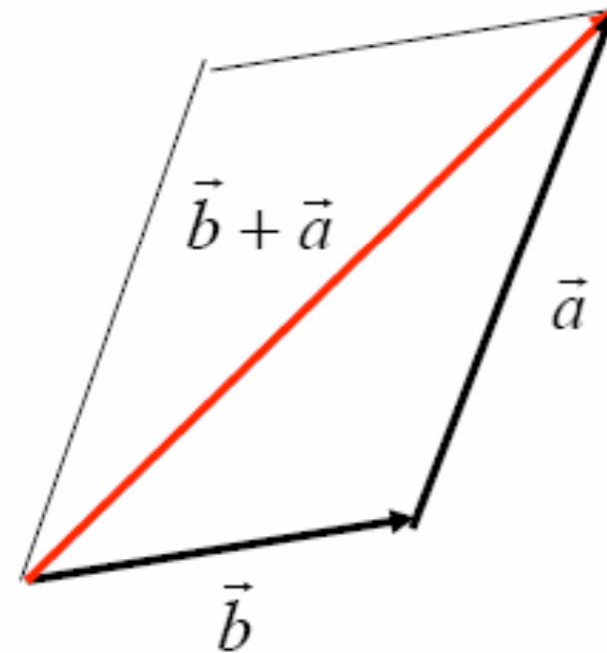
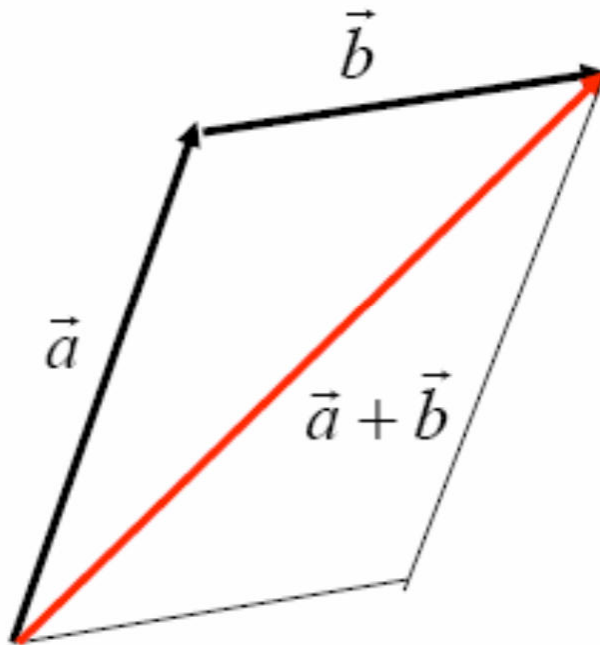


Commutatività della somma di vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



