



Meccanica classica: Cinematica

Vincenzo Vagnoni

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e
Fondazione Giuseppe Occhialini

Fossombrone, 26 Marzo 2010



Cinematica



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La **meccanica** studia i moti dei corpi e le leggi che li governano.
- **Cinematica**: approccio descrittivo. Studio delle grandezze fisiche e dei metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto, **senza curarsi delle cause** che li determinano.
- **Punto materiale**: è l'oggetto mobile più semplice. Ha **dimensioni trascurabili nel contesto considerato**.
 - P. es.: nel sistema solare la Terra può essere considerata un punto materiale, in quanto ha dimensioni piccole rispetto alle orbite dei pianeti e i suoi moti di rotazione, precessione, ecc. possono essere tralasciati nella descrizione del moto di rivoluzione.



Cinematica



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Oggetti estesi**: possono essere suddivisi in tante parti, sufficientemente piccole per il dettaglio richiesto, e considerati come **sistemi di punti materiali**.
- **Il moto è relativo**: si può descrivere il moto soltanto quando si è stabilito rispetto a che cosa il movimento è valutato.
- **Sistema di Riferimento (SdR)**: sistema di corpi, **in quiete gli uni rispetto agli altri** (distanza reciproca immutata nel tempo), rispetto a cui si descrive il moto.
- **Terna cartesiana di riferimento**: terna cartesiana, fissa rispetto al SdR, utilizzata per descrivere quantitativamente il moto.



Principio di relatività



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Principio di Relatività:** Non esiste un SdR privilegiato. Le leggi della Fisica sono uguali in tutti i SdR.
 - La diatriba tra punto di vista **tolemaico** (geocentrico) e **copernicano** (eliocentrico) è **superata** nella fisica moderna: i due punti di vista non sono in antitesi (è altrettanto corretto dire che la Terra si muove rispetto al Sole o che il Sole si muove rispetto alla Terra). **La descrizione copernicana è più semplice ma non più "vera"**: con opportuni strumenti di calcolo si può pure descrivere il moto dei pianeti nel SdR terrestre.



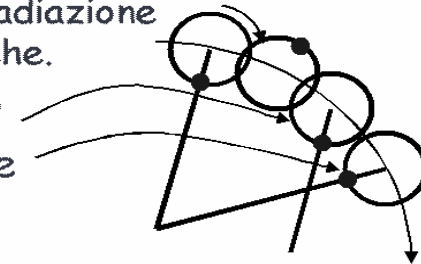
Tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per decidere se un punto si muove occorre controllare se la sua posizione cambia col passare del tempo.
- Se si vuole considerare il tempo come **grandezza fisica** occorre darne una **definizione operativa**, ovvero bisogna stabilire qual è il procedimento con cui si misurano gli intervalli di tempo.
- Gli strumenti per la misura del tempo (orologi, cronometri) si basano su di un **fenomeno periodico** (che si ripete continuamente, come il moto di un pendolo). Gli intervalli di tempo tra due successive ripetizioni sono **supposti uguali** e uno qualunque di questi intervalli è assunto come unità di misura.
 - Es.: passaggio del Sole o di una stella dal meridiano locale (**giorno solare** e **giorno sidereo**). NB: in un anno 1 giorno solare in meno dei giorni siderei.
 - Es.: oscillazioni di un pendolo o di un bilanciere collegato a una molla a spirale. Oscillazioni di un quarzo piezoelettrico. Oscillazioni della radiazione elettromagnetica emessa in determinate transizioni atomiche.

1 giorno sidereo
1 giorno solare





L'unità di tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- I giorni **siderei** sono di lunghezza uguale tra loro, i giorni **solari** no, a causa del moto della Terra attorno al Sole, che non avviene a velocità costante.
- Tuttavia, poiché la vita quotidiana è basata sul Sole, si preferì riferire l'unità di tempo al **giorno solare medio** (media calcolata in un anno): **$1 \text{ s} = 1/86400$** di giorno solare medio.
- Con il progredire della tecnica degli orologi atomici (nata nel 1949) si osservarono discrepanze rispetto alla periodicità terrestre (il giorno sidereo, misurato da un orologio atomico, **aumenta di 2 ms in un secolo** in conseguenza all'effetto delle maree).



L'unità di tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

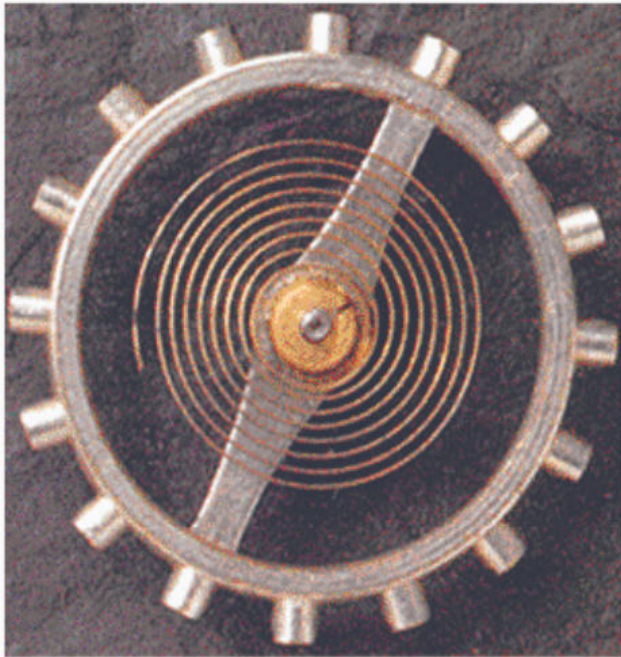
- Il secondo fu perciò ridefinito (1960) come una **frazione** di un **anno** particolare (l'anno **1900**).
- Nel 1967 il secondo fu nuovamente ridefinito, come **multiplo del periodo di oscillazione** (9.192.631.770 oscillazioni) della **radiazione elettromagnetica** emessa dagli atomi di **Cesio 133** in una particolare transizione.
- La precisione di un orologio atomico è circa una parte su **10^{13}** , ovvero esso sbaglia al massimo 1 secondo ogni 300000 anni).



