Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
la velocità limite e l'addizione non galileiana delle velocità

L'esistenza di una velocità massima possibile valida per ogni ente fisico (corpi materiali, onde, etc. etc.) è scritta nelle trasformazioni di Lorentz. Si noti, infatti, che compaiono denominatori con radici quadrate

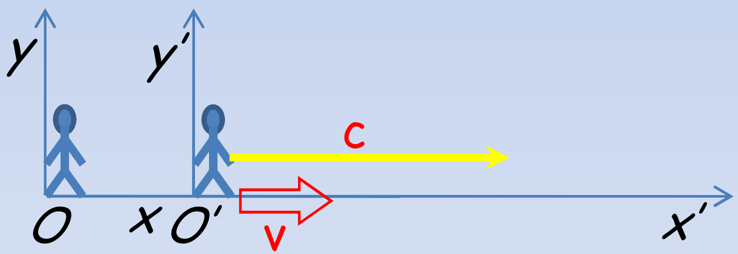
$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1); \quad (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1); \quad (t_2' - t_1') = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

le quali richiedono (a meno che non si vogliano considerare quantità complesse) che il radicando sia positivo $1-v^2/c^2 \geq 0$
da cui

$$\boxed{|v| \leq |c|}$$

<u>Le trasformazioni di Lorentz richiedono che, in ogni riferimento inerziale, la velocità di un qualunque ente fisico sia sempre minore o uguale a quella della luce, la quale, assume il ruolo di velocità limite</u>.

L'esistenza di una velocità massima possibile ha come conseguenza il fatto che *le regole di composizione delle velocità devono essere radicalmente diverse da quelle galileiane* altrimenti si avrebbero palesi violazioni del secondo postulato.
Immaginiamo, ad esempio, che l'osservatore *O'* invii un raggio luminoso lungo le *x'* positive che, in virtù del secondo postulato, si propagherà con velocità *c* rispetto a lui. Se fosse valida la legge galileiana di composizione, la velocità del raggio luminoso osservata da *O* dovrebbe essere *c'=c+v* violando inevitabilmente il secondo postulato.



Quale è dunque la nuova legge di composizione delle velocità in accordo con