Cinematica

Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 4 aprile 2011

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Domenico Galli
Digitally signed by Domenico Galli
DN: c=IT, o=INFN, ou=Personal Certificate, l=Bologna, cn=Domenico Galli
Date: 2011.04.12 15:00:36 +02'00'

Cinematica

- La **meccanica** studia i moti dei corpi e le leggi che li governano.
- **Cinematica**: approccio descrittivo. Studio delle grandezze fisiche e dei metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto, **senza curarsi delle cause** che li determinano.
- **Punto materiale**: è l'oggetto mobile più semplice. Ha **dimensioni trascurabili nel contesto considerato**.
  - P. es.: nel sistema solare la Terra può essere considerata un punto materiale, in quanto ha dimensioni piccole rispetto alle orbite dei pianeti e i suoi moti di rotazione, precessione, ecc. possono essere tralasciati nella descrizione del moto di rivoluzione.

Cinematica (II)

- **Oggetti estesi**: possono essere suddivisi in tante parti, sufficientemente piccole per il dettaglio richiesto, e considerati come **sistemi di punti materiali**.
- **Il moto è relativo**: si può descrivere il moto soltanto quando si è stabilito **rispetto a che cosa** il movimento è valutato.
- **Sistema di Riferimento** (**SdR**): sistema di corpi, **in quiete gli uni rispetto agli altri** (distanza reciproca immutata nel tempo), rispetto a cui si descrive il moto.
- **Terna cartesiana di riferimento**: terna cartesiana, fissa rispetto al SdR, utilizzata per descrivere **quantitativamente** il moto.

Principio di Relatività

- **Principio di Relatività**: **Non esiste un SdR privilegiato. Le leggi della Fisica sono uguali in tutti i SdR**.
  - La diatriba tra punto di vista **tolemaico** (geocentrico) e **copernicano** (eliocentrico) è **superata** nella fisica moderna:
    - I due punti di vista **non sono in antitesi** (è altrettanto corretto dire che la Terra si muove rispetto al Sole o che il Sole si muove rispetto alla Terra).
    - **La descrizione copernicana è più semplice ma non più "vera"**: con opportuni strumenti di calcolo si può pure descrivere il moto dei pianeti nel SdR terrestre.

Principio di Relatività (II)

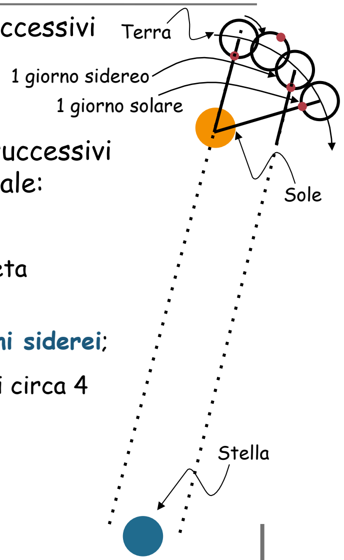
- Principio di Relatività **Ristretta** (o **Speciale**):
  - È limitato ai SdR **inerziali**.
  - Se si sceglie un SdR rispetto al quale le leggi della fisica sono scritte nella forma più semplice (SdR **inerziale**) allora le stesse leggi valgono in **qualunque** altro SdR in moto di **traslazione rettilineo** e **uniforme** rispetto a quello dato.
- Principio di Relatività **Generale**:
  - Include anche i SdR **non inerziali**.
  - **Tutti i SdR** sono equivalenti per la formulazione delle leggi fondamentali della fisica.

Tempo

- Per decidere se un punto si muove occorre controllare se la sua posizione cambia col passare del tempo.
- Se si vuole considerare il tempo come **grandezza fisica** occorre darne una **definizione operativa**, ovvero bisogna stabilire qual è il procedimento con cui si misurano gli intervalli di tempo.
- Gli strumenti per la misura del tempo (orologi, cronometri) si basano su di un **fenomeno periodico** (che si ripete continuamente, come il moto di un pendolo). Gli intervalli di tempo tra due successive ripetizioni sono **supposti uguali** e uno qualunque di questi intervalli è assunto come unità di misura.
  - Es.: passaggio del Sole o di una stella dal meridiano locale (**giorno solare** e **giorno sidereo**).
  - Es.: oscillazioni di un pendolo o di un bilanciere collegato a una molla a spirale. Oscillazioni di un quarzo piezoelettrico. Oscillazioni della radiazione elettromagnetica emessa in determinate transizioni atomiche.