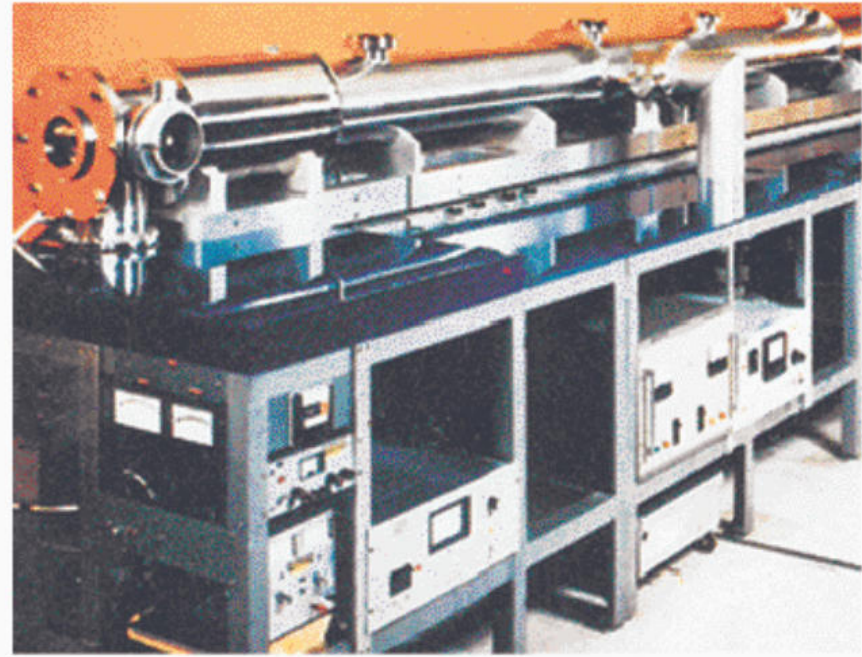
L'unità di tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



- bilanciere di un orologio meccanico



- orologio al cesio

<http://www.fondazioneocchialini.it>



L'unità di tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Oggi è possibile avere in casa o al polso un orologio sincronizzato con un orologio atomico.
- Un **orologio atomico**, presso il Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) a Braunschweig, (Berlino-Charlottenburg, Germania) è collegato a un'**antenna radio** situata a Mainflingen, a 24 km da Francoforte, che trasmette il segnale orario (DCF77) sulla frequenza di 77.5 kHz con una potenza di 50 kW fino a una distanza di 1500-2000 km.
- L'orologio ricevitore è in grado di sincronizzarsi con l'orologio atomico con uno scarto di circa 2 ms.





L'unità di tempo



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- È anche possibile sincronizzare gli orologi dei computer **via Internet** con un orologio atomico.
- Lo scarto tipico di è di alcune decine di millisecondi.
- L'operazione è consentita dal protocollo **NTP** (**Network Time Protocol**) che si appoggia su TCP/IP (lo stack di protocolli utilizzati da Internet).
- Client NTP sono disponibili in tutte le distribuzioni Linux e in Windows XP. Sulle precedenti versioni di Windows possono essere installati.
- Una lista dei time-server pubblici si può trovare all'URL <http://www.ntp.org/>.



L'unità di lunghezza



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il **metro** fu definito nel 1791 dall'Accademia delle Scienze di Parigi, come la **1/40.000.000 parte del meridiano terrestre**.
- Un **campione concreto** fu realizzato nel 1799 con un regolo di platino di sezione rettangolare di lunghezza pari a 1 m alla temperatura di fusione del ghiaccio.
- Si verificarono **discrepanze** tra le due definizioni e nel 1875 fu deciso di **non** riferire il metro alla Terra (che ha **dimensione variabile** in modo non prevedibile per i cambiamenti di forma della superficie terrestre) ma di riferirsi a un **nuovo campione**: una sbarra con sezione a X di platino-iridio (lega 90%-10%) con due tacche alla distanza di 1 m a 0°C (precisione 0.2 μm). Nel 1889 ne vennero costruite 30 copie, poi diffuse per il mondo.



L'unità di lunghezza



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Nel 1960 si definì il metro come un **multiplo della lunghezza d'onda** nel vuoto della luce rosso-arancione emessa dal **Cripton 86** in una particolare transizione (errore $0.01 \mu\text{m}$).
- Nel 1983 si è infine deciso di definire il metro come la **distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299.792.458$ di secondo**.
 - In questo modo si riducono le misure di lunghezza a misure di tempo.
 - Inoltre si fissa per convenzione la velocità della luce nel vuoto a $c = 299.792.458 \text{ m/s}$.



Descrizione intrinseca del moto

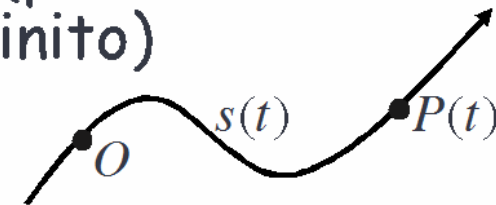


FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo un punto materiale che si muove (la sua posizione P si modifica nel tempo: $P=P(t)$) o, in maniera equivalente, il suo vettore posizionale:

$$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

- **Traiettoria**: linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto.
- Scegliendo sulla traiettoria un'**origine** O e un **verso**, si indica con s la lunghezza dell'arco OP (positiva se P segue O nel verso di percorrenza definito)
- **Legge oraria**: è la funzione $s = s(t)$.
- Da **traiettoria** e **legge oraria** si ha una descrizione completa del moto del punto (**descrizione intrinseca**).





Descrizione cartesiana del moto



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Una descrizione alternativa consiste nell'assegnare le 3 coordinate cartesiane x , y e z del punto P in funzione del tempo (**descrizione cartesiana**).

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(equazioni parametriche} \\ \text{con il tempo } t \text{ come parametro)} \end{array}$$

- Le equazioni parametriche, **se il parametro è il tempo**, forniscono una **descrizione completa** del moto del punto, diversa ma equivalente alla descrizione intrinseca.
- Se si sceglie l'origine degli assi cartesiani nel punto fisso O e si considera il corrispondente vettore posizionale, si ha:

$$\vec{r}(t) = P(t) - O = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$



Velocità del moto uniforme



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La velocità è un concetto introdotto per descrivere la "rapidità" con cui un punto materiale si sposta.
- Moto uniforme:** è il moto di un punto materiale che **percorre archi di traiettoria di ugual lunghezza in intervalli di tempo uguali**. La legge oraria si può perciò scrivere soltanto nella forma:

$$s(t) = vt + s_0$$

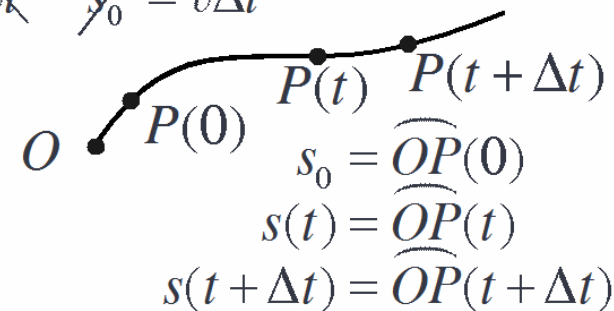
dove s_0 è il valore di s all'istante $t = 0$ e v è un parametro (costante). Se la funzione $s(t)$ non fosse di primo grado in t gli archi di traiettoria percorsi in intervalli di tempo uguali potrebbero non essere uguali.