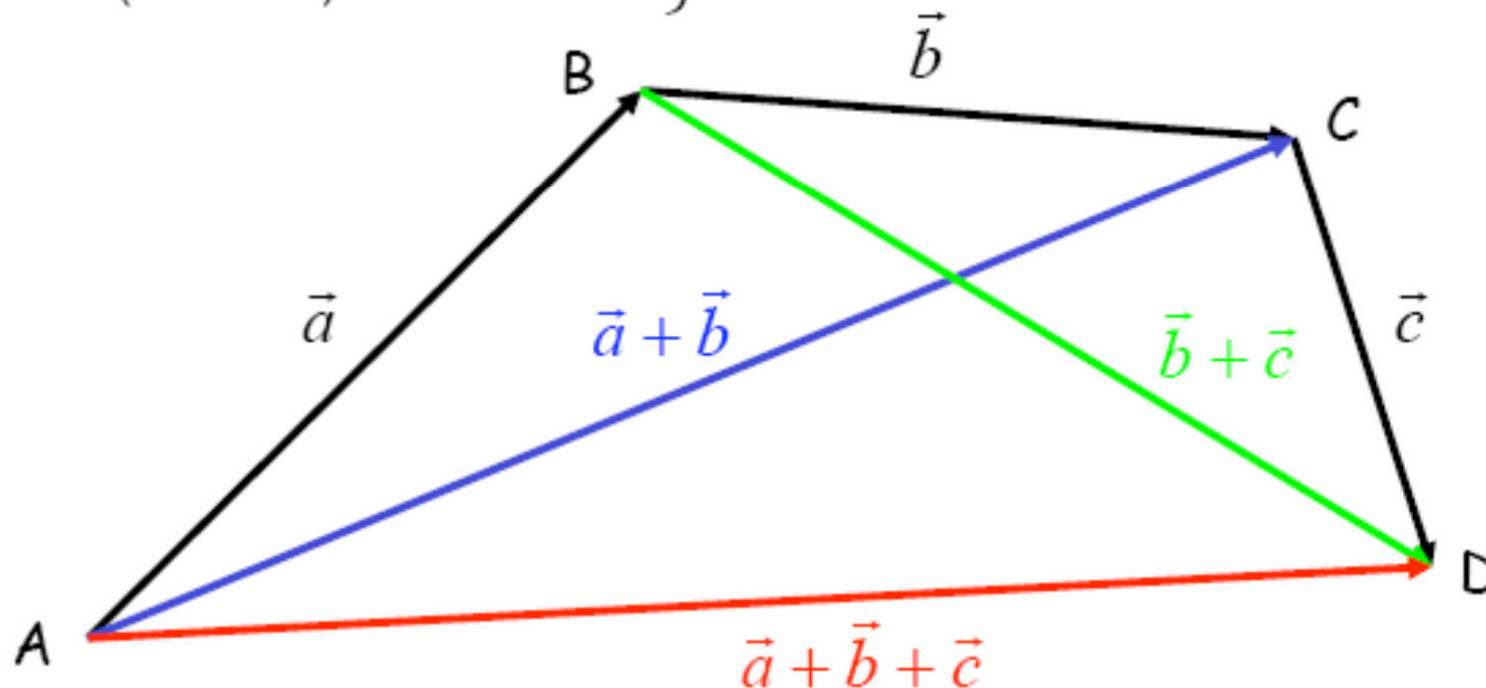


Associatività della somma di vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = D - A \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = D - A \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



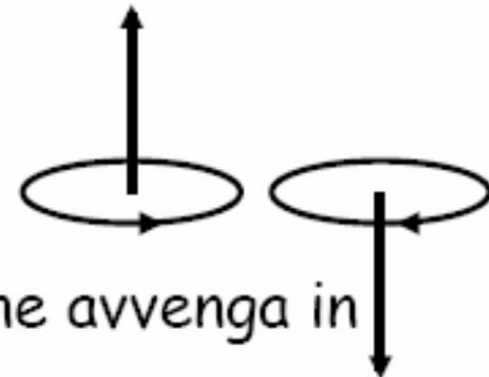


Rotazioni



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Una **traslazione** è rappresentata da un vettore.
- Una **rotazione** è essa pure rappresentata da un vettore? (vedremo che la risposta è **NO**).
- Tuttavia, a prima vista potremmo pensare di rappresentare una rotazione mediante:
 - Una direzione (asse di rotazione);
 - Un numero (angolo di rotazione);
 - Un verso (a seconda che la rotazione avvenga in senso orario o antiorario).



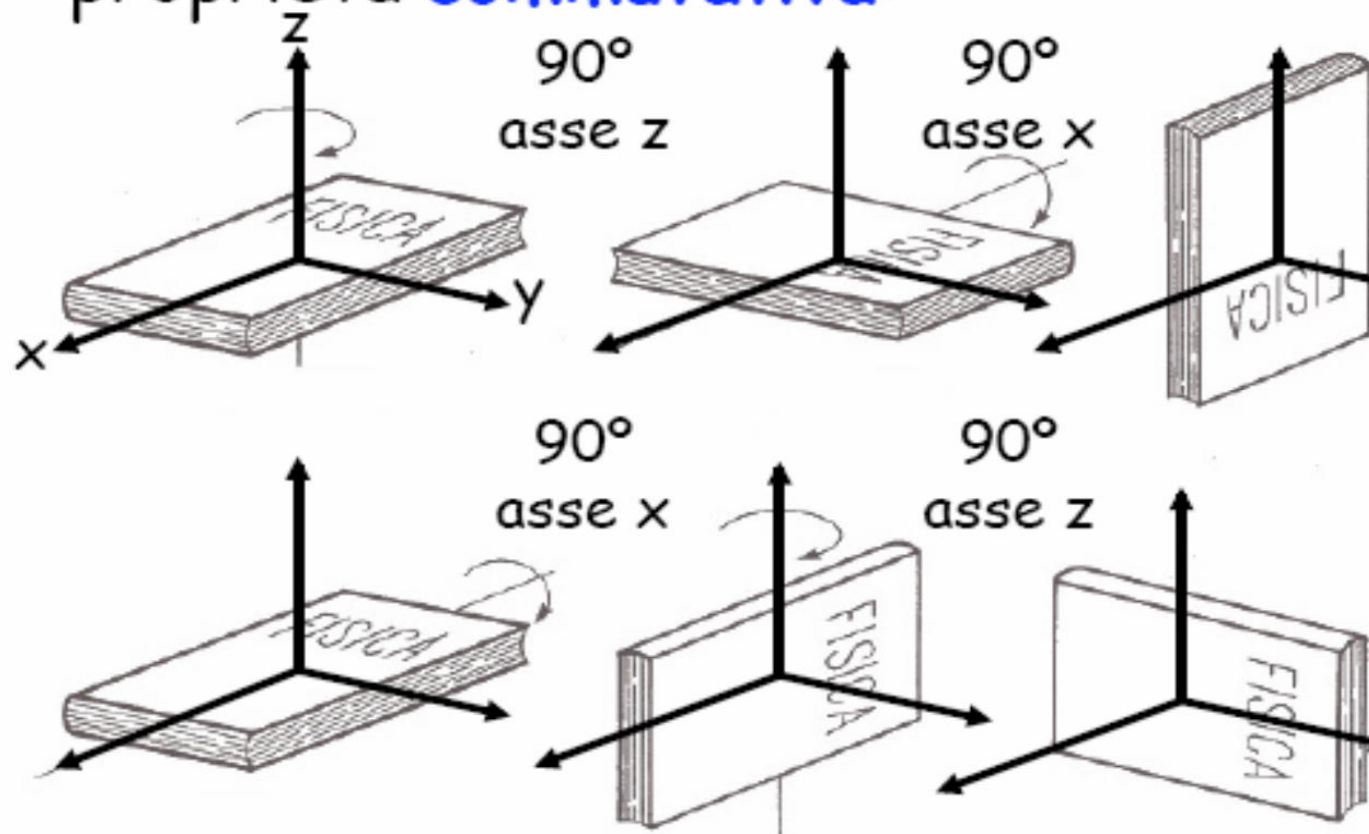


Rotazioni



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Verifichiamo se le rotazioni godono della proprietà **commutativa**:



- Il risultato è diverso se si scambia l'ordine delle rotazioni.