Giorno Solare e Giorno Sidereo

- **Giorno solare**: intervallo di tempo tra due successivi passaggi del **Sole** dal meridiano locale:
  - Istante in cui il Sole è più alto sull'orizzonte.
- **Giorno sidereo**: intervallo di tempo tra due successivi passaggi di una **stella fissa** dal meridiano locale:
  - Istante in cui la stella è più alta sull'orizzonte.
- In un anno la Terra compie una **rivoluzione** completa attorno al Sole.
  - **In un anno 1 giorno solare in meno dei giorni siderei**;
  - Giorno solare è **più lungo** del giorno sidereo di circa 4 minuti (3′ 56″):
    - Giorno solare: 86400 s;
    - Giorno sidereo: 86164.1 s.



Breve Storia dell'Unità di Tempo

- I giorni **siderei** sono di lunghezza uguale tra loro, i giorni **solari** no, a causa del moto della Terra attorno al Sole, che non avviene a velocità costante:
  - Più veloce d'inverno, quando la Terra è più vicina al Sole.
  - Niente a che vedere con la diversa durata del giorno illuminato e della notte.
- Tuttavia, poiché la vita quotidiana è basata sul Sole, si preferì riferire l'unità di tempo al **giorno solare medio** (media calcolata in un anno):
  - **1 s = 1/86400** di giorno solare medio.
- Con il progredire della tecnica degli **orologi atomici** (nata nel 1949) si osservarono **discrepanze** rispetto alla periodicità terrestre:
  - Il **giorno sidereo**, misurato da un orologio atomico, **aumenta di 2 ms in un secolo**.

Breve Storia dell'Unità di Tempo (II)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **2 possibilità**:
  - **"Sbaglia" l'orologio atomico**:
    - Improbabile data la stabilità del fenomeno periodico su cui si basa tale orologio.
  - **"Sbaglia" la rotazione terrestre**:
    - Possibile.
    - Infatti la rotazione della Terra rispetto alla Luna (e al Sole) determina il moto delle **maree**, nel quale una parte piccola ma non del tutto trascurabile dell'**energia di rotazione** della Terra è **trasferita alla massa di acqua** in movimento e quindi **dissipata in calore**.
    - In tal modo il moto di rotazione della Terra **rallenta** un poco nel tempo:
      - 2 ms (millisecondi) in un secolo.

Breve Storia dell'Unità di Tempo (III)

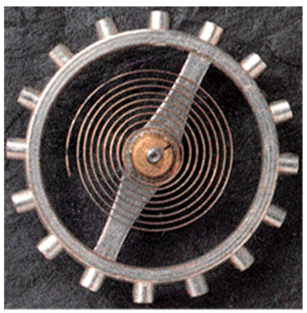
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il secondo fu perciò ridefinito (1960) come una **frazione** di un **anno particolare** (l'anno **1900**).
- Nel 1967 il secondo fu nuovamente ridefinito, come **multiplo del periodo di oscillazione** (9.192.631.770 oscillazioni) della **radiazione elettromagnetica** emessa dagli atomi di **Cesio 133** in una particolare transizione.
  - Transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio 133.
  - La **precisione** di un orologio atomico è circa **una parte su 10^{13}**:
    - Ovvero esso sbaglia al massimo 1 secondo ogni 300 000 anni.