- L'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo Δt è:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = v[t + \Delta t] + s_0 - vt - s_0 = v\Delta t$$

funzione

moltiplicazione





Velocità del moto uniforme



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

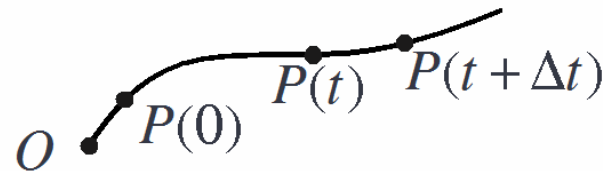
$$\Delta s = v\Delta t$$

- Segue che il parametro v si può esprimere come:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (\text{velocità nel moto uniforme})$$

ed è perciò tanto più grande quanto più lungo è l'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo fissato.

- Chiamiamo perciò **velocità** del moto uniforme tale parametro v .



$$\begin{aligned} s_0 &= \widehat{OP}(0) \\ s(t) &= \widehat{OP}(t) \\ s(t + \Delta t) &= \widehat{OP}(t + \Delta t) \end{aligned}$$



Velocità del moto vario



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Nel **moto vario** (cioè **non-uniforme**) possiamo definire la **velocità media**:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- tuttavia v_m dipende, oltre che da t , anche da Δt (durante il tempo Δt la velocità può cambiare).
- Introduciamo allora la **velocità istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La velocità istantanea è la derivata di s rispetto a t .



La misura della velocità istantanea



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Volendo misurare sperimentalmente la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre precisare operativamente il procedimento di misura, considerando la **sensibilità**, sempre limitata, degli **strumenti di misura**.

- L'intervallo di tempo Δt **non può essere scelto piccolo ad arbitrio**:
 - se Δt è più piccolo della sensibilità del cronometro utilizzato per la misura, la misura di Δt dà risultato nullo.
 - se Δt è molto piccolo, può anche accadere che lo spostamento Δs sia inferiore alla sensibilità dello strumento di misura della lunghezza. Di conseguenza la misura di Δs dà risultato nullo.



La misura della velocità istantanea



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per misurare la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre scegliere gli intervalli Δt e Δs in modo che:

- Tali intervalli siano **sufficientemente piccoli** che lo stato di moto in essi non subisca variazioni apprezzabili nel contesto che stiamo considerando (cioè data la precisione di cui abbiamo bisogno).
- Tali intervalli siano **sufficientemente grandi** da potere essere misurati con gli strumenti di misura di cui disponiamo.



Velocità istantanea e traiettoria nella fisica microscopica



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- La limitazione del concetto di velocità istantanea non è dovuta soltanto nella limitazione della sensibilità degli strumenti di misura.
- I concetti di **velocità istantanea** (derivata dallo spostamento rispetto al tempo) e di **traiettoria** (linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto) di un punto materiale **hanno senso soltanto se un punto materiale ha una posizione definita in ogni istante di tempo.**
- Lo studio sperimentale del moto delle **particelle atomiche e sub-atomiche** mostra che esse **non hanno una ben definita posizione in un certo istante di tempo:**
 - I concetti di **traiettoria** e di **velocità istantanea** **perdono significato** nel caso delle particelle atomiche e sub-atomiche.



Velocità istantanea di un elettrone libero



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- In particolare, risolvendo le equazioni del moto della meccanica quantistica (equazioni di Heisenberg) si trova che la misura di una componente della velocità istantanea di un elettrone libero può dare come risultato soltanto $\pm c$ (dove c è la velocità della luce nel vuoto).
- La velocità osservata degli elettroni, che è sempre una velocità media, è invece sempre minore di c .
- Segue che la velocità istantanea di un elettrone libero non è affatto costante, ma oscilla rapidamente (con velocità che può avere soltanto i valori $\pm c$) attorno a un valore medio che è il valore osservato.



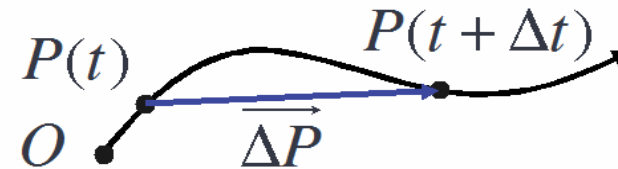
Velocità vettoriale



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- In un **moto curvilineo** la **direzione** del moto **varia nel tempo**. v contiene informazioni sulla rapidità di spostamento, ma non sulla direzione.
- Si può compendiare in un'unica grandezza fisica la rapidità del moto e la sua direzione.
- Consideriamo lo spostamento di un punto P in un intervallo Δt , ma invece di misurare lo spostamento lungo la traiettoria, consideriamo lo spostamento **"in linea d'aria"**, ovvero il segmento orientato:

$$\vec{\Delta P} = P(t + \Delta t) - P(t)$$



- Possiamo ora definire la **velocità media vettoriale**:

$$\vec{v}_m = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$



Velocità vettoriale



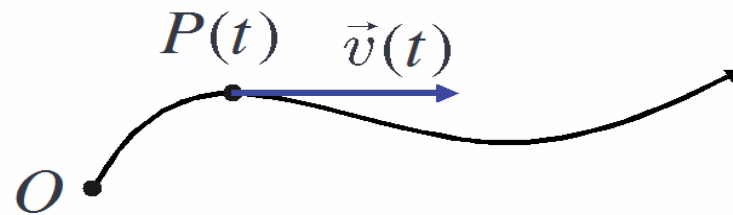
FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Essa ha la stessa direzione dello spostamento e modulo tanto più grande quanto maggiore lo spostamento ("in linea d'aria") compiuto in un intervallo di tempo fissato.
- Si può definire anche la **velocità istantanea vettoriale**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}$$

che dunque è la derivata del punto (o del vettore posizionale) rispetto al tempo.