- Non vale la proprietà commutativa

- Le rotazioni **non** sono rappresentate da **vettori** (sono rappresentate da **tensori**).

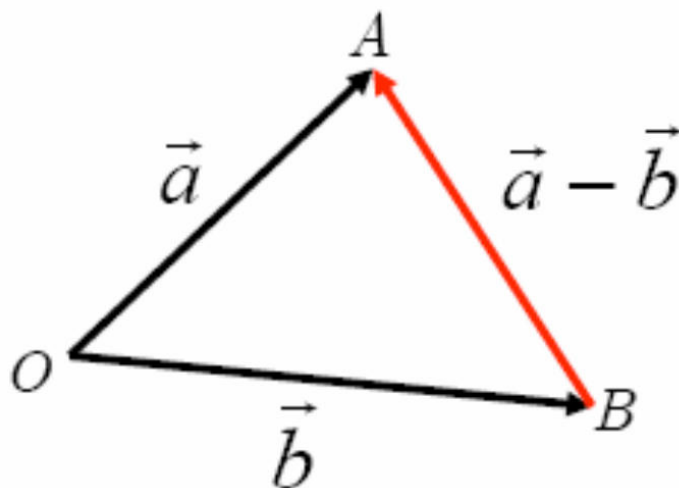


Differenza tra vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- È l'operazione inversa della somma
- Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si chiama **differenza** fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con $\vec{a} - \vec{b}$ quel vettore che sommato a $\vec{b}$ dà come risultato $\vec{a}$.



$$\vec{a} = A - O$$

$$\vec{b} = B - O$$

$$\vec{a} - \vec{b} = A - B$$

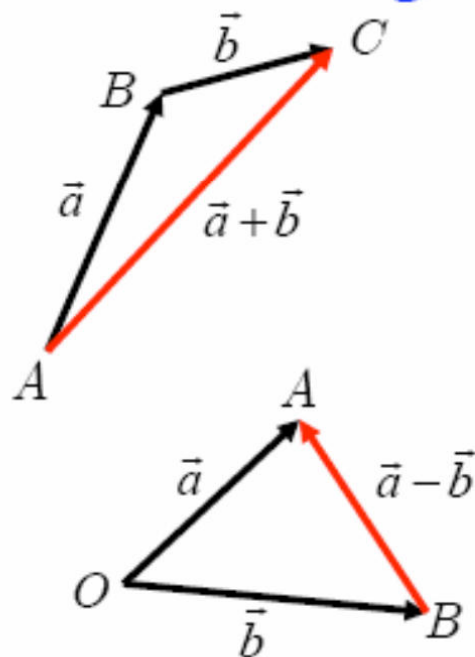


Disuguaglianza triangolare

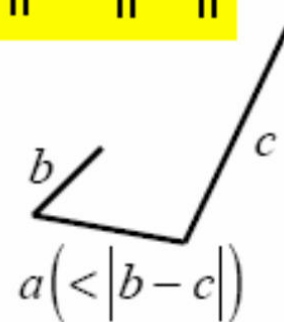
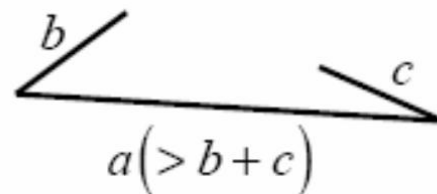


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il modulo della somma (o della differenza) di due vettori è in generale **diverso** dalla somma (o dalla differenza) dei moduli.
- Per la **disuguaglianza triangolare** si ha:



$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| &\leq \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \\ \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| &\leq \|\vec{a} - \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \end{aligned}$$





Prodotto di un vettore per uno scalare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può definire il **prodotto** di un numero **naturale** n per un **vettore** $\vec{a}$ come una somma ripetuta

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ volte}} = n\vec{a}$$



- Generalizzando, si definisce **prodotto** di un **numero reale** θ e un **vettore** $\vec{a}$ e si indica con il simbolo $\alpha\vec{a}$ il vettore che ha per modulo il prodotto $|\alpha|\|\vec{a}\|$, per direzione la stessa direzione di $\vec{a}$, e, per verso, lo stesso verso di $\vec{a}$ se $\theta > 0$, il verso contrario se $\theta < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \\ \vec{a} \in V \end{array} \right\} \alpha\vec{a} \in V$$