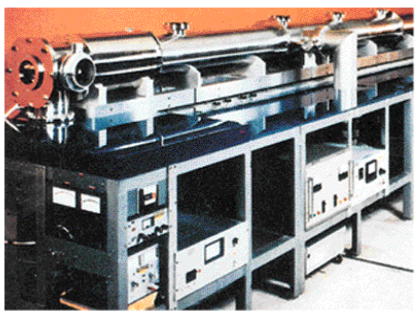
Breve Storia dell'Unità di Tempo (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- orologio a pendolo



- bilanciere di un orologio meccanico

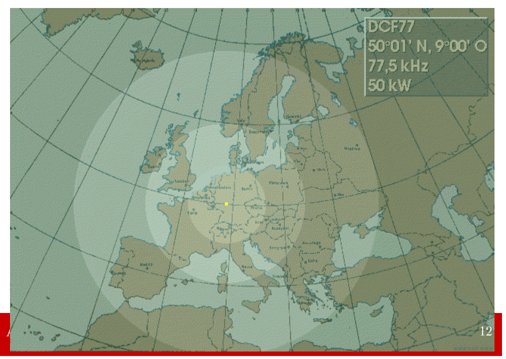


- orologio al cesio

Breve Storia dell'Unità di Tempo (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Oggi è possibile avere in casa o al polso un orologio **sincronizzato** con un orologio atomico.
  - Un **orologio atomico**, presso il Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) a Braunschweig, (Berlino-Charlottenburg, Germania) è collegato a un'**antenna radio** situata a Mainflingen, a 24 km da Francoforte;
  - L'antenna trasmette il segnale orario (DCF77) sulla frequenza di 77.5 kHz con una potenza di 50 kW fino a una **distanza di circa 1500-2000 km**.
- L'orologio **ricevitore** è in grado di sincronizzarsi con l'orologio atomico con uno **scarto** di circa **2 ms**.



Breve Storia dell'Unità di Tempo (V)

- È anche possibile sincronizzare gli orologi dei computer **via Internet** con un orologio atomico:
  - Lo scarto tipico di è di alcune decine di millisecondi.
- L'operazione è consentita dal protocollo **NTP** (**Network Time Protocol**) che si appoggia su **TCP/IP** (lo stack di protocolli utilizzati da Internet):
  - Client NTP sono disponibili in tutte le distribuzioni Linux in MacOS e in Windows.
- Una lista dei time-server pubblici si può trovare all'URL **http://www.ntp.org/**.

Breve Storia dell'Unità di Lunghezza

- Il **metro** fu definito nel 1791 dall'Accademia delle Scienze di Parigi, come la **1/40 000 000 parte del meridiano terrestre**:
  - Un **campione concreto** fu realizzato nel 1799 con un **regolo** di platino di sezione rettangolare di lunghezza pari a 1 m alla temperatura di fusione del ghiaccio.
- Si verificarono **discrepanze** tra le due definizioni e nel 1875 fu deciso di **non** riferire il metro alla Terra (che ha **dimensione variabile** in modo non prevedibile per i cambiamenti di forma della superficie terrestre) ma di riferirsi a un **nuovo campione**:
  - Una **sbarra** con sezione a X di platino-iridio (lega 90%-10%) con due tacche alla distanza di 1 m a 0°C (precisione 0.2 μm). Nel 1889 ne vennero costruite 30 copie, poi diffuse per il mondo.

Breve Storia dell'Unità di Lunghezza (II)

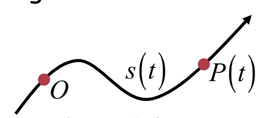
- Nel 1960 si definì il metro come un **multiplo della lunghezza d'onda** nel vuoto della luce rosso-arancione emessa dal Cripton 86 in una particolare transizione (errore 0.01 μm).
- Nel 1983 si è infine deciso di definire il metro come la **distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo**:
  - In questo modo **si riducono le misure di lunghezza a misure di tempo**.
  - Inoltre si **fissa per convenzione** (per legge giuridica, non fisica) **la velocità della luce nel vuoto a** $c = 299\ 792\ 458$ m/s.

