Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali:
la relatività della simultaneità

Richiamando ancora la trasformazione del tempo da O' ad O

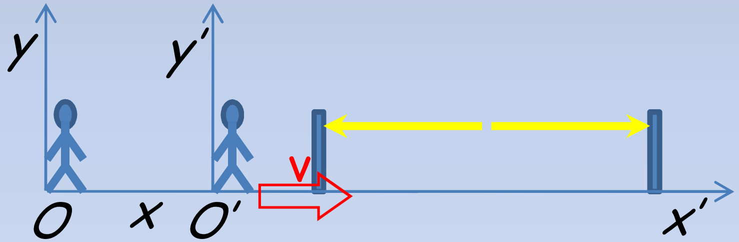
$$1) \qquad (t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

A

B

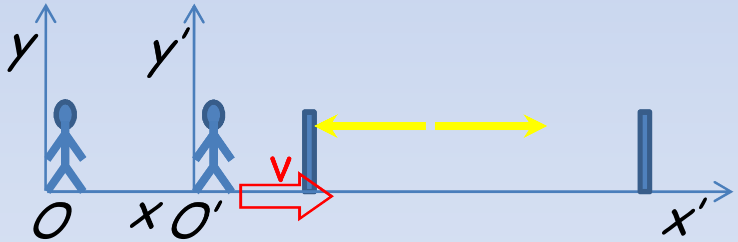
cercheremo ora di individuare un fenomeno dove il termina A sia non nullo in modo da capirne il significato. La cosa più semplice è individuare un fenomeno tale che *(t_2'-t_1')=0* in modo che l'unico termine attivo sia proprio quello che ci interessa.

Per saggiare il significato del termine A allora, immaginiamo che nel riferimento O', lungo la direzione *x'* siano disposti due traguardi distanti Δx_0 nelle posizioni x_1' e x_2'. Ad un certo istante, dal punto di mezzo (tra i due traguardi) due raggi luminosi partono lungo l'asse x' in versi opposti raggiungendo dopo un certo tempo i traguardi stessi. Senza dubbio *per l'osservatore O' i raggi raggiungono i traguardi contemporaneamente.*



I due eventi fisici, in questo caso, sono rappresentati dall'arrivo dei raggi luminosi sui traguardi ed hanno (per l'osservatore O') la seguente separazione spaziale

$$(x_2' - x_1') = \Delta x_0$$



Mentre, per quanto detto, hanno una separazione temporale nulla

$$(t_2' - t_1') = \Delta t_0 = 0$$

Notiamo subito che, secondo la formula, al contrario di O', l'osservatore O vede i due eventi non contemporanei. La loro distanza temporale vale infatti

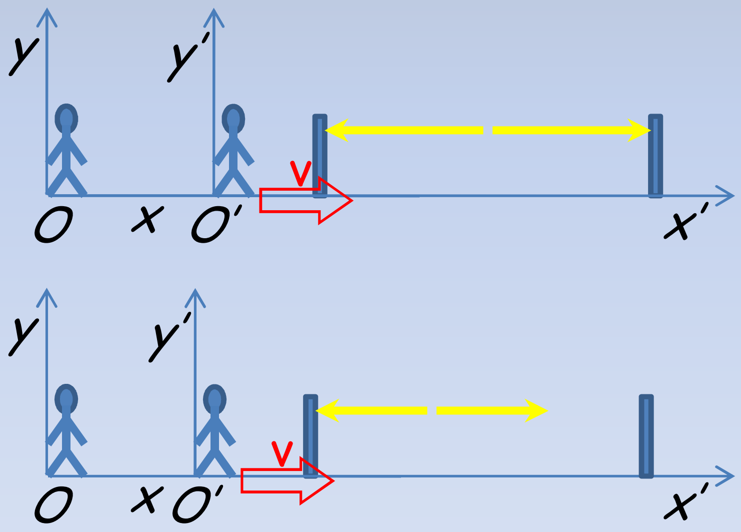
$$(t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t_M = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Concludiamo allora che ***due eventi simultanei per l'osservatore in quiete non sono simultanei per l'osservatore in movimento che li vede separati temporalmente in modo crescente con la loro distanza (nel riferimento in quiete).***

Si tratta di un fenomeno formalmente dovuto al termine A della 1) la cui origine è pertanto differente da quello della dilatazione dei tempi vista pocanzi. Viene detto ***de-sincronizzazione degli intervalli temporali*** o ***de-sincronizzazione del tempo*** e mostra che ***secondo le trasformazioni di Lorentz la simultaneità di eventi fisici spazialmente separati vale per un osservatore inerziale ma non per gli altri***. Contrariamente a quanto accade con le trasformazioni di Galileo, secondo le trasformazioni di Lorentz ***la simultaneità degli eventi fisici è un concetto relativo.***

E' utile arrivare allo stesso risultato ragionando direttamente con i raggi luminosi !



L'osservatore O' vede i raggi luminosi partire dal centro, tra i due traguardi, e raggiungere gli stessi nello medesimo istante per cui afferma che $\Delta t'=0$. Le posizioni però sono differenti essendo $\Delta x'=\Delta x_0$.

L'osservatore O invece vede il raggio 1) che raggiunge il traguardo prima del raggio 2). In particolare per lui il raggio 1) raggiunge il traguardo ad un tempo t_1 dopo l'emissione dato da

$$x_0 - ct_1 = x_0 - \frac{L_M}{2} + vt_1$$

si noti che abbiamo indicato la distanza tra i traguardi con L_M e non semplicemente con L perché L è la distanza tra i traguardi nel riferimento O' in cui sono in quiete e noi vogliamo prevedere la possibilità che tale distanza possa essere differente per l'osservatore O che invece li vede in moto.

Analogamente per il raggio 2) avremo

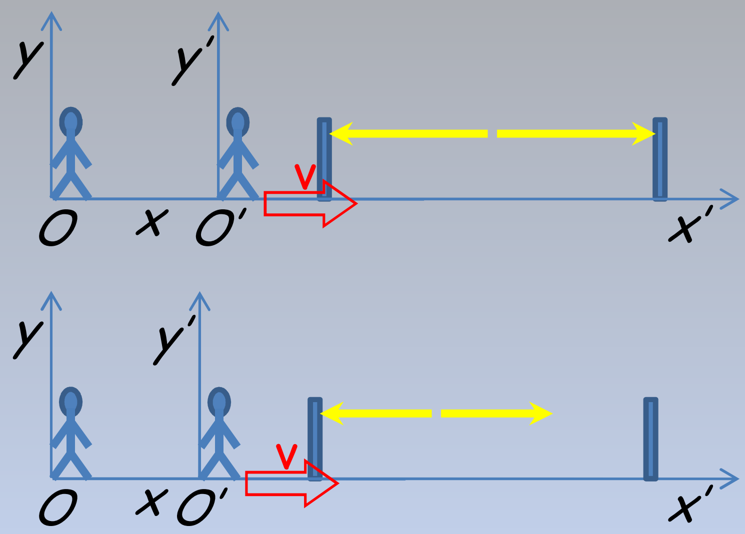
$$x_0 + ct_2 = x_0 + \frac{L_M}{2} + vt_2$$