- La direzione di \vec{v} è **tangente alla traiettoria** nel punto $P(t)$





Velocità vettoriale



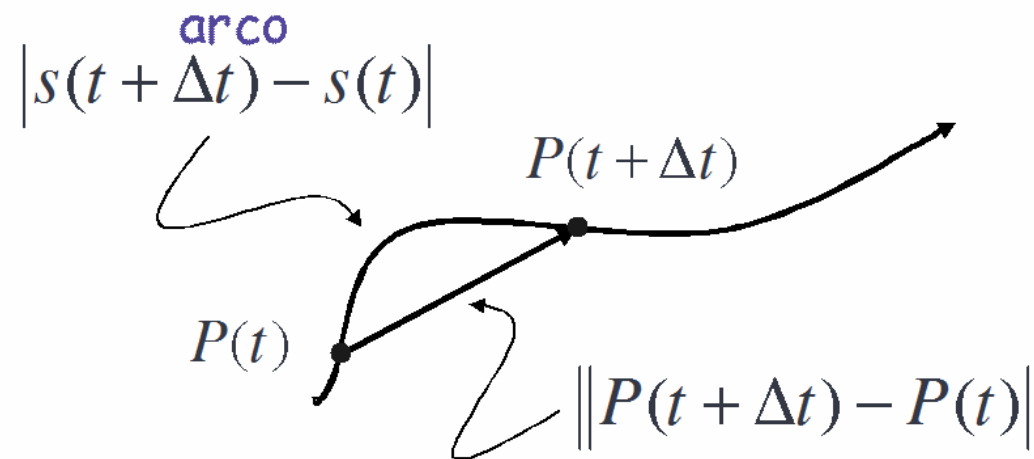
FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Poiché nel limite di un arco infinitesimo, la corda approssima l'arco, si ha:

$$\| \underbrace{P(t + \Delta t) - P(t)}_{\text{corda}} \| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{|s(t + \Delta t) - s(t)|}_{\text{arco}}$$

per cui il modulo della velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare prima definita:

$$\|\vec{v}\| = |\dot{s}|$$





Rappresentazioni della velocità



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Se chiamiamo \hat{t} un versore tangente alla traiettoria, col verso concorde a quello del moto, si ha:

$$\vec{v} = s\hat{t}$$

- (rappresentazione **intrinseca** della velocità).
- Se deriviamo l'espressione:

$$P - O = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- considerando che i versori cartesiani sono costanti:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

- (rappresentazione **cartesiana** della velocità).



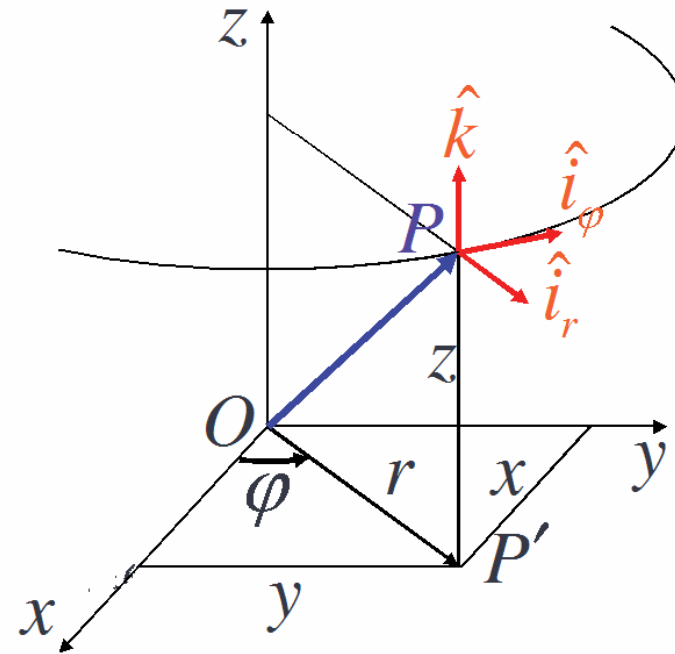
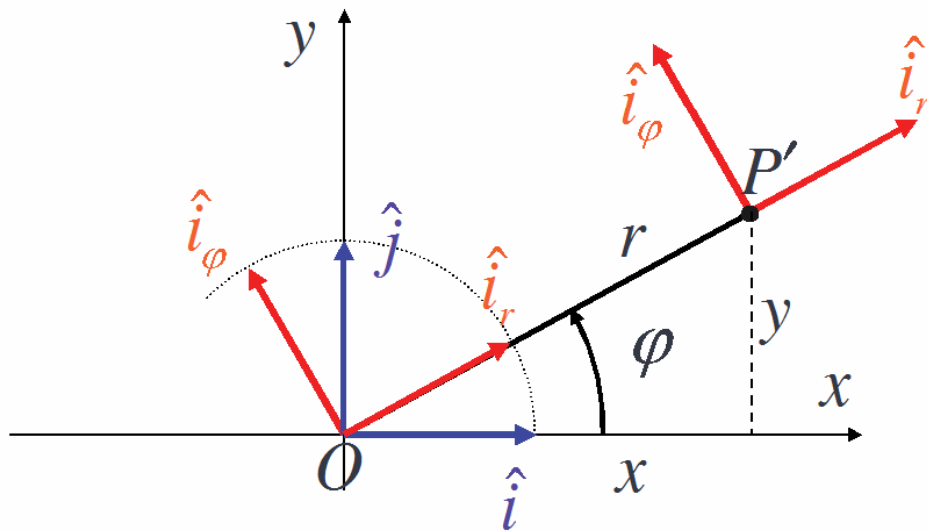
Coordinate polari cilindriche



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \text{vers}(P' - O) \\ \hat{i}_\varphi = \hat{k} \wedge \hat{i}_r \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$