Descrizione Intrinseca del Moto

- Consideriamo un punto materiale che si muove (la sua posizione P si modifica nel tempo: $P = P(t)$) o, in maniera equivalente, il suo vettore posizionale:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{P(t) - O}$$

- **Traiettoria**: linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto.
- Scegliendo sulla traiettoria un'**origine** O e un **verso** di percorrenza, si indica con s la lunghezza dell'arco OP (positiva se P segue O nel verso di percorrenza definito)
- **Legge oraria**: è la funzione $s = s(t)$.



- Da **traiettoria** e **legge oraria** si ha una descrizione **completa** del moto del punto (**descrizione intrinseca**).

Descrizione Cartesiana del Moto

- Una descrizione alternativa consiste nell'assegnare le 3 coordinate cartesiane x, y e z del punto P in funzione del tempo (**descrizione cartesiana**).

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(equazioni parametriche con il tempo t come parametro)

- Le equazioni parametriche, **se il parametro è il tempo**, forniscono una **descrizione completa** del moto del punto, diversa ma equivalente alla descrizione intrinseca.
- Se si sceglie l'origine degli assi cartesiani nel punto fisso O e si considera il corrispondente vettore posizionale, si ha:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{P(t) - O} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

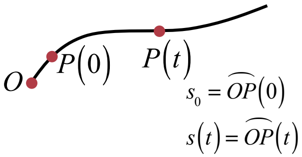
Il Moto Uniforme

- **Moto uniforme**: è il moto di un punto materiale che **percorre archi di traiettoria di ugual lunghezza in intervalli di tempo uguali**.
- La legge oraria si può perciò scrivere soltanto nella forma:

$$s(t) = vt + s_0$$

dove s_0 è il valore di s all'istante $t = 0$ e v è un parametro (costante).

- Se la funzione $s(t)$ non fosse di primo grado in t gli archi di traiettoria percorsi in intervalli di tempo uguali potrebbero non essere uguali.



Velocità nel Moto Uniforme

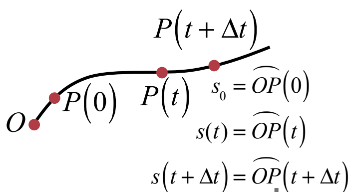
- La velocità è un concetto introdotto per descrivere la **"rapidità"** con cui un punto materiale si sposta.
- Nel moto uniforme si ha:

$$s(t) = vt + s_0$$

per cui l'arco di traiettoria percorso nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ è:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = v[\cancel{t} + \Delta t] + \cancel{s_0} - \cancel{vt} - \cancel{s_0} = v\Delta t$$

funzione moltiplicazione

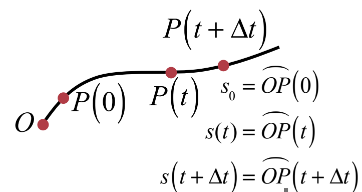


Velocità nel Moto Uniforme (II)

- Il **moto** è tanto **più rapido** quanta **più distanza Δs** si percorre **nello stesso intervallo di tempo Δt**.
- Dall'espressione $\Delta s = v\Delta t$ è evidente che il **moto** è tanto **più rapido** quanto **maggiore** è il parametro v.
- Chiamiamo perciò **velocità nel moto uniforme** il parametro v.
- Dall'espressione $\Delta s = v\Delta t$ segue che il parametro v si può esprimere come:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

(**velocità nel moto uniforme**)



Velocità nel Moto Vario (non Uniforme)

- Nel **moto vario** (cioè **non-uniforme**) possiamo definire la **velocità media**:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

tuttavia v_m dipende, oltre che da t, anche da Δt (durante il tempo Δt la velocità può cambiare).

- Introduciamo allora la **velocità istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

La velocità istantanea è la derivata di s rispetto a t.

La Misura della Velocità Istantanea

- Volendo misurare sperimentalmente la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre precisare operativamente il procedimento di misura, considerando la **sensibilità**, sempre limitata, degli **strumenti di misura**.