Dalle precedenti relazioni ricaviamo allora

$$t_1 = \frac{L_M/2}{c+v} \qquad t_2 = \frac{L_M/2}{c-v}$$

e quindi la separazione temporale tra gli eventi misurata da O che vale

$$1) \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} L_M}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



Questa formula è simile a quella che abbiamo visto in precedenza

$$2) \quad (t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2} L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ma non uguale. Affinchè lo siano è necessario che

$$\frac{\frac{v}{c^2} L_M}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2} L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene $\quad 3) \quad L_M = L\sqrt{1-v^2/c^2}$

Ovvero è necessario ammettere che una distanza lungo la direzione del moto che l'osservatore in quiete misura di valore *L* viene misurata con una valore L_M più corto da quello in moto. Torneremo su questo fenomeno che prende il nome di contrazione delle lunghezze ma per ora ammettiamolo in modo da ottenere sostituendo la 3) in 1)

$$4) \quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} L\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v}{c^2} L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Introducendo dunque l'effetto della contrazione delle lunghezze abbiamo ricostruito con la sola cinematica dei raggi luminosi la formula

$$4)\quad t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

che possiamo riscrivere immediatamente come

$$\Delta t_M = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e che è in effetti è identica a quella che volevamo interpretare.
Dunque ***mentre l'osservatore O' vede i raggi luminosi raggiungere i traguardi nello stesso istante, l'osservatore O vede i due raggi raggiungere i traguardi in istanti diversi poiché per lui uno corre incontro al traguardo mentre l'altro lo insegue.***
Questo fatto è davvero notevole! Infatti un intervallo che l'osservatore O' giudica puramente spaziale (si ricordi che i traguardi sono raggiunti nello stesso istante per lui) viene interpretato come spaziale da O (i due traguardi sono raggiunti in punti diversi anche per lui) ma anche come temporale poiché i due eventi non sono simultanei per lui. Questo fatto mostra che la natura spaziale o temporale di un intervallo è una questione di punti vista non una proprietà assoluta indipendente dal riferimento.
Vale la pena ricordare a questo proposito che le trasformazioni di Galileo ammettevano che un intervallo puramente temporale per un osservatore potesse essere interpretato come spaziale e temporale da un altro (fenomeno periodico per O' si chiude in tempi diversi ed in punti diversi per O). Tuttavia un intervallo puramente spaziale per un osservatore rimaneva tale per ogni altro. In relatività il cerchio si chiude e si osserva una completa reversibilità dei punti di vista per cui ***la definizione della natura spaziale o temporale di un intervallo acquisisce un carattere completamente relativo.***

Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali:
la contrazione delle lunghezze

Le trasformazioni di Lorentz affermano che gli intervalli spaziali disposti perpendicolarmente alla direzione del moto sono misurati con lo stesso valore da tutti gli osservatori inerziali. Di questi dunque non ci occuperemo.

Diversa è invece la situazione per gli intervalli spaziali disposti lungo la direzione del moto. Richiamiamo le trasformazioni

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Per studiare il significato di questa trasformazione si può immaginare di considerare due eventi che avvengono nel riferimento O' nello stesso istante ($t'_1 = t'_2$) ma in punti differenti x_1' e x_2' ad una distanza L'. Avremo dunque i seguenti intervalli

$$(t_2' - t_1') = 0 \qquad (x_2' - x_1') = L$$

che sostituiti nella legge di trasformazione forniscono

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x_2 - x_1 = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad L = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene che la distanza che O' misura L', viene misurata con valore L da O che risulta essere più lunga. Questo ragionamento *sembrerebbe condurci verso l'effetto della dilatazione delle lunghezze.*

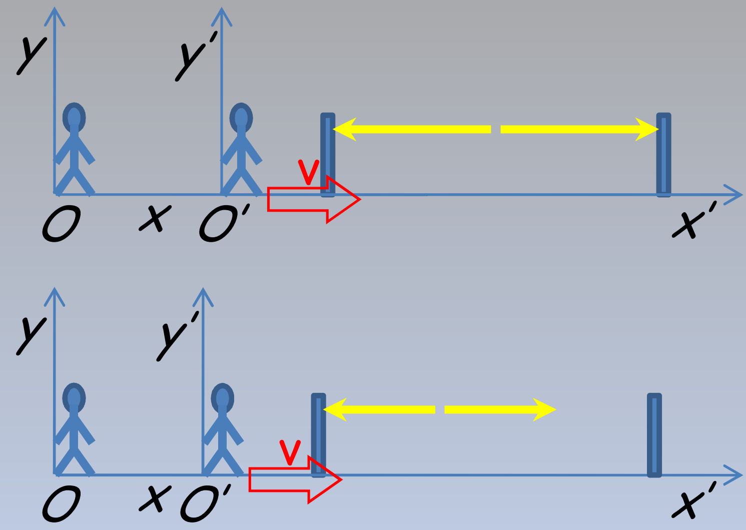
C'è un errore in questa impostazione che possiamo cercare di chiarire con un esempio.

Immaginiamo di dovere misurare la lunghezza di un treno in transito nella stazione. Potremmo innanzitutto disporre osservatori dotati di cronometro lungo il marciapiede per una lunghezza sufficiente a comprendere l'intero treno. Poi i cronometri dovranno essere sincronizzati tra loro ovvero marciare perfettamente paralleli (Si può pensare di inviare un segnale luminoso lungo il marciapiede ricevuto il quale ogni osservatore posizionerà il cronometro ad un tempo anticipato pari a d/c dove d è la distanza dell'osservatore dal punto di emissione del segnale). Al passaggio del treno ogni osservatore annoterà i tempi in cui vede di fronte a se la testa o la coda del treno. E' ragionevole assumere come lunghezza del treno la distanza di due osservatori (qualunque) che vedono la testa e la coda del treno nello stesso istante.

<u>Dunque la distanza dei traguardi misurata da O può essere definita come la distanza tra due osservatori in quiete nel riferimento O che vedono, nello stesso istante, i due traguardi nei punti dello spazio da loro occupati.</u>

In questa misura è cruciale il concetto di simultaneità che essendo relativo ci fa capire immediatamente che osservatori inerziali in moto relativo misureranno valori differenti della distanza tra i traguardi ed, in particolare, valori differenti da quello misurato dall'osservatore in quiete rispetto ai medesimi.

Prima di anticipare le conclusioni troviamo comunque la relazione tra la distanza misurata da O' (osservatore in quiete rispetto ai traguardi) e quella misurata da O (osservatore che vede i traguardi in moto).