Prodotto di un vettore per uno scalare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto di un vettore per uno scalare è commutativo, associativo, distributivo, sia rispetto alla somma di scalari, sia rispetto alla somma di vettori.

$$\alpha \vec{a} = \vec{a} \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \end{array} \right.$$

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$(-1) \vec{a} = -\vec{a}$$

$$\vec{a} \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \hat{a} = \text{vers } \vec{a}$$

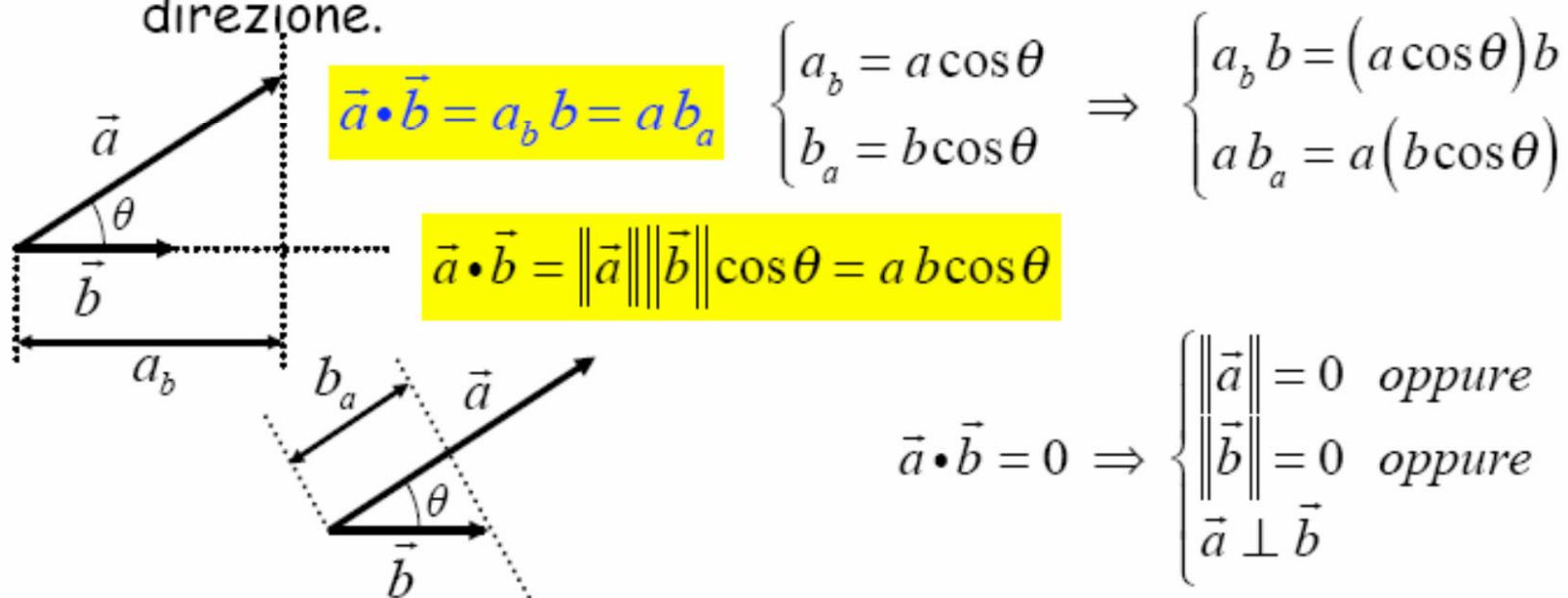


Prodotto scalare tra due vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Associa a due vettori uno scalare (p. es., associa a forza e spostamento il lavoro).
- Si definisce **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro sulla sua direzione.





Proprietà del prodotto scalare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto scalare gode delle proprietà **commutativa** e **distributiva** rispetto alla somma di vettori.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$



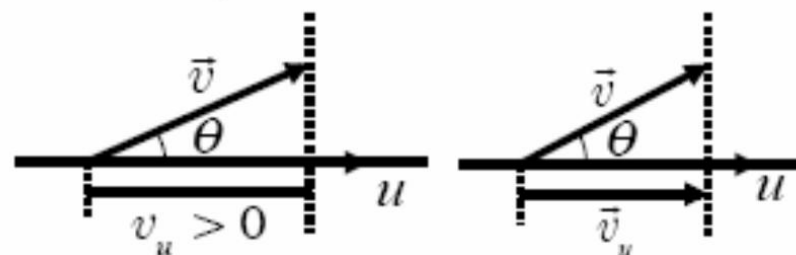
Componente di un vettore della direzione di un versore o di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del versore $\hat{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \vec{v} \cdot \hat{u} \quad \vec{v}_u = (\vec{v} \cdot \hat{u}) \hat{u}$$



- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del vettore generico $\vec{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad \vec{v}_u = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$



Quadrato di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si chiama **quadrato di un vettore** il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \cos 0 = \|\vec{a}\|^2$$

- Il **modulo** (o **norma**) di un vettore si può perciò scrivere:

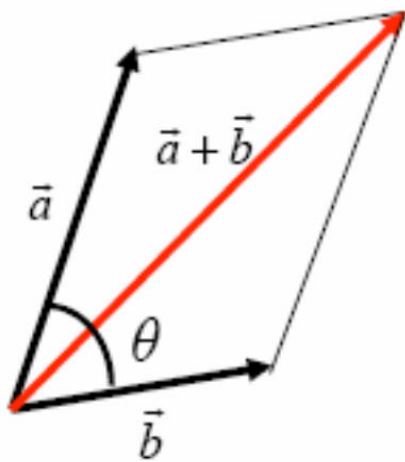
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$



Modulo della somma o differenza tra vettori

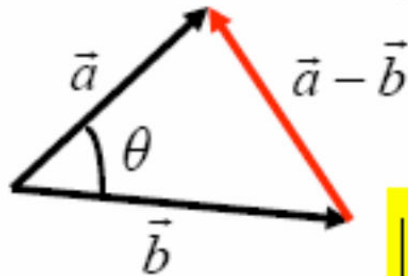


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\begin{aligned}\|\vec{a} + \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \\ &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}}\end{aligned}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$



$$\begin{aligned}\|\vec{a} - \vec{b}\| &= \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \\ &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}}\end{aligned}$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

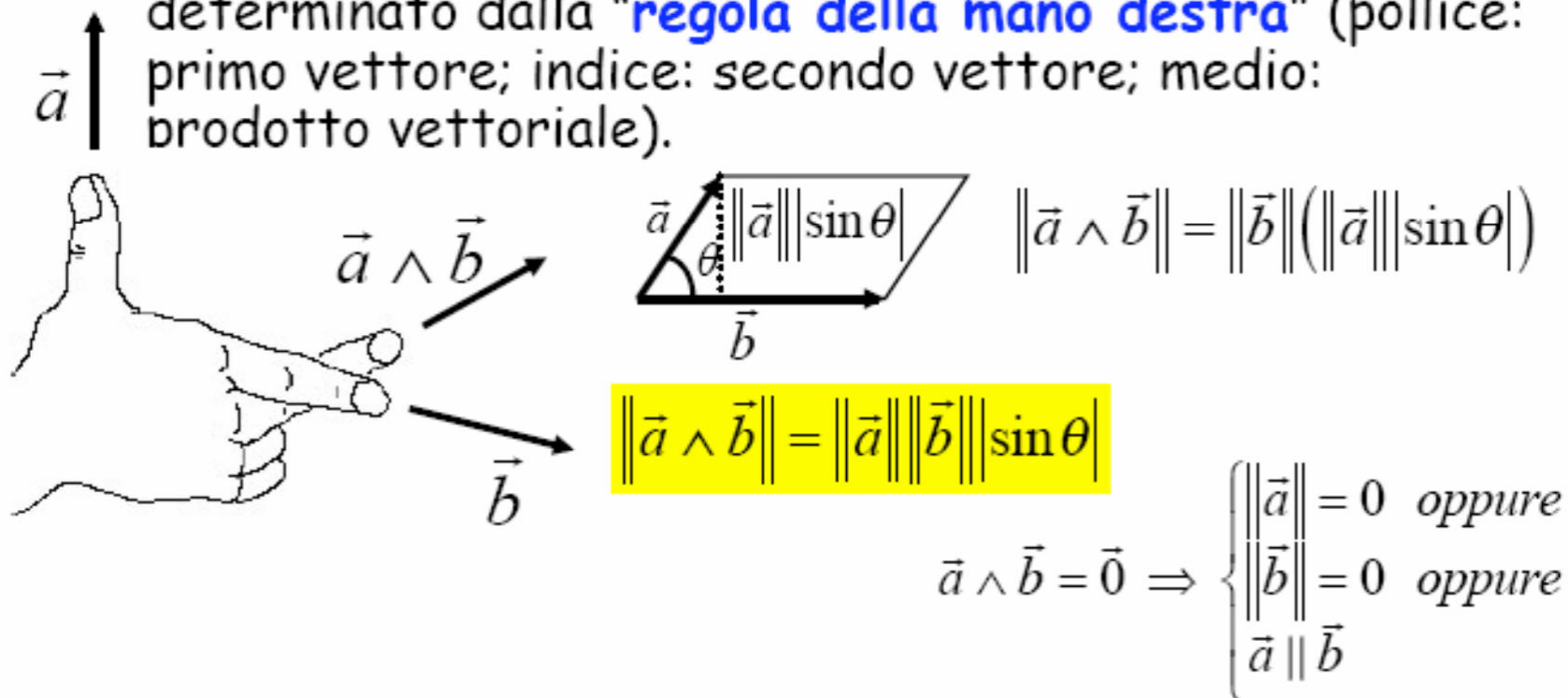


Prodotto vettoriale



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si definisce **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il vettore che ha per modulo l'area del parallelogramma formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di direzione perpendicolare a entrambi i vettori e verso determinato dalla "**regola della mano destra**" (pollice: primo vettore; indice: secondo vettore; medio: prodotto vettoriale).





Proprietà del prodotto vettoriale



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto vettoriale gode delle proprietà **anticommutativa** e **distributiva** rispetto alla somma e alla differenza di vettori.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(m\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m\vec{b}) = m(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$(\vec{a} \pm \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} \pm \vec{b} \wedge \vec{c}$$



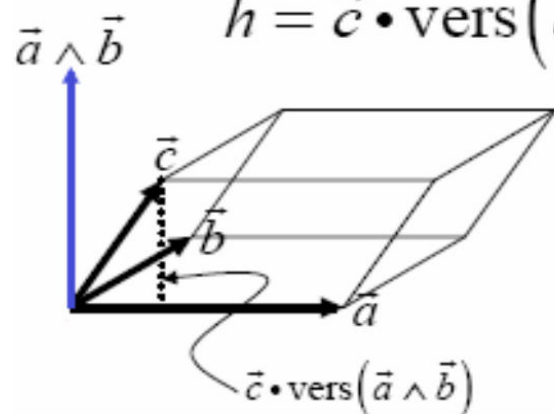
Doppio prodotto misto



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- È dato da: $\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c}$
- È uguale, a meno del segno, al **volume del parallelepipedo** avente per lati $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
- Tale parallelepipedo ha per base e altezza:

$$\left. \begin{array}{l} B = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \\ h = \vec{c} \cdot \text{vers}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \end{array} \right\} \Rightarrow V = \underbrace{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \text{vers}(\vec{a} \wedge \vec{b})}_{\vec{a} \wedge \vec{b}} \cdot \vec{c}$$



$$V = |\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c}|$$



Doppio prodotto misto



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il doppio prodotto misto ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$$

- La prima segue dal fatto che nei 3 casi il volume è il medesimo.
- La seconda si ottiene utilizzando la prima e la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

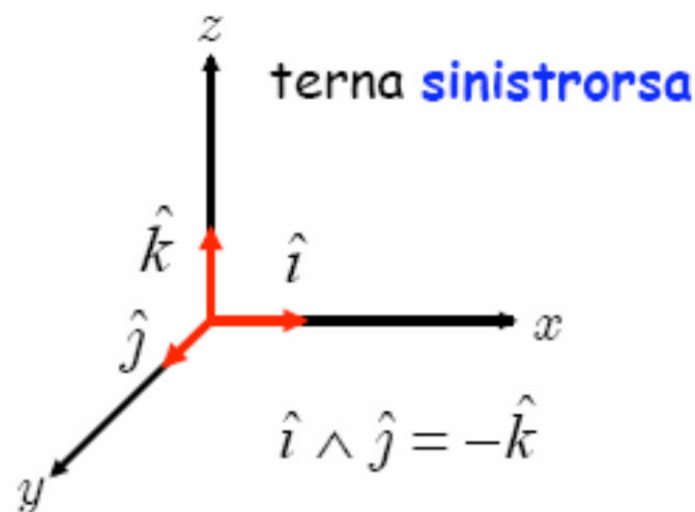
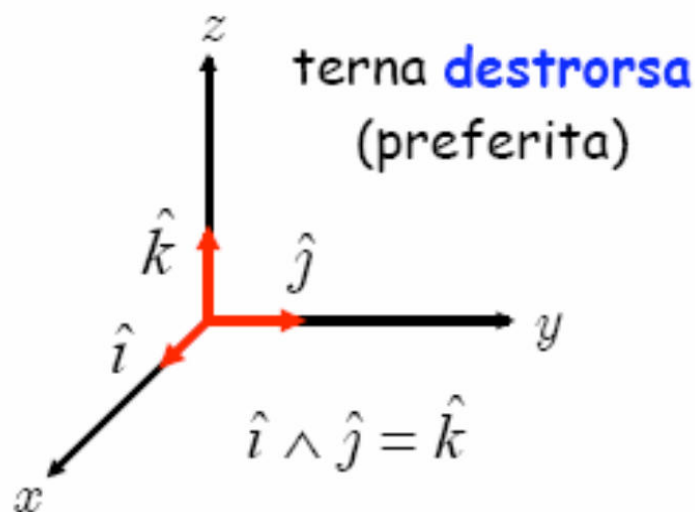


Rappresentazione cartesiana di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Terna cartesiana ortogonale**: 3 rette orientate (o assi) x , y e z , a due a due perpendicolari, aventi un punto in comune O detto **origine**.
- **Versori cartesiani**: versori corrispondenti agli assi x , y e z , indicati con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.
- **(Le) componenti cartesiane** e **(i) componenti cartesiani**: le componenti e i componenti di un vettore sugli assi cartesiani.

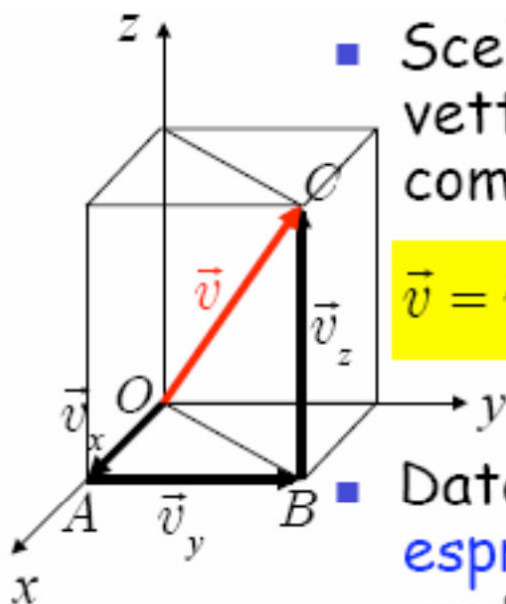




Rappresentazione cartesiana di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



- Scelta una terna cartesiana ortogonale, qualunque vettore $\vec{v}$ è uguale alla somma dei suoi 3 componenti cartesiani.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = v_x \hat{i} \\ \vec{v}_y = v_y \hat{j} \\ \vec{v}_z = v_z \hat{k} \end{cases}$$

- Dato un vettore, esso ha una **differente espressione** cartesiana **per ogni differente terna** cartesiana che si considera.
- Tuttavia, **fissata una terna** cartesiana ortogonale, vi è una **corrispondenza biunivoca** tra **vettori** e **terne ordinate** di numeri reali (le componenti cartesiane).

$$\vec{v} \xleftrightarrow[\text{su}]{1-1} (v_x, v_y, v_z)$$



Rappresentazione cartesiana di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Fissata una terna cartesiana ortogonale:
 - Due vettori sono **uguali** se e soltanto se sono uguali le 3 corrispondenti componenti cartesiane.
 - Un vettore è **nullo** se e soltanto se sono nulle tutte e 3 le componenti cartesiane.
- Le operazioni tra vettori possono essere eseguite, oltre che nella **forma intrinseca** che abbiamo visto finora, anche nella **forma cartesiana**, utilizzando cioè le espressioni cartesiane dei vettori.



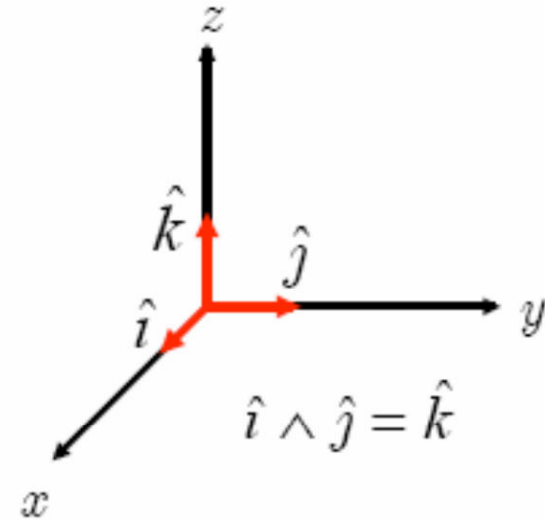
Terna di versori ortogonali



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

■ Prodotti scalari

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= 1, & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0, & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{k} \cdot \hat{i} &= 0\end{aligned}$$



■ Prodotti vettoriali

$$\begin{aligned}\hat{i} \wedge \hat{i} &= \vec{0}, & \hat{j} \wedge \hat{j} &= \vec{0}, & \hat{k} \wedge \hat{k} &= \vec{0} \\ \hat{i} \wedge \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \wedge \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \wedge \hat{i} &= \hat{j}\end{aligned}$$



Operazioni tra i versori esprese in forma cartesiana



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) + (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) - (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = (a_x - b_x) \hat{i} + (a_y - b_y) \hat{j} + (a_z - b_z) \hat{k}$$

$$\alpha \vec{a} = \alpha (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) = (\alpha a_x) \hat{i} + (\alpha a_y) \hat{j} + (\alpha a_z) \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\ &= a_x b_x \underbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}_1 + a_x b_y \underbrace{\hat{i} \cdot \hat{j}}_0 + a_x b_z \underbrace{\hat{i} \cdot \hat{k}}_0 + a_y b_x \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{i}}_0 + a_y b_y \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{j}}_1 + a_y b_z \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{k}}_0 + \\ &+ a_z b_x \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{i}}_0 + a_z b_y \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{j}}_0 + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_1 = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Operazioni tra i vettori esprese in forma cartesiana



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \wedge (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\
 &= a_x b_x \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{i}}_0 + a_x b_y \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{j}}_{\hat{k}} + a_x b_z \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{k}}_{-\hat{j}} + a_y b_x \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{i}}_{-\hat{k}} + a_y b_y \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{j}}_0 + a_y b_z \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{k}}_{\hat{i}} + \\
 &+ a_z b_x \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{i}}_{\hat{j}} + a_z b_y \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{j}}_{-\hat{i}} + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{k}}_0 = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\
 \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} &= [(a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}] \cdot (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}) = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z = \det \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$



Operazioni tra i vettori esprese in forma cartesiana



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può anche mostrare che:

$$\begin{cases} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \\ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{cases}$$

- Infatti, prendendo, ad esempio la I componente:

$$\begin{aligned} [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}]_x &= (\vec{a} \wedge \vec{b})_y c_z - (\vec{a} \wedge \vec{b})_z c_y = \\ &= (a_z b_x - a_x b_z) c_z - (a_x b_y - a_y b_x) c_y \\ [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}]_x &= \cancel{(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)} b_x - \cancel{(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)} a_x \end{aligned}$$