- L'intervallo di tempo **Δt non può essere scelto piccolo ad arbitrio**:
  - Se **Δt è più piccolo della sensibilità del cronometro** utilizzato per la misura, la misura di Δt dà risultato nullo.
  - Se Δt è molto piccolo, può anche accadere che lo spostamento **Δs sia inferiore alla sensibilità dello strumento di misura della lunghezza**. Di conseguenza la misura di Δs dà risultato nullo.

La Misura della Velocità Istantanea (II)

- Per misurare la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre scegliere gli intervalli Δt e Δs in modo che:
  - Tali intervalli siano **sufficientemente piccoli** che **lo stato di moto in essi non subisca variazioni apprezzabili nel contesto che stiamo considerando** (cioè data la precisione di cui abbiamo bisogno).
  - Tali intervalli siano **sufficientemente grandi** da **potere essere misurati con gli strumenti di misura di cui disponiamo**.

La Velocità Istantanea e la Traiettoria nella Fisica Microscopica

- La limitazione del concetto di velocità istantanea non è dovuta soltanto nella limitazione della sensibilità degli strumenti di misura.
- I concetti di **velocità istantanea** (derivata dello spostamento rispetto al tempo) e di **traiettoria** (linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto) di un punto materiale **hanno senso** soltanto **se un punto materiale ha una posizione definita in ogni istante di tempo**.
- Lo studio sperimentale del moto delle **particelle atomiche e sub-atomiche** mostra che esse **non hanno una ben definita posizione in un certo istante di tempo**:
  - I concetti di **traiettoria** e di **velocità istantanea perdono significato** nel caso delle particelle atomiche e sub-atomiche.

La Velocità Istantanea di un Elettrone Libero

- In particolare, risolvendo le equazioni del moto della meccanica quantistica (equazioni di Heisemberg) si trova che **la misura di una componente della velocità istantanea di un elettrone libero può dare come risultato soltanto** $\pm c$ (dove c è la velocità della luce nel vuoto).
- La **velocità osservata** degli elettroni, che è sempre una velocità **media**, è invece **sempre minore di** c.
- Segue che **la velocità istantanea di un elettrone libero non è affatto costante, ma oscilla rapidamente** (con velocità che può avere soltanto i valori $\pm c$) **attorno a un valore medio che è il valore osservato** (zitterbewegung).

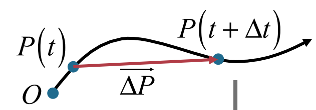
Velocità Vettoriale

- In un **moto curvilineo** la direzione del moto **varia nel tempo**. v contiene informazioni sulla rapidità di spostamento, ma non sulla direzione.
- Si può compendiare in un'unica grandezza fisica la rapidità del moto e la sua direzione.
- Consideriamo lo spostamento di un punto P in un intervallo Δt, ma invece di misurare lo spostamento lungo la traiettoria, consideriamo lo spostamento **"in linea d'aria"**, ovvero il segmento orientato:

$$\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{P(t+\Delta t) - P(t)}$$

- Possiamo ora definire la **velocità media vettoriale**:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{P(t+\Delta t) - P(t)}\right]$$



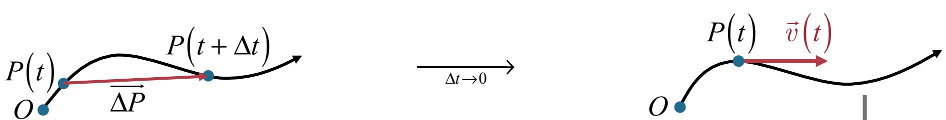
Velocità Vettoriale (II)

- Essa ha la stessa direzione dello spostamento e modulo tanto più grande quanto maggiore lo spostamento ("in linea d'aria") compiuto in un intervallo di tempo fissato.
- Si può definire anche la **velocità istantanea vettoriale**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{P(t+\Delta t) - P(t)}\right]\right\} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}}$$

che dunque è la derivata del punto (o del vettore posizionale) rispetto al tempo.