Siano dati allora nel riferimento O', lungo la direzione *x'*, due traguardi fermi distanti *L* nelle posizioni x_1' e x_2'. Come osservato in precedenza O' può decidere di misurare la distanza tra i traguardi come vuole, essendo fermi il tempo non gioca alcun ruolo nella sua misura e si ha

$$(x_2' - x_1') = L \qquad (t_2' - t_1') = qualunque$$

Sulla base della definizione data invece la distanza tra i traguardi misurata dall'osservatore O coincide con la distanza degli osservatori in quiete in O che vedono i traguardi nello stesso istante'

$$(x_2 - x_1) = L_M \qquad (t_2 - t_1) = 0$$

dove il pedice M ricorda che si tratta di una distanza tra oggetti (traguardi) in movimento.

Dalle trasformazioni di Lorentz per gli intervalli abbiamo

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_M = \dfrac{L + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L_M = \dfrac{L + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \qquad L_M = \frac{L - v\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

dunque in generale cambiando leggermente la notazione

$$\Delta x_M = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Delta x_M = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

per cui concludiamo che ***due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale Δx_0 per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx_M più corta dall'osservatore in movimento.***
A questo proposito si noti che aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.
Tale effetto viene detto ***contrazione degli intervalli spaziali*** o ***contrazione delle lunghezze*** e mostra che ***secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici***. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, ***la distanza tra due eventi è una grandezza relativa*** e non assoluta.

Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali:
la velocità limite

L'esistenza di una velocità massima possibile valida per ogni ente fisico (corpi materiali, onde) è scritta nelle trasformazioni di Lorentz. Si noti infatti che compaiono denominatori con radici quadrate

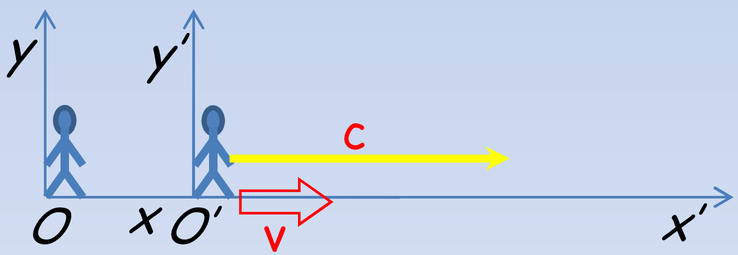
$$x_2^{'}-x_1^{'}=\frac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\quad (y_2^{'}-y_1^{'})=(y_2-y_1);\quad (z_2^{'}-z_1^{'})=(z_2-z_1);\quad (t_2^{'}-t_1^{'})=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

che richiedono (a meno che non si vogliano considerare quantità complesse) che il radicando sia positivo $1-v^2/c^2 \geq 0$ da cui

$$\boxed{|v| \leq |c|}$$

<u>Le trasformazioni di Lorentz richiedono che in ogni riferimento inerziale la velocità di un ente fisico (corpo materiale o onda) sia sempre inferiore a quella della luce</u> la quale assume quindi il ruolo di ***<u>velocità limite</u>***.

L'esistenza di una velocità massima possibile ha come conseguenza il fatto che *le regole di composizione delle velocità devono essere radicalmente diverse da quelle galileiane* altrimenti si avrebbero palesi violazioni del secondo postulato.
Immaginiamo ad esempio che l'osservatore O' invii un raggio luminoso lungo le x' positive che, in virtù del secondo postulato, si propagherà con velocità *c* rispetto a lui. Se fosse valida la legge galileiana di composizione, la velocità del raggio luminoso osservata da O dovrebbe essere *c'=c+v* violando inevitabilmente il secondo postulato.



Quale è dunque la nuova legge di composizione delle velocità in accordo con l'esistenza di una velocità limite?

Consideriamo ad esempio le trasformazioni degli intervalli da O' ad O. Evidentemente si ottengono le velocità semplicemente mettendo a rapporto gli intervalli spaziali e temporali

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \dfrac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dfrac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(y_2' - y_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(z_2' - z_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_y = \dfrac{\dfrac{(y_2' - y_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_z = \dfrac{\dfrac{(z_2' - z_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \\ v_y = \dfrac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \\ v_z = \dfrac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases}$$

da cui otteniamo ***le leggi relativistiche di composizione delle velocità*** che sostituiscono quelle di Galileo valide nella fisica classica

$$\boxed{\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_y = \dfrac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_z = \dfrac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases}}$$

La struttura delle nuove leggi di composizione è piuttosto complessa tuttavia, come atteso, le leggi relativistiche conducono a quelle galileiane nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Infatti se $v \ll c$ si ottiene facilmente

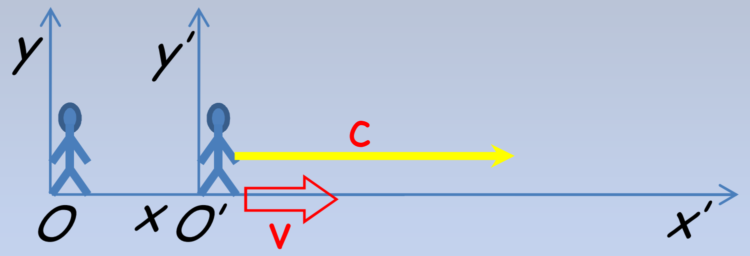
$$\begin{cases} v_x \simeq v_x' + v \qquad v_y \simeq v_y' \qquad v_z \simeq v_z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} & v_y = \dfrac{v_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} & v_z = \dfrac{v_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases}$$

Notiamo che dato un corpo materiale in moto con una certa velocità v'x, v'y, v'z rispetto ad O' appare in moto anche ad O, ovviamente. Tuttavia le velocità trasversali al moto che egli osserva, non dipendono solamente dalle velocità trasversali che il corpo aveva rispetto ad O', dipendono anche da quella longitudinale lungo la direzione del moto. In un certo senso *le componenti della velocità si mescolano* contrariamente a quanto avviene con la composizione galileiana delle velocità.

Ancora più sorprendente è la regola di addizione delle velocità lungo la direzione del moto. Ragionando con l'esempio esaminato all'inizio si ottiene

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} c} = c$$

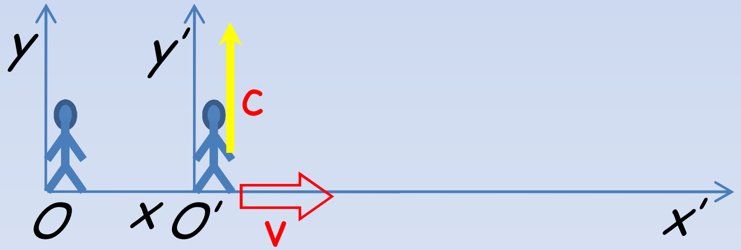


Ovvero dato un raggio luminoso in moto con velocità c (lungo le x' positive) rispetto ad O' il quale si muove poi con velocità v rispetto ad O (lungo le x' positive) tale raggio si muove con velocità c anche rispetto ad O dunque ***secondo le leggi relativistiche di composizione delle velocità v+c=c in accordo con l'esistenza di una velocità limite*** (ed anche, in ultima analisi, con il secondo postulato) ma in completo conflitto con le leggi galileiane.

Per completezza analizziamo anche il caso indicato in figura:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} & v_y = \dfrac{v_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v \\ v_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$



che conferma le conclusioni già commentate.

Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali: coincidenze e distanze spaziotemporali

Abbiamo appreso nelle pagine precedenti che la distanza spaziale e temporale tra due eventi fisici è relativa dipendendo dall'osservatore inerziale che la misura così come relativa risulta essere la loro eventuale simultaneità.
Secondo le trasformazioni di Galileo invece le distanze spaziali tra eventi simultanei sono assolute [$\Delta x=\Delta x'$ *se* $\Delta t'=0$] così come le distanze temporali tra eventi non simultanei ($\Delta t=\Delta t'$). L'unica grandezza relativa risulta essere la distanza spaziale di eventi non simultanei che essendo data dalla espressione $\Delta x=(\Delta x'+ v\Delta t')$ dipende chiaramente dall'osservatore che la misura.
Con le trasformazioni di Lorentz tutte queste grandezze diventano relative per cui ci si potrebbe chiedere se nella teoria della relatività ristretta esistano grandezze assolute.
Richiamiamo allora le trasformazioni di Lorentz ed immaginiamo due eventi fisici tali che $\Delta x'=0$, $\Delta y'=0$, $\Delta z'=0$ e $\Delta t'=0$ ovvero *tali da essere coincidenti spazialmente e temporalmente per l'osservatore O'*. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1'); \quad (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1'); \quad (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_2 - x_1) = 0 \\ (y_2 - y_1) = 0 \\ (z_2 - z_1) = 0 \\ (t_2 - t_1) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \Delta x' = 0 \\ \Delta y' = 0 \\ \Delta z' = 0 \\ \Delta t' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 0 \\ \Delta y = 0 \\ \Delta z = 0 \\ \Delta t = 0 \end{cases}}$$

se due eventi fisici coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora soddisfano questa condizione per ogni altro osservatore inerziale dunque ***la coincidenza spaziale e temporale di due eventi è assoluta***.
Come vedremo questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di grande rilevanza. Con qualche calcolo si può ottenere un'altra importante relazione.

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x^2 = \dfrac{\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v\Delta x' \Delta t'}{(1 - v^2 / c^2)} \\ \Delta y^2 = \Delta y'^2 \\ \Delta z^2 = \Delta z'^2 \\ \Delta t^2 = \dfrac{\Delta t'^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x'^2 + 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x' \Delta t'}{(1 - v^2 / c^2)} \end{cases}$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \frac{\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v\Delta x' \Delta t'}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \frac{\Delta t'^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x'^2 + 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x' \Delta t'}{(1 - v^2 / c^2)} =$$

$$= \frac{\Delta x'^2 + v^2 \Delta t'^2 + 2v\Delta x' \Delta t' - c^2 \Delta t'^2 - \dfrac{v^2}{c^2}\Delta x'^2 - 2v\Delta x' \Delta t'}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 =$$

$$= \frac{\Delta x'^2 (1 - v^2 / c^2) - c^2 \Delta t'^2 (1 - v^2 / c^2)}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

Da questi semplici calcoli si ottiene che

$$\boxed{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2 \Delta t^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) - c^2 \Delta t'^2}$$

Si noti che la somma dei termini tra parentesi rappresenta il quadrato della distanza spaziale tra due eventi e che questa, come atteso non è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Tuttavia se gli osservatori inerziali tolgono alla distanza spaziale tra due eventi il prodotto della velocità della luce con la loro distanza temporale ovvero la quantità $c^2 \Delta t^2$ (che ha le dimensioni di una lunghezza levata al quadrato) allora troveranno tutti lo stesso valore. Nella TRR questo tipo di distanza prende il nome di *distanza spaziotemporale* tra due eventi per cui possiamo affermare che ***la distanza spaziotemporale tra gli eventi è la stessa per tutti gli osservatori inerziali*** ovvero che ***la distanza temporale tra gli eventi è una grandezza assoluta*** (si noti che da questa espressione otteniamo facilmente il risultato precedente) .

Vale la pena sviluppare alcune considerazioni in merito alla espressione appena vista. Per cominciare pensiamo a due punti nello spazio orinario tridimensionale: la loro distanza, per un certo osservatore O, è data dal teorema di Pitagora che afferma che

$$d^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Ora se assumiamo un riferimento O' ruotato rispetto ad O il nuovo osservatore misurerà diverse coordinate dei punti e quindi diversi valori degli intervalli Δx', Δy', Δz' ma, quando va a calcolare la distanza tra i due punti, trova lo stesso valore misurato da O. dunque

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)$$

da cui

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (1)$$

la distanza tra due punti dello spazio ordinario è la stessa per tutti gli osservatori ruotati tra loro.
Ora *gli eventi fisici possiedono oltre ad una posizione nello spazio anche una posizione nel tempo per cui potremmo pensare di rappresentarli in un riferimento con quattro assi cartesiani*: tre dedicati alla posizione spaziale ***(x,y,z)*** ed uno dedicato a quella temporale *t*. Per fare in poi modo che anche su questo asse si rappresentino distanze potrebbe essere conveniente posizionare l'evento non in *t* ma in (ct). In questo modo due eventi fisici in questo spazio sarebbero caratterizzati dagli intervalli Δx, Δy, Δz e cΔt e la distanza potrebbe essere calcolata attraverso un teorema di Pitagora in quattro dimensioni

$$d^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + c^2 \Delta t^2$$

Potremmo poi pensare di assimilare un cambiamento di riferimento inerziale ad una rotazione del sistema d'assi quadridimensionale che comporta che tutti gli osservatori misurino la stessa distanza per cambiando i valori degli intervalli Δx', Δy', Δz' e cΔt' da cui

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + c^2 \Delta t'^2$$

e quindi

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + c^2 \Delta t^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + c^2 \Delta t'^2 \qquad (2)$$

che assomiglia molto alla relazione soddisfatta dalle trasformazioni di Lorentz trovata nella pagina precedente

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2 \Delta t^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) - c^2 \Delta t'^2 \qquad (3)$$

Seguendo questa idea *si potrebbe pensare di interpretare il passaggio fisico da un riferimento all'altro come una rotazione ordinaria di un riferimento a quattro dimensioni (tre spaziali ed una temporale) nel quale però il teorema di Pitagora vale per le dimensioni spaziali ma non per quella temporale dato che c'è un segno meno nella (3).*
Se si è disposti ad introdurre un asse dei tempi immaginario però la (3) può essere scritta come

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + (i^2 c^2 \Delta t^2) = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + (i^2 c^2 \Delta t'^2) \qquad (4)$$

ovvero identica alla (2) e quindi ottenibile applicando l'ordinario teorema di Pitagora in quattro dimensioni.