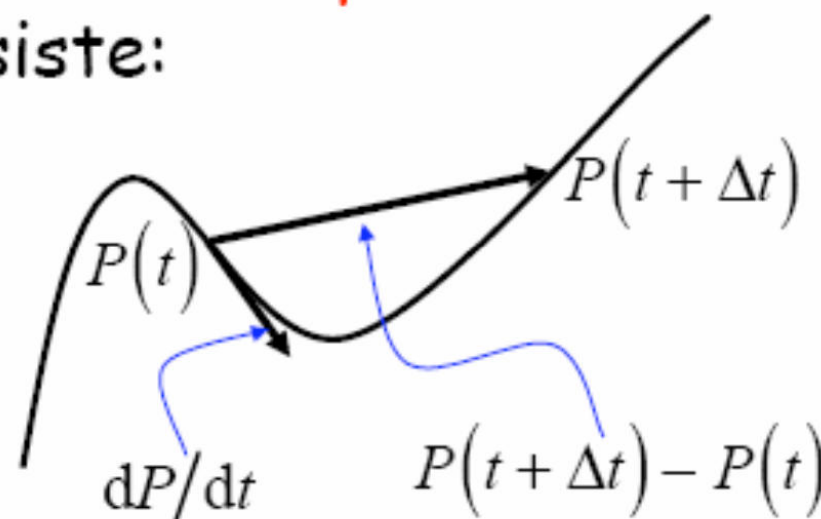
Derivata di un punto



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un punto mobile $P = P(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce **derivata del punto P rispetto alla variabile t** il limite, se esiste:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$



- $P(t + \Delta t) - P(t)$ è un vettore, per cui anche dP/dt è un vettore.



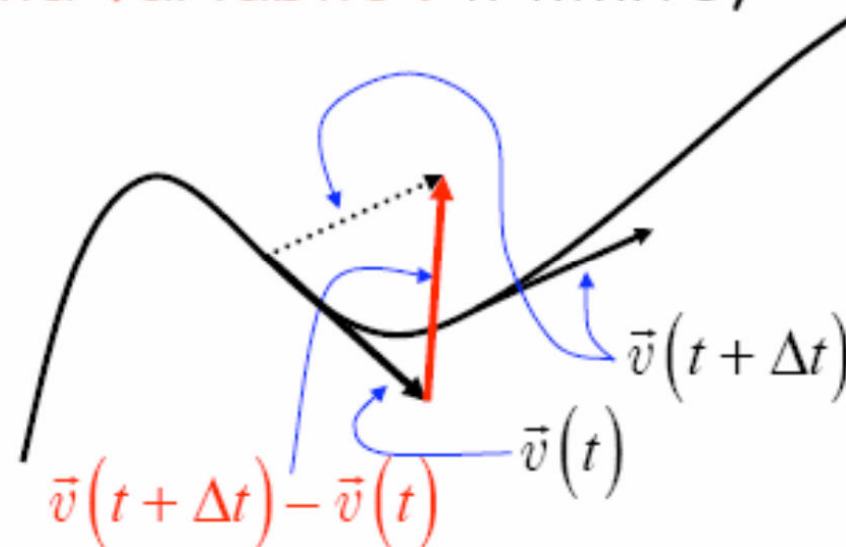
Derivata di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v} = \vec{v}(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce **derivata del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t** il limite, se esiste:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



- Poiché $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ è ancora un vettore, $d\vec{v}/dt$ è pure un vettore.



Derivata di un segmento orientato



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La derivata di un segmento orientato $B-A = B(t)-A(t)$ è uguale alla differenza delle derivate dei suoi punti estremi:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(B-A) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ [B(t+\Delta t) - A(t+\Delta t)] - [B(t) - A(t)] \right\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ [B(t+\Delta t) - B(t)] - [A(t+\Delta t) - A(t)] \right\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [B(t+\Delta t) - B(t)] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [A(t+\Delta t) - A(t)] = \\ &= \frac{dB}{dt} - \frac{dA}{dt}\end{aligned}$$



Vettore posizione

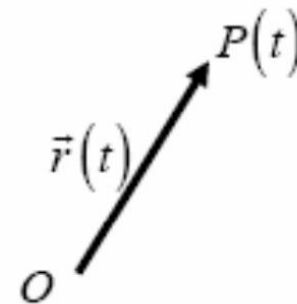


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un caso interessante si ha quando si considera un segmento orientato $P(t)-O$ con un estremo fisso O (detto **vettore posizionale**):

$$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(P(t) - O) = \frac{dP}{dt}$$



- La derivata di un punto è uguale alla derivata del suo vettore posizionale.



Regole di derivazione dei vettori



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha \vec{a}) = \frac{d\alpha}{dt} \vec{a} + \alpha \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \end{cases}$$



Integrale di un vettore



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Integrale indefinito o funzione primitiva:

$$\vec{w} = \int \vec{v} dt \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

- Integrale definito

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \vec{w}(t_2) - \vec{w}(t_1)$$

- Derivata e integrale possono essere effettuate mediante le espressioni cartesiane

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt = \hat{i} \int_{t_1}^{t_2} v_x dt + \hat{j} \int_{t_1}^{t_2} v_y dt + \hat{k} \int_{t_1}^{t_2} v_z dt$$