- La direzione di $\vec{v}$ è **tangente alla traiettoria** nel punto $P(t)$:



Velocità Vettoriale (III)

- Poiché nel limite di un arco infinitesimo, la corda approssima l'arco, si ha:

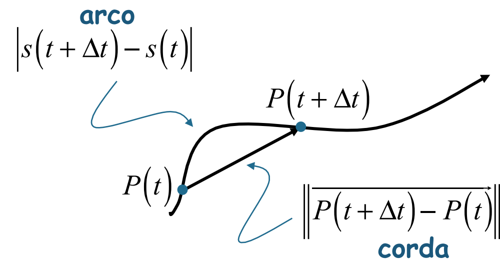
$$\underbrace{\left\|\overrightarrow{P(t+\Delta t) - P(t)}\right\|}_{\text{corda}} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \underbrace{\left|s(t+\Delta t) - s(t)\right|}_{\text{arco}}$$

per cui il modulo della velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare prima definita:

$$\|\vec{v}\| = |\dot{s}|$$

Norma della velocità vettoriale

Modulo della velocità scalare

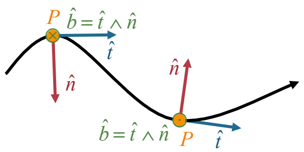


Rappresentazioni della Velocità

- Se chiamiamo $\hat{t}$ un **versore tangente** alla traiettoria, col **verso concorde** a quello del **moto**, si ha:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$$

(rappresentazione **intrinseca** della velocità).



- Se deriviamo l'espressione:

$$\overrightarrow{P-O} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

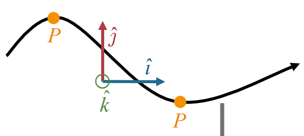
considerando che i versori cartesiani sono costanti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = \dot{f}(x)g(x) + f(x)\dot{g}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x\hat{\imath}\right] = \dot{x}\hat{\imath} + x\dot{\hat{\imath}} \underset{\hat{\imath}\ \text{costante}}{=} \dot{x}\hat{\imath}$$

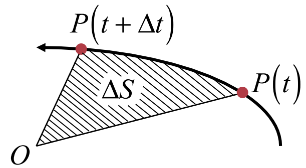
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

(rappresentazione **cartesiana** della velocità).



Velocità Areolare

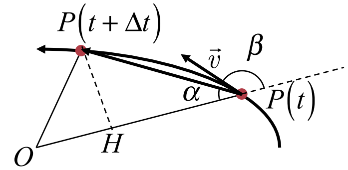
- Si definisce **velocità areolare** l'area spazzata dal vettore posizionale nell'unità di tempo:



$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left\|\overrightarrow{P(t)-O}\right\|}_{\text{base}} \underbrace{\left\|\overrightarrow{P(t+\Delta t)-H}\right\|}_{\text{altezza}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P(t)-O}\right\| \left\|\overrightarrow{P(t+\Delta t)-P(t)}\right\| |\sin\alpha|$$



$$\alpha \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \pi - \beta$$

$$\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$$

$$A \simeq \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P(t)-O}\right\| \left\|\frac{\overrightarrow{P(t+\Delta t)-P(t)}}{\Delta t}\right\| |\sin\alpha|\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P(t)-O}\right\| \left\|\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overrightarrow{P(t+\Delta t)-P(t)}}{\Delta t}\right\| |\sin(\pi-\beta)| =$$

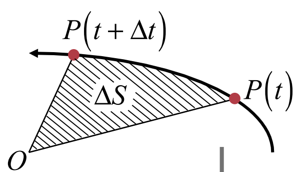
$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P-O}\right\| v |\sin\beta|$$

Velocità Areolare (II)

- Possiamo definire la velocità areolare come **vettore**:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P-O}\right) \wedge \vec{v}$$

- In tal caso essa risulta perpendicolare al piano del moto.
- La velocità areolare è pari alla **metà** del **momento della velocità rispetto al centro di riduzione** O.