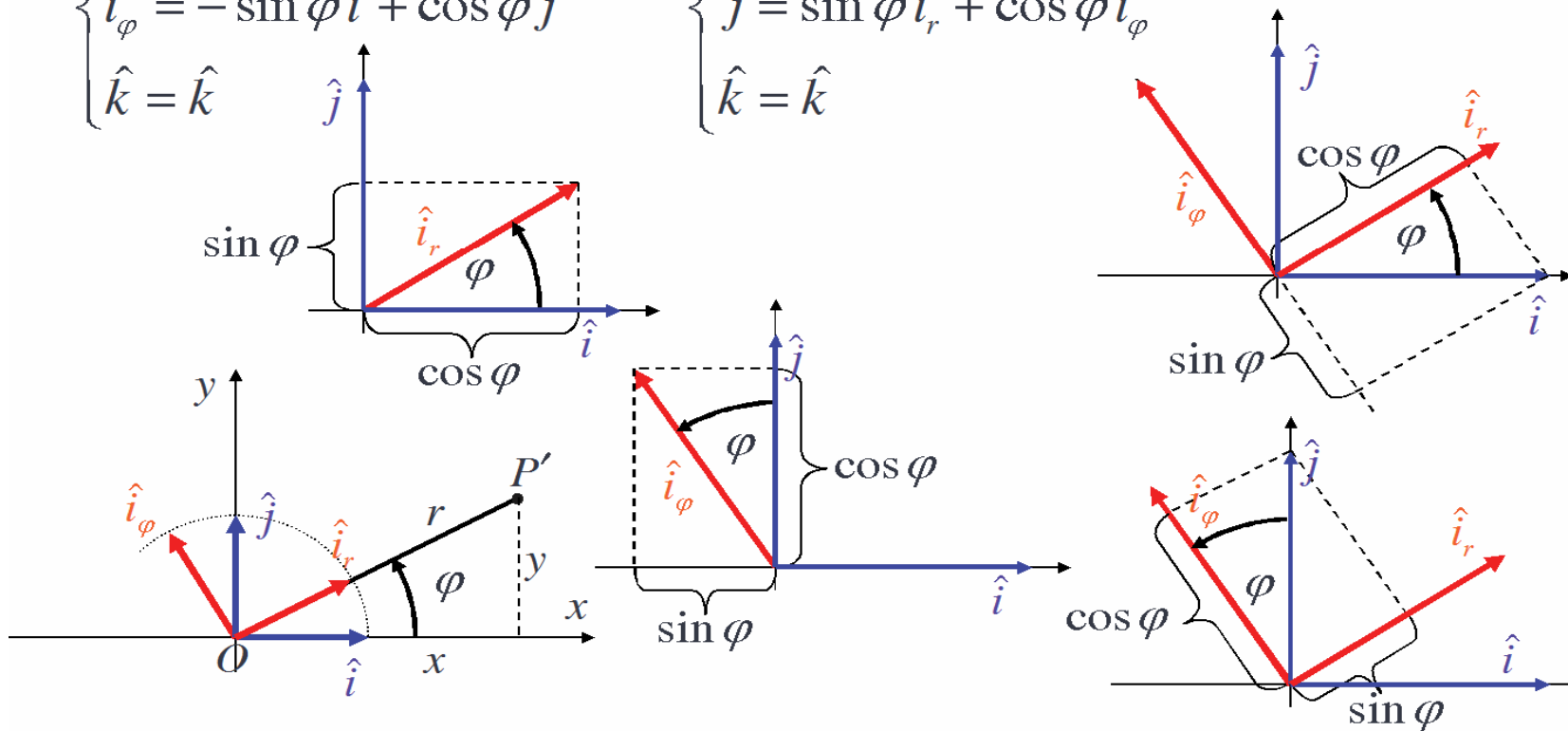
Coordinate polari cilindriche



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{i}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i} = \cos \varphi \hat{i}_r - \sin \varphi \hat{i}_\varphi \\ \hat{j} = \sin \varphi \hat{i}_r + \cos \varphi \hat{i}_\varphi \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$





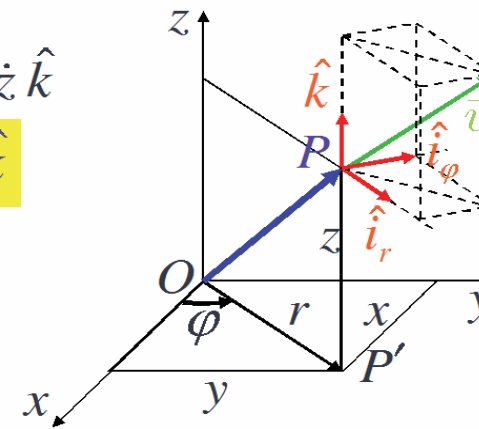
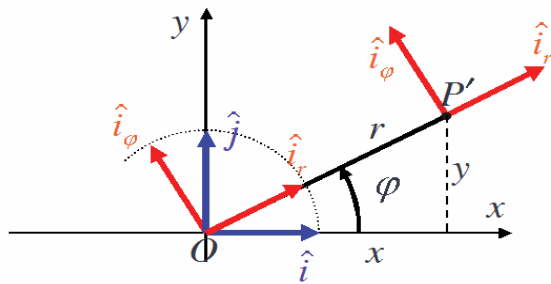
Rappresentazione della velocità in coordinate cilindriche



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}_r}{dt} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \hat{i} + \dot{\varphi} \cos \varphi \hat{j} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) = \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi \\ \frac{d\hat{i}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \hat{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \hat{j} = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) = -\dot{\varphi} \hat{i}_r \\ \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P - O &= r \hat{i}_r + z \hat{k} \\ \vec{v} = \dot{P} &= \dot{r} \hat{i}_r + r \dot{\hat{i}}_r + \dot{z} \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{r} \hat{i}_r + r \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi + \dot{z} \hat{k} \end{aligned}$$



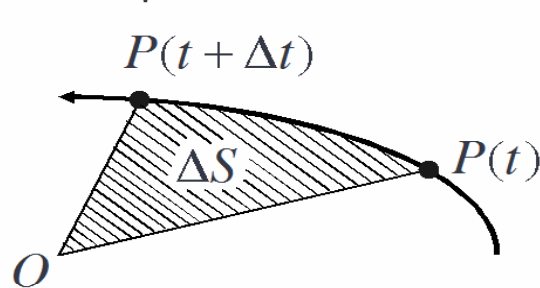


Velocità aerolare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

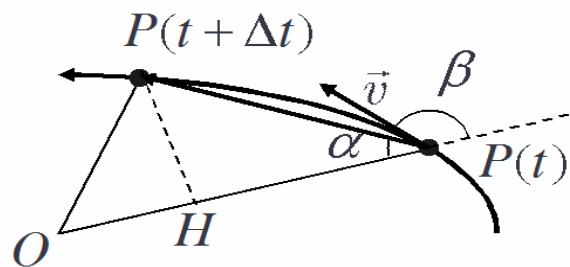
- Si definisce **velocità areolare** l'area spazzata dal vettore posizionale nell'unità di tempo:



$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\|P(t) - O\|}_{\text{base}} \underbrace{\|P(t + \Delta t) - H\|}_{\text{altezza}} =$$

$$= \frac{1}{2} \|P(t) - O\| \|P(t + \Delta t) - P(t)\| |\sin \alpha|$$



$$A \simeq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \|P(t) - O\| \left\| \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| |\sin \alpha| \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \|P(t) - O\| \left\| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| |\sin(\pi - \beta)| =$$

$$\alpha \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \pi - \beta$$

$$\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \|P - O\| v |\sin \beta|$$



Velocità areolare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Possiamo definire la velocità areolare come **vettore**:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (P - O) \wedge \vec{v}$$

- In tal caso essa risulta perpendicolare al piano del moto.
- La velocità areolare è pari alla **metà del momento della velocità rispetto al centro di riduzione O** .



Accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Rappresenta quantitativamente la **rapidità con cui varia la velocità di un punto**.
- Possiamo quindi definire **accelerazione media** il rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- e **accelerazione istantanea** il limite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{P} = \frac{d^2 P}{dt^2}$$



Espressione intrinseca dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l'espressione:

$$\vec{v} = \dot{\hat{t}}$$

- Si ottiene:

$$\vec{a} = \ddot{\hat{t}} + \dot{\hat{t}}$$

- Dobbiamo valutare $\dot{\hat{t}}$, che si può anche scrivere nella forma:

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \dot{s}$$

- Consideriamo inizialmente una traiettoria circolare e cerchiamo di determinare:

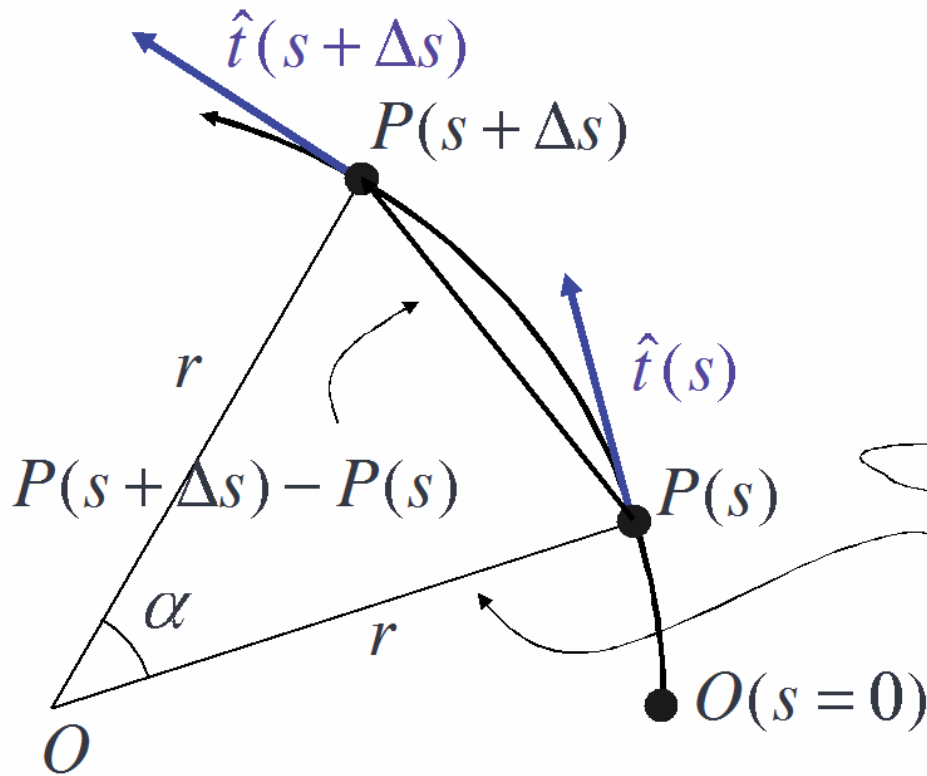
$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$



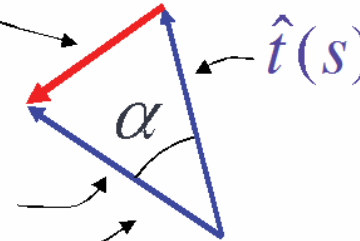
Espressione intrinseca dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\Delta \hat{t} = \hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)$$



triangoli isosceli simili (hanno gli angoli rispettivamente uguali: $\alpha, (\pi - \alpha)/2, (\pi - \alpha)/2$).

$$\frac{\|\Delta \hat{t}\|}{\|P(s + \Delta s) - P(s)\|} = \frac{\|\hat{t}(s)\|}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\|\Delta \hat{t}\| = \frac{\|P(s + \Delta s) - P(s)\|}{r}$$

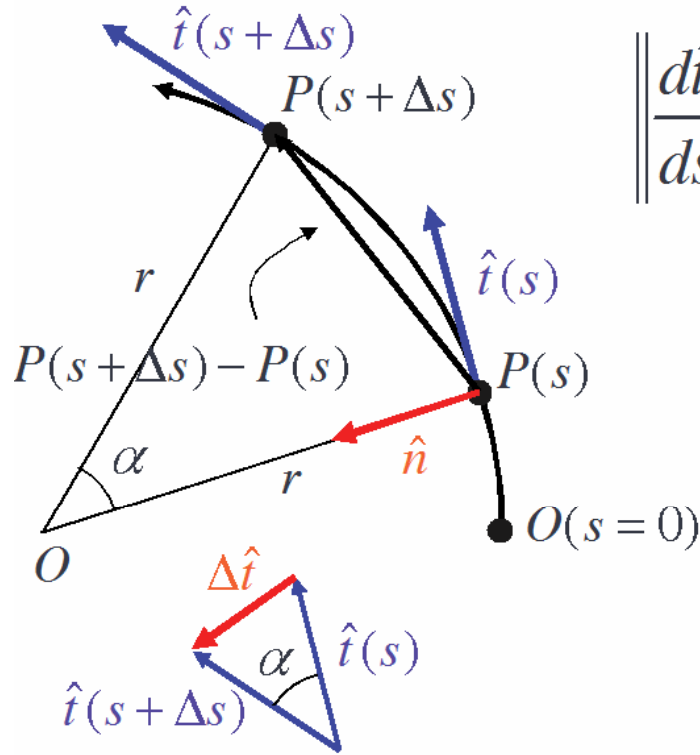
$$\alpha \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta \hat{t} \perp \hat{t}$$



Espressione intrinseca dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \hat{t}\|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \frac{\|P(s + \Delta s) - P(s)\|}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|P(s + \Delta s) - P(s)\|}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$

corda

$$\left. \begin{aligned} \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| &= \frac{1}{r} \\ \Delta \hat{t} &\perp \hat{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{r} \hat{n}$$

arco

- dove \hat{n} é il versore radiale **centripeto**, detto **normale** alla traiettoria.



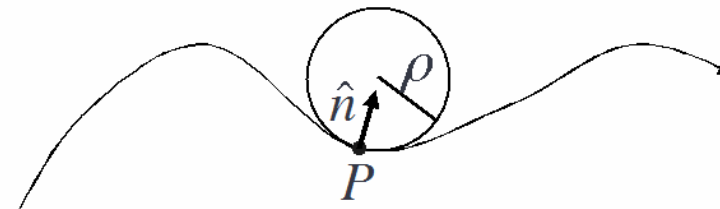
Espressione intrinseca dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può passare da una traiettoria circolare a una **traiettoria generica** approssimandone ogni tratto infinitesimo con un arco di circonferenza.
- La geometria analitica dimostra che in generale questo arco infinitesimo esiste e fa parte di una **circonferenza** detta **osculatrice** alla traiettoria in P , giace su di un piano detto **piano osculatore** della traiettoria in P e ha un raggio detto **raggio di curvatura** della traiettoria in P .
- Indicando con ρ il raggio di curvatura, si ha, per una traiettoria qualunque:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{n}$$





Espressione intrinseca dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- L'**espressione intrinseca dell'accelerazione** diviene quindi:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

- Non vi è mai componente **binormale**, ovvero componente in direzione: $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$
- Mentre la **velocità è sempre tangente** alla traiettoria, l'**accelerazione possiede una componente tangenziale e una normale**.
 - Se il moto è **rettilineo** ($\rho \rightarrow \infty$) la componente normale si annulla e rimane **soltanto la componente tangenziale**.
 - Se il moto è **uniforme** (\dot{s} costante) la componente tangenziale si annulla e rimane **soltanto la componente normale**.



Espressione cartesiana dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l'espressione cartesiana della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

- essendo i versori cartesiani costanti, si ottiene l'**espressione cartesiana dell'accelerazione**:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$



Espressione polare cilindrica dell'accelerazione



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l'espressione polare cilindrica della velocità:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{i}_r + r \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi + \dot{z} \hat{k}$$

- e ricordando le derivate dei versori:

$$\dot{\hat{i}}_r = \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi, \quad \dot{\hat{i}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{i}_r$$

- Si ottiene l'**espressione polare cilindrica dell'accelerazione**:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\ddot{r} \hat{i}_r + \dot{r} \dot{\hat{i}}_r \right) + \left(\dot{r} \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{i}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\hat{i}}_\varphi \right) + \ddot{z} \hat{k} = \\ &= \ddot{r} \hat{i}_r + \dot{r} \left(\dot{\varphi} \hat{i}_\varphi \right) + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{i}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{i}_\varphi + r \dot{\varphi} \left(-\dot{\varphi} \hat{i}_r \right) + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \right) \hat{i}_r + \left(2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} \right) \hat{i}_\varphi + \ddot{z} \hat{k}$$



Gradi di libertà



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per descrivere la posizione di un punto materiale sono necessari e sufficienti 3 parametri (p.es.: 3 coordinate cartesiane, cilindriche o sferiche). Si dice allora che un **punto materiale** P ha **3 gradi di libertà**.
- Si chiama **numero dei gradi di libertà** (GdL) di un sistema meccanico qualunque il **minimo numero di parametri necessari per individuare una sua generica configurazione**.
- Un sistema di n **punti materiali liberi** ha **$3n$ gradi di libertà**.
- Una **restrizione** ai movimenti di un sistema meccanico si chiama **vincolo**. Ogni vincolo **permette** certi movimenti ma ne **vieta** altri.
- Un punto materiale vincolato a muoversi su di una **superficie** ha **2 GdL** (p.es.: pezzi sulla scacchiera, posizione GPS sulla superficie terrestre). Si può continuare a usare 3 coordinate, ma esse non sono indipendenti (p.es.: sulla superficie terrestre $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, su di un piano $z=0$, ecc.)

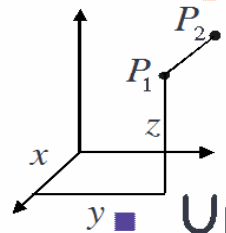


Gradi di libertà



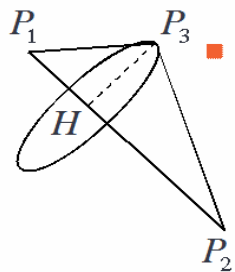
FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un punto materiale vincolato a muoversi su di una **linea** ha **1 GdL** (è sufficiente il parametro s).
- Un sistema di **2 punti materiali** P_1 e P_2 vincolati a mantenere **distanza inalterata** $\|P_2 - P_1\|$ ha **5 GdL**.



- Infatti con 3 coordinate si descrive la posizione di P_1 . Fissato P_1, P_2 si trova su di una superficie sferica di raggio $\|P_2 - P_1\|$ e centro fissato P_1 , quindi bastano soltanto 2 parametri per determinare la sua posizione.

- Un sistema di **3 punti materiali** vincolato a mantenere **inalterate le mutue distanze** ha **6 GdL**.



- Infatti, usate 5 coordinate per fissare P_1 e P_2 , occorre 1 sola coordinata per determinare la posizione di P_3 (P_3 si trova sulla circonferenza di centro H e raggio $\|P_3 - H\|$).



Gradi di libertà



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un sistema di 4 punti materiali vincolati a mantenere inalterate le mutue distanze ha 6 GdL.
 - La posizione del quarto punto è fissata dagli altri 3.
- Un sistema di $n \geq 4$ punti materiali vincolati a mantenere inalterate le mutue distanze ha 6 GdL.
- Un sistema di n punti materiali vincolati a mantenere inalterate le mutue distanze si chiama **corpo rigido**.
- Un **corpo rigido libero** ha 6 GdL.
 - Le velocità di tutti i punti che compongono un corpo rigido si ricava da 2 vettori (6 scalari).



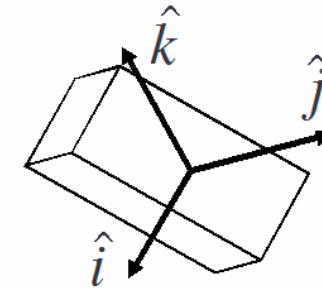
Moto di un corpo rigido



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo un **SdR solidale al corpo rigido** e scegliamo in esso una terna cartesiana di versori \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} ortogonali tra loro.
- In generale i **versori cambiano continuamente direzione**, ma **restano ortogonali tra loro e unitari**:

$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \end{cases}$$



- Le derivate rispetto al tempo dei versori non sono nulle (essi hanno modulo costante ma direzione variabile). Derivando le relazioni qui sopra si ha:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{i} = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{j} = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{k} = 0 \\ \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} + \hat{i} \cdot \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k} + \hat{j} \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i} + \hat{k} \cdot \frac{d\hat{i}}{dt} = 0 \end{cases}$$

N.B.: $\begin{cases} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \\ \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} \end{cases}$



Moto di un corpo rigido



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un generico vettore si può scrivere, per componenti:

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{v} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{v} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

- Definendo i 3 simboli:

$$\omega_1 = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k}, \quad \omega_2 = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i}, \quad \omega_3 = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$$

- si può scrivere:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{i} \right) \hat{i} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} \right) \hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{k} \right) \hat{k} = 0\hat{i} + \omega_3\hat{j} - \omega_2\hat{k}$$

N.B.: $\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i} + \hat{k} \cdot \frac{d\hat{i}}{dt} = 0$

- e analogamente per gli altri versori:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_3\hat{j} - \omega_2\hat{k}, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \omega_1\hat{k} - \omega_3\hat{i}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_2\hat{i} - \omega_1\hat{j}$$



Moto di un corpo rigido



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Oppure, definito il vettore:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}$$

- Si ha:

$$\vec{\omega} \wedge \hat{i} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3 \hat{j} - \omega_2 \hat{k}$$

$$\vec{\omega} \wedge \hat{j} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \omega_1 \hat{k} - \omega_3 \hat{i}$$

$$\vec{\omega} \wedge \hat{k} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1 \hat{j}$$

⇒

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k} \end{cases}$$

(formule di
Poisson)



Moto di un corpo rigido



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per un **generico versore** \hat{u} **solidale** al corpo rigido:

$$\hat{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}, \quad (u_x, u_y, u_z \text{ costanti se } \hat{u} \text{ è solidale})$$

- si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} &= u_x \frac{d\hat{i}}{dt} + u_y \frac{d\hat{j}}{dt} + u_z \frac{d\hat{k}}{dt} = u_x \vec{\omega} \wedge \hat{i} + u_y \vec{\omega} \wedge \hat{j} + u_z \vec{\omega} \wedge \hat{k} = \\ &= \vec{\omega} \wedge (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}) = \vec{\omega} \wedge \hat{u} \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{u}$$

- $\vec{\omega}$ **dipende** perciò soltanto dal **modo in cui si muove** il corpo rigido e non dalla scelta del versore.



Moto di un corpo rigido



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo il segmento orientato che connette **due punti qualunque, P e O** , di un corpo rigido. Per il vincolo di rigidità:

$$\|P - O\| = r \equiv \text{cost}$$

$$P - O = r\hat{u}$$

- Si ha perciò, chiamando $\vec{v}_P = \dot{P}$ e $\vec{v}_O = \dot{O}$ le velocità dei due punti:

$$\dot{P} - \dot{O} = r\dot{\hat{u}} = r\vec{\omega} \wedge \hat{u} = \vec{\omega} \wedge (r\hat{u}) = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

- **(formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi).**

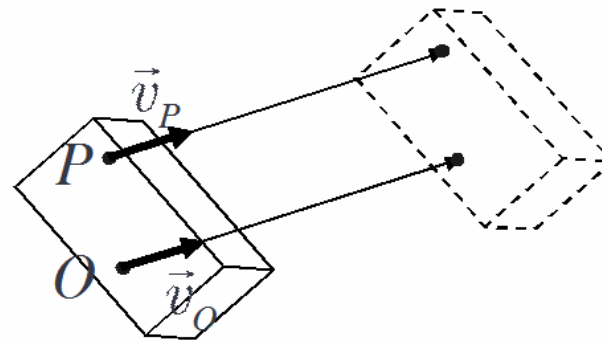


Moto traslatorio

- Se $\vec{\omega} = \vec{0}$ il moto si dice **traslatorio**

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O \quad \forall P$$

- Le velocità di tutti i punti del corpo rigido sono uguali tra loro.





Moto rotatorio



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

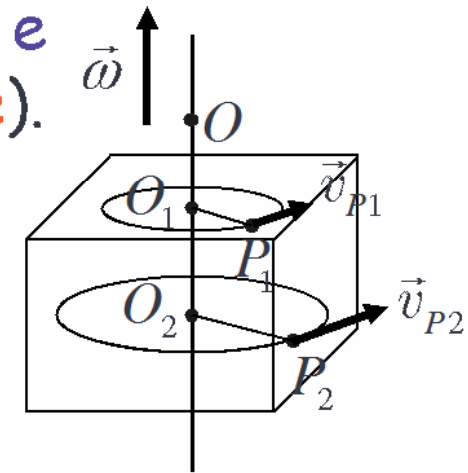
- Se esiste almeno un punto O tale che $\vec{v}_O = \vec{0}$ il moto si dice **rotatorio**:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

- Tutti i punti O_i della retta passante per O e parallela a $\vec{\omega}$ sono fissi (**asse di rotazione**).

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{\omega} \wedge (O_i - O) = \vec{0} \text{ poiché } \vec{\omega} \parallel (O_i - O)$$

- Gli altri punti P_i descrivono **traiettorie circolari** di centro O_i , giacenti in piani perpendicolari all'asse di rotazione (debbono avere distanza fissa dall'asse di rotazione, per i vincoli di rigidità).



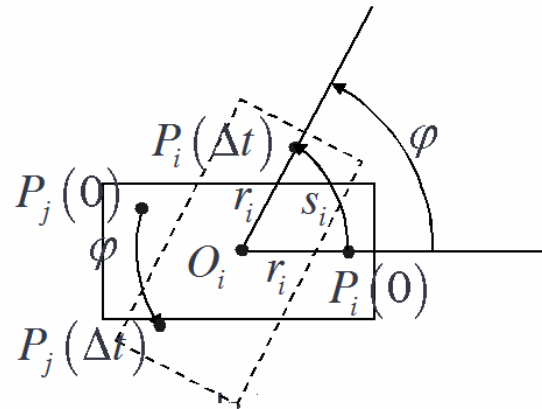


Moto rotatorio



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Se chiamiamo $\|P_i - O_i\| = r_i$ allora:
$$v_{P_i} = \|\vec{v}_{P_i}\| = \|\vec{\omega} \wedge (P_i - O_i)\| = \omega r_i \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = \omega r_i$$
- cioè la velocità di un punto è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione.
- L'angolo φ che $P_i(\Delta t) - O_i$ forma con $P_i(0) - O_i$ (ovvero l'angolo di cui ruota il sistema nel tempo Δt) è lo stesso per tutti i punti a causa del vincolo di rigidità.





Velocità angolare



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Lungo la traiettoria circolare descritta dal punto P_i

$$s_i = r_i \varphi \Rightarrow \dot{s}_i = r_i \dot{\varphi} \Rightarrow v_i = |\dot{s}_i| = r_i |\dot{\varphi}| \Rightarrow \omega = \frac{v_i}{r_i} = |\dot{\varphi}|$$

- Scelto il versore \hat{u} dell'asse di rotazione con la regola della mano destra, si può scrivere:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{u}$$

- $\vec{\omega}$ è perciò chiamato **velocità angolare**.
- Si **noti bene** che **non** si può scrivere ~~$\vec{\omega} = \dot{\varphi}$~~ in quanto, come abbiamo visto, le rotazioni non sono vettori.