Premesso che un riferimento a quattro assi, tre spaziali ed uno temporale immaginario, si chiama riferimento spaziotemporale di Minkowsky perveniamo alla conclusione che ***il passaggio fisico da un riferimento all'altro è assimilabile ad una rotazione ordinaria di un riferimento di Minkowsky.***

Questa elaborata costruzione formale è semplicemente un modo geometrico per interpretare le trasformazioni di Lorentz che a loro volta discendono dai postulati di relatività e descrivono tutti gli aspetti fisici rilevanti. Lo spazio tempo di Minkowsky è in ultima analisi un elegante costruzione formale capace di descrivere in modo sintetico il contenuto fisico della teoria della relatività ristretta ed è il punto di partenza delle formulazioni più astratte della teoria della stessa. Questa formulazione è particolarmente utile quando si vuole stabilire se una teoria rispetti o meno la TRR oppure quando si voglia costruire una teoria in accordo con la TRR tuttavia dal punto di vista fisico non aggiunge nulla di nuovo a quanto affermato dalle trasformazioni di Lorentz stesse.

Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali:
rotazione del riferimento di Minkowsky

Dato che ***il passaggio fisico da un riferimento all'altro è assimilabile ad una rotazione ordinaria di un riferimento di Minkowsky,*** un riferimento dove lungo l'asse temporale viene riportato non il tempo *t* ma il valore ad esso connesso *ict* possiamo interpretare in modo geometrico una ordinaria trasformazione di Lorentz.

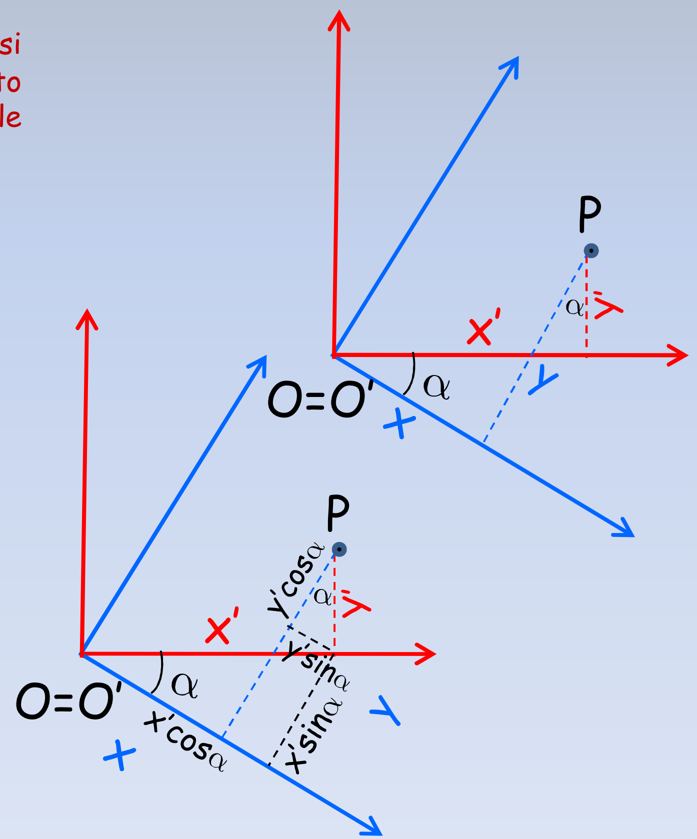
Analizziamo intanto una rotazione di un certo angolo α della coppia di assi rappresentata in figura dove il punto P possiede coordinate x' e y' rispetto al sistema iniziale (in rosso) e coordinate x e y rispetto a quello finale ruotato (in blu).
Dalla figura sottostante troviamo facilmente

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \dfrac{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \\ y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = \dfrac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \end{cases}$$

le quale si può anche scrivere come

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x'tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \end{cases}$$

e mostrano una notevole somiglianza alle trasformazioni di Lorentz.



Ora ricordiamo che le trasformazioni di Lorentz sono rotazioni nello spazio di Minkowsky per cui è necessario introdurre un asse dei tempi complesso. Immaginiamo che l'asse delle y sia un tale asse, porremo allora

$$y' = ict' \qquad y = ict$$

Notiamo inoltre che nelle espressioni precedenti abbiamo la radice

$$\sqrt{1+tg^2\alpha}$$

mentre in una trasformazione di Lorentz si ha

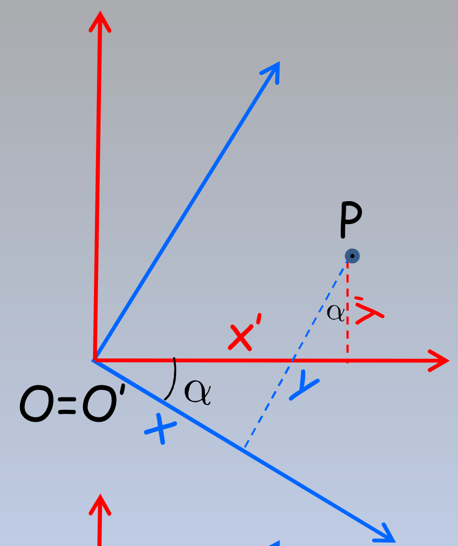
$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

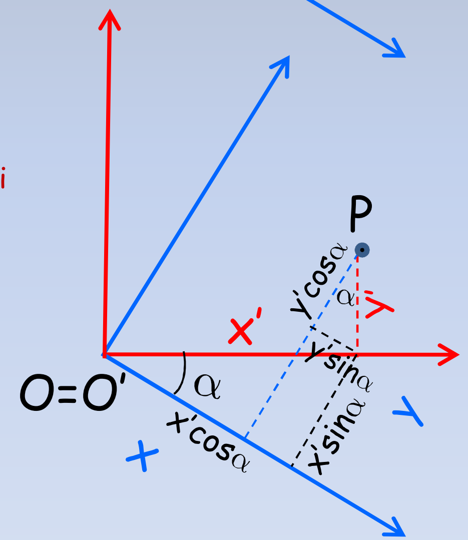
Le due radici saranno uguali se

$$tg^2\alpha = -\frac{v^2}{c^2} \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

Sostituendo *y, y, e tg*α nelle formule di rotazione abbiamo in effetti le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y' tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x' tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' - ict'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \\ ict = \dfrac{ict' + x'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$



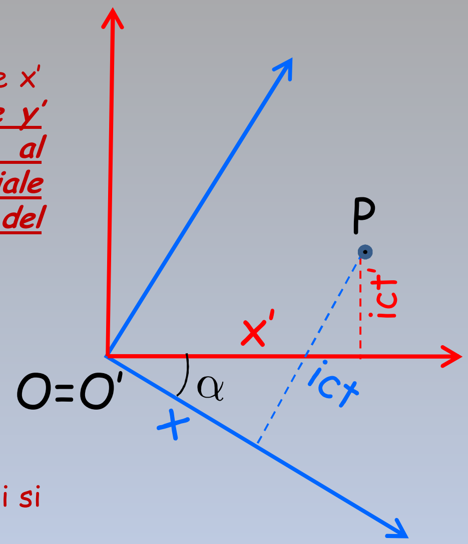


Costruendo lo spazio di Minkowsky nel modo discusso nella pagina precedente (variabile x' lungo l'ascissa e variabile ict' lungo l'ordinata) ***la trasformazione delle variabili x' e y' determinata da una trasformazione di Lorentz con velocità v (ovvero in seguito al passaggio da un riferimento inerziale O' in moto con velocità v al riferimento inerziale O fisso) è formalmente identica a quella che si ottiene con una rotazione oraria del riferimento di un angolo α tale che***

$$\boxed{tg\alpha = i\frac{v}{c}}$$

dove evidentemente l'angolo è tanto più grande quanto maggiore è la velocità.

NOTA: data una certa velocità di traslazione v si calcolerà l'angolo tale che *tg*α*=v/c* e gli si aggiungerà l'unità immaginaria *i*.



Distanza spaziotemporale

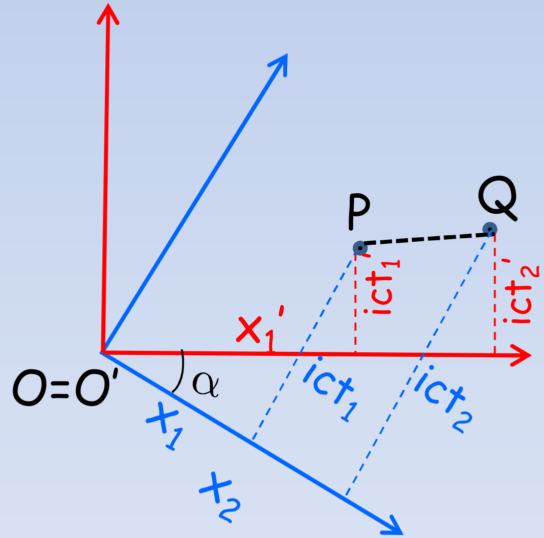
Dati due eventi fisici P e Q la trasformazione di Lorentz (rotazione) lascia invarianta la distanza degli eventi

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \Delta y' = ic\Delta t' \qquad \Delta y = ic\Delta t$$

Sostituendo otteniamo l'invarianza della distanza spaziotemporale tra due eventi per i diversi osservatori inerziali

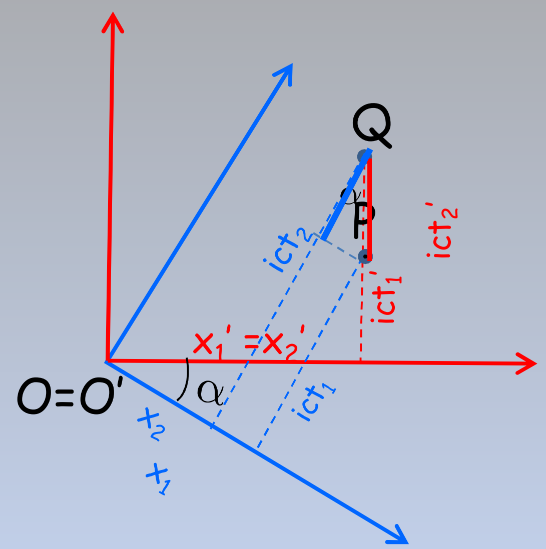
$$\Delta x'^2 + (ic\Delta t')^2 = \Delta x^2 + (ic\Delta t)^2 \qquad \boxed{\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2}$$

Si noti che, come caso particolare, si ottiene immediatamente che se P e Q coincidono per O' allora coincidono anche per O da cui l'affermazione che se due eventi coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora devono coincidere per ogni altro.



Dilatazione del tempo

Consideriamo 'l'orologio luminoso' con il cammino di andata e ritorno del raggio luminoso lungo l'asse y' del riferimento O' analizzato a suo tempo. La partenza e l'arrivo del raggio luminoso in O' corrispondono a due eventi con la stessa ascissa x' e diversa ordinata ict' (vedi figura).
La trasformazione di Lorentz (rotazione del riferimento) fa si che l'osservatore O veda invece due eventi con un certo intervallo spaziale (che O' non osservava) e soprattutto un diverso intervallo temporale (dilatazione del tempo). Per quanto riguarda quest'ultimo si ha



$$\Delta y = \Delta y' \cos\alpha \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c} \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad \Delta y' = ic\Delta t'$$

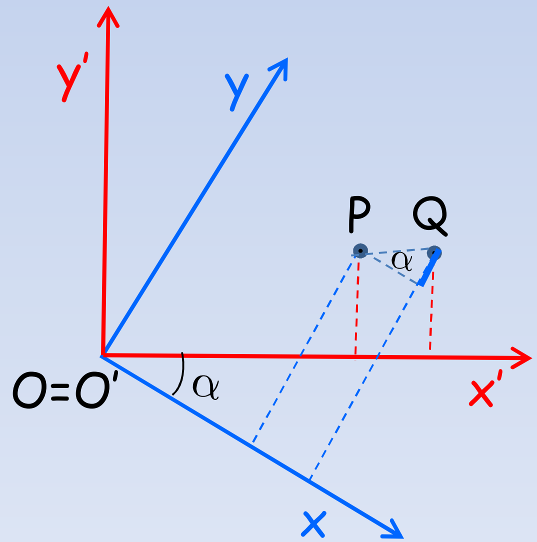
Dalla trigonometria si ha $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ e quindi sostituendo la formula della dilatazione del tempo

$$ic\Delta t = ic\Delta t' \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = ic\Delta t' \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Relatività della simultaneità

Gli eventi P e Q appaiono simultanei a O' ma non ad O (relatività della simultaneità). Dalla geometria si ha facilmente che



$$\Delta y = \Delta x' \sin\alpha \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c} \qquad \Delta y = ic\Delta t$$

Dalla trigonometria si ha $\cos\alpha = tg\alpha/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ da cui sostituendo la formula della dissincronizzazione

$$ic\Delta t = \Delta x' \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \Delta x' \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

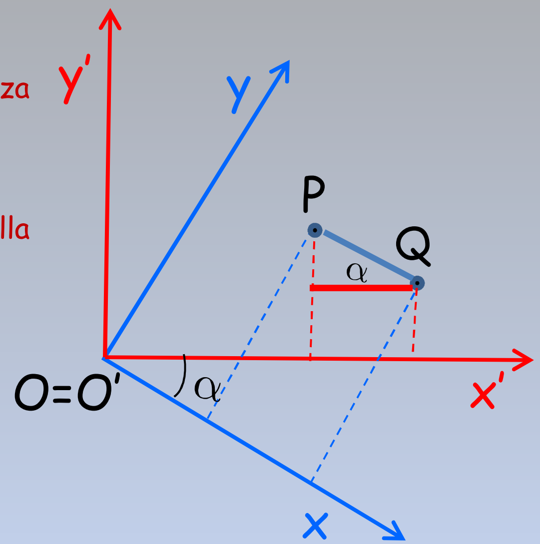
Contrazione delle lunghezze

Data una lunghezza in quiete nel riferimento O' l'osservatore O misura una lunghezza pari alla distanza di due suoi osservatori che vedono gli estremi nello stesso istante

$$\Delta x \cos\alpha = \Delta x' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

Dalla trigonometria si ha $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ e quindi sostituendo la formula della contrazione della lunghezza

$$\boxed{\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali: principio di causalità

Esaminiamo ancora una volta la trasformazione di Lorentz per l'intervallo temporale che riscriviamo in una forma adatta per le considerazioni che faremo

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t_2' - t_1')$$

ed immaginiamo che nel riferimento O (per semplicità lungo l'asse delle x) abbiano luogo due eventi: il primo nel punto x'_1 al tempo t'_1 ed il secondo nel punto x'_2 al tempo t'_2 (con t'_2 quindi successivo a t'_1). Osserviamo che se il numeratore dell'ultima espressione è positivo allora se $t'_2 - t'_1 > 0$ anche $t_2 - t_1 > 0$ ovvero l'ordine temporale degli eventi è lo stesso per tutti e due gli osservatori. Se invece il numeratore è negativo se $t'_2 - t'_1 < 0$ si ha $t_2 - t_1 < 0$ ovvero l'osservatore O vede un ordine degli eventi invertito rispetto a quello osservato da O'.
Vediamo in dettaglio le condizioni

$$\begin{cases} se \quad 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 0 \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) > 0 \\ se \quad 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < 0 \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) < 0 \end{cases}$$

d'altra parte abbiamo che

$$1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 0 \qquad \frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > -\frac{c^2}{v} \qquad \left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < \left|\frac{c^2}{v}\right| \qquad \left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < \left|\frac{c^2}{v}\right|_{\min} \qquad \left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < |c|$$

per cui

$$\begin{cases} se \quad \left|\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < |c| \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) > 0 & (1) \\ se \quad \left|\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| > |c| \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) < 0 & (2) \end{cases}$$

Quale è il significato di queste relazioni?

Per capirlo immaginiamo che nel riferimento O' l'evento A corrisponda allo sparo di un proiettile da un certo punto x'_1 ad un certo tempo t'_1 mentre l'evento B corrisponda all'arrivo del proiettile sul bersaglio nel punto x'_2 al tempo t'_2 che in seguito all'impatto va in frantumi. In questo caso l'evento A causa l'evento B e, nel riferimento O', lo precede temporalmente. Ora se questo non fosse vero anche in tutti gli altri riferimenti accadrebbe che in alcuni casi sarebbe possibile che l'evento B preceda l'evento A e dunque una situazione assurda nella quale la frantumazione del bersaglio precede l'arrivo del proiettile! Il fatto che i due eventi possano essere connessi da un proiettile ci assicura però che deve essere verificata la (1) poiché nessuna azione fisica può superare la velocità della luce. In questo caso le trasformazioni di Lorentz garantiscono che ogni altro osservatore vedrà gli eventi nello stesso ordine temporale scongiurando la situazione assurda di cui sopra.

L'inversione degli eventi può avvenire solo con la condizione espressa dalla (2). Occorre però sottolineare che in questo caso la distanza spaziale e temporale degli eventi è tale da non potere essere in nessun modo connessi da una qualche azione fisica per cui l'inversione del prima con il dopo non produce situazioni assurde.

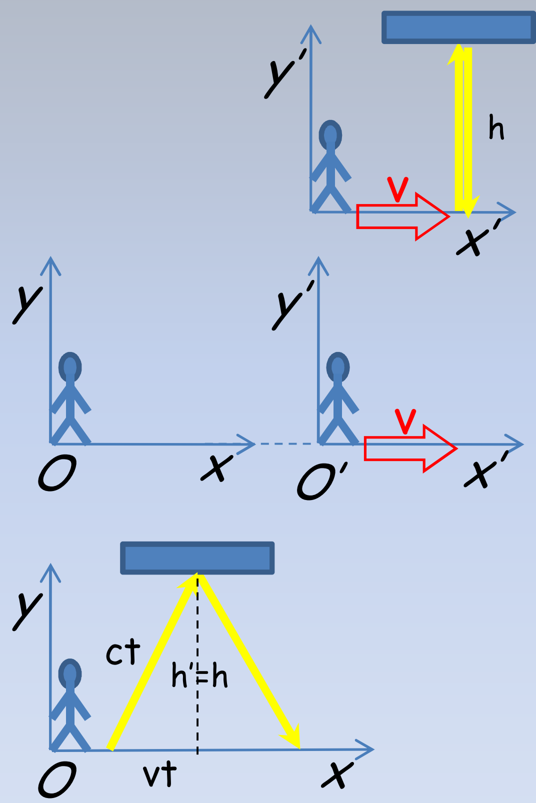
L'esempio dovrebbe allora chiarire il significato delle (1) e (2): il quoziente $R=(x'_2-x'_1)/(t'_2-t'_1)$ è il rapporto tra la distanza spaziale e quella temporale tra i due eventi misurata da O'. Ricordando che secondo la TRR esiste una velocità limite per tutti gli enti fisici *se* $|R|<|c|$ *allora significa che i due eventi potrebbero essere connessi da una qualche azione fisica mentre se* $|R|>|c|$ *allora i due eventi non potrebbero in nessun modo essere connessi da una qualche azione fisica*. Nel primo caso si dice che gli eventi potrebbero essere in una *relazione di causa-effetto* o semplicemente in una *relazione causale*, mentre nel secondo caso si dice che gli eventi non potrebbero essere in una relazione di causa-effetto o in una relazione causale.

Le disequazioni di cui sopra allora affermano che ***se due eventi fisici possono essere in relazione causale allora l'ordine temporale degli eventi è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali mentre se i due eventi fisici non possono essere in relazione causale allora l'ordine temporale degli eventi può essere scambiato per certi osservatori***.

Questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di cruciale importanza in quanto afferma che nonostante la relatività degli intervalli spaziali e temporali ***nella teoria della relatività vale il principio di causalità*** il quale richiede che *se due eventi sono in relazione causale allora il primo deve precedere il secondo per ciascun osservatore inerziale.*

Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali:
proprietà intrinseche dello spazio e del tempo

Tutti gli esempi ed i commenti precedenti hanno riguardato sistemi fisici relativamente semplici nei quali era sempre coinvolta la propagazione di raggi luminosi. Questo fatto è in certo senso inevitabile poiché i postulati della TRR precisano in che modo si propaga la luce e quindi qualunque esempio che voglia sfruttarli direttamente deve necessariamente prevedere eventi fisici con raggi luminosi. Questo fatto *potrebbe fare sorgere il dubbio che le trasformazioni di Lorentz descrivano il comportamento dei raggi luminosi e di tutti i fenomeni ad essi connessi e non proprietà intrinseche dello spazio e del tempo*.



Ad esempio consideriamo il semplice dispositivo utilizzato per illustrare il fenomeno della dilatazione dei tempi. Con qualche semplice calcolo si dimostra facilmente che

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

L'intervallo temporale tra gli eventi Δt_0 misurato dall'osservatore in quiete O' è più corto di quello Δt_M misurato dall'osservatore O che misura come sappiamo un intervallo temporale dilatato. In questa situazione *si potrebbe pensare che non è l'intervallo temporale a dilatarsi ma piuttosto il modo in cui lo misuriamo*. Che si usa un orologio, diciamo così, luminoso si trova l'effetto di cui si è detto ma che si usa ad esempio un orologio a cucù, si potrebbe trovare un'altra entità dell'effetto a addirittura la completa assenza dello stesso.
Se le cose stessero così, in effetti non saremmo in presenza di proprietà autentiche degli intervalli temporali ma piuttosto a proprietà dipendenti dal modo in cui questi vengono misurati. In realtà la TRR non lascia aperta questa possibilità!

Per comprendere questo fatto immaginiamo di aggiungere al dispositivo di prima *un pendolo di lunghezza tale da oscillare, nel riferimento O', con lo stesso tempo che impiega il raggio luminoso a compiere il cammino di andata e ritorno*. Possiamo poi sistemare il pendolo in modo tale che quando il raggio luminoso parte, diciamo dal punto A, il pendolo parte dallo stesso punto. Siccome il pendolo ha la lunghezza giusta quando torna nel punto A li incontra nuovamente il raggio luminoso.

Notiamo subito che in A la posizione del pendolo e del raggio luminoso coincidono sia spazialmente che temporalmente e che dopo un certo tempo il raggio luminoso ed il pendolo tornano nello stesso punto A ovvero tornano a coincidere sia spazialmente che temporalmente.

Siccome le coincidenze spaziotemporali sono assolute queste avvengono per tutti gli osservatori inerziali per cui ogni altro osservatore inerziale O troverà tali coincidenze.

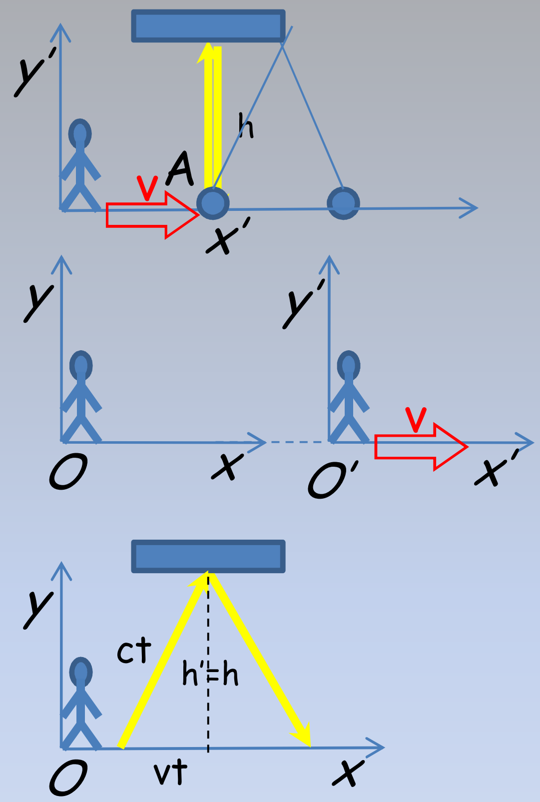
Questo però richiede che l'oscillazione del pendolo e l'oscillazione dell'orologio luminoso abbiano la stessa durata non solo per l'osservatore O' ma per ogni altro osservatore O.

Questo a sua volta equivale ad affermare che se si dilata il tempo misurato dall'orologio luminoso deve dilatarsi allo stesso modo anche il tempo misurato dal pendolo.

Dato che questo stesso ragionamento può essere ripetuto con qualunque dispositivo si voglia misurare gli intervalli temporali è chiaro che ci troviamo innanzi ad una proprietà del tempo indipendente dal modo in cui viene misurata vale a dire ad una sua proprietà intrinseca.

Questi ragionamenti possono essere facilmente estesi anche agli altri effetti relativistici quali la relatività della simultaneità e la contrazione delle lunghezze. Possiamo allora affermare in generale che: ***poiché le coincidenze spaziotemporali di due eventi sono vere per tutti gli osservatori inerziali (sono assolute), le proprietà dello spazio e del tempo dedotte con i raggi luminosi sono indipendenti da questi e diventano proprietà intrinseche dello spazio e del tempo*** .

Dunque qualunque intervallo temporale dura più a lungo se osservato i movimento così come qualunque distanza spaziale si accorcia. Sono lo spazio ed il tempo in se ad essere coinvolti e non semplicemente la loro operazione di misura.



Trasformazione di Lorentz degli intervalli spaziali e temporali: grandezze assolute e relative

Spesso si dice che con la teoria della relatività tutto diventa relativo. Nulla di più sbagliato!
La teoria della relatività afferma che certe grandezze che nella fisica classica si pensava fossero assolute sono in realtà relative ma che esistono nuove grandezze fisiche ignote alla fisica classica che invece sono assolute. In un certo senso ***la teoria della relatività rende relative le vecchie grandezze fisiche ma ne introduce nuove che sono assolute***.
Questo fatto è in se evidente se riassumiamo le principali conclusioni cui siamo giunti analizzando le trasformazioni di Lorentz

i) Gli intervalli temporali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relativi ed aumentano con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *dilatazione dei tempi*);
ii) La simultaneità tra due eventi separati nello spazio dipende dall'osservatore inerziale, è dunque relativa ed il grado di dissincronia aumenta con la velocità dell'osservatore e con la distanza spaziale degli eventi stessi (*relatività della simultaneità*);
iii) Le distanze spaziali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relative e diminuiscono con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *contrazione delle lunghezze*);
iv) La velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque una grandezza assoluta;
v) Le distanza spaziotemporali e le coincidenze spaziotemporali sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e sono dunque grandezze assolute;
vi) L'ordine temporale di eventi che possono essere connessi causalmente è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque assoluto;

In estrema sintesi *la TRR afferma che le distanze spaziali e temporali sono relative ma quelle spaziotemporali sono assolute.*

Fine della lezione di Mercoledì 28 Aprile 2010