Accelerazione

- Rappresenta quantitativamente la **rapidità con cui varia la velocità di un punto**.
- Possiamo quindi definire **accelerazione media** il rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

e **accelerazione istantanea** il limite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{P}} = \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t^2}$$

Espressione Intrinseca dell'Accelerazione

- Derivando rispetto al tempo l'espressione:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$$

- Si ottiene (derivata di un prodotto di funzioni):

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = \dot{f}(x)g(x) + f(x)\dot{g}(x)}$$

- Dobbiamo valutare $\dot{\hat{t}}$, che si può anche scrivere nella forma:

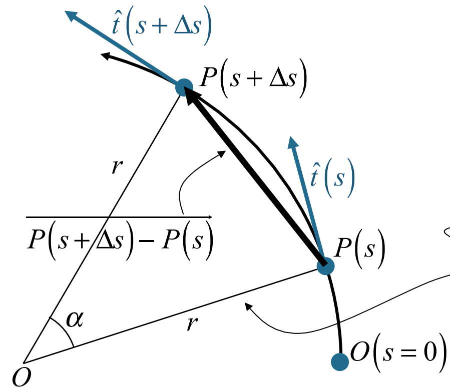
$$\dot{\hat{t}} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\dot{s}$$

N.B.: $\begin{cases} t = \text{tempo} \\ \hat{t} = \text{versore tangente alla traiettoria} \end{cases}$

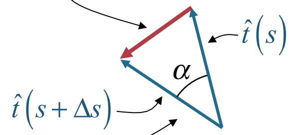
- Consideriamo **inizialmente** una **traiettoria circolare** e cerchiamo di determinare:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}$$

Espressione Intrinseca dell'Accelerazione (II)



$\Delta\hat{t} = \hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)$

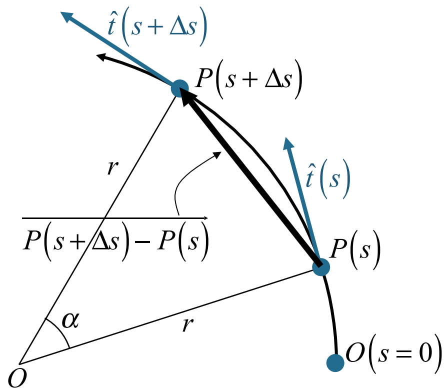


triangoli isosceli simili (hanno gli angoli rispettivamente uguali: α, $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\alpha)/2$).

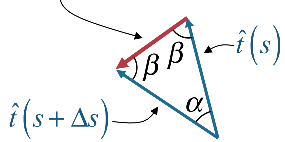
$$\frac{\left\|\Delta\hat{t}\right\|}{\left\|\overline{P(s+\Delta s)-P(s)}\right\|} = \frac{\left\|\hat{t}(s)\right\|}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\left\|\Delta\hat{t}\right\| = \frac{\left\|\overline{P(s+\Delta s)-P(s)}\right\|}{r}$$

Espressione Intrinseca dell'Accelerazione (III)



$\Delta\hat{t} = \hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)$

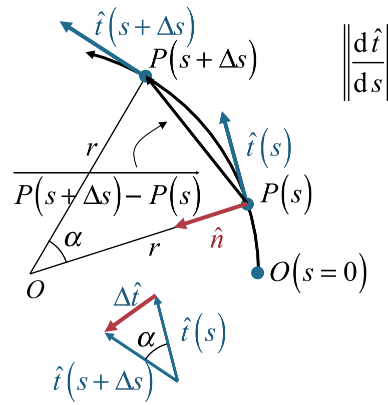


$$\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\beta = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta s\to 0]{} 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\hat{t} \underset{\Delta s\to 0}{\perp} \hat{t}$$

Espressione Intrinseca dell'Accelerazione (IV)



$$\left\|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\Delta\hat{t}\right\|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\frac{\left\|\overline{P(s+\Delta s)-P(s)}\right\|}{r} =$$

corda

$$= \frac{1}{r}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\overline{P(s+\Delta s)-P(s)}\right\|}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$

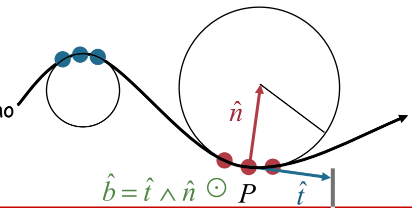
arco

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\dfrac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right\| = \dfrac{1}{r} \\ \Delta\hat{t} \underset{\Delta s\to 0}{\perp} \hat{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r}\hat{n}, \quad \hat{n} = \mathrm{vers}\left(\Delta\hat{t}\right)$$

- Dove $\hat{n}$ è il versore radiale **centripeto**, detto **normale** alla traiettoria.
- Vogliamo ora passare da una traiettoria **circolare** a una traiettoria **curvilinea qualunque**.

Piano Osculatore e Circonferenza Osculatrice

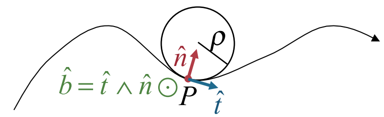
- Si può passare da una traiettoria circolare a una **traiettoria generica** approssimandone ogni tratto infinitesimo con un arco di circonferenza.
- La geometria analitica dimostra che in generale questo arco infinitesimo esiste:
  - Fa parte di una **circonferenza** detta **osculatrice** alla traiettoria in P,
  - Giace su di un piano detto **piano osculatore** della traiettoria in P;
  - Ha un raggio detto **raggio di curvatura** della traiettoria in P.
- Per **individuare** piano osculatore e circonferenza osculatrice:
  - Si prendono **3 punti** sulla traiettoria:
    - **Infinitamente vicini ma non coincidenti**;
  - Per 3 punti non coincidenti passa un solo piano (piano osculatore) e una sola circonferenza (circonferenza osculatrice).



Espressione Intrinseca dell'Accelerazione (V)

- Dato un punto P su di una **traiettoria curvilinea** γ definiamo **3 versori** che indicano 3 direzioni notevoli:
  - **Vesore tangente** $\hat{t}$ il versore tangente alla traiettoria nel punto P.
  - **Versore normale** $\hat{n}$ il versore perpendicolare alla traiettoria con verso centripeto (diretto verso il centro della circonferenza osculatrice).
  - **Versore binormale** $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$ il versore perpendicolare al piano osculatore.
- Indicando con ρ il raggio di curvatura, si ha, per una traiettoria qualunque:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}$$



Espressione Intrinseca dell'Accelerazione (VI)

- L'**espressione intrinseca dell'accelerazione** diviene quindi:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

La componente **binormale** dell'accelerazione, ovvero componente in direzione $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$ è sempre nulla.

- Mentre la **velocità** è **sempre tangente** alla traiettoria, l'**accelerazione** possiede una **componente tangenziale** e una **normale**.
  - Se il moto è **rettilineo** ($\rho \to \infty$) la componente normale si annulla e rimane **soltanto** la **componente tangenziale**.
  - Se il moto è **uniforme** ($\dot{s}$ costante) la componente tangenziale si annulla e rimane **soltanto** la **componente normale**.

Nota Bene

- Si osservi che, per le grandezze cinematiche **vettoriali** vale:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{P}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{P}$$

mentre per le grandezze cinematiche **scalari non** vale altrettanto:

$$v = \|\vec{v}\| = \dot{s}$$
$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}} = \sqrt{\left(\ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}\right)\bullet\left(\ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}\right)} =$$
$$= \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}} \neq \ddot{s}$$

Espressione Cartesiana dell'Accelerazione

- Derivando rispetto al tempo l'espressione cartesiana della velocità:

  $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k}$

  essendo i versori cartesiani $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ costanti, si ottiene l'espressione cartesiana dell'accelerazione:

  $\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath} + \ddot{z}\,\hat{k}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[f(x)\,g(x)\right] = \dot{f}(x)\,g(x) + f(x)\,\dot{g}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\dot{x}\hat{\imath}\right] = \ddot{x}\hat{\imath} + \dot{x}\dot{\hat{\imath}} \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{\imath}\ \text{costante}}}{=} \ddot{x}\hat{\imath}$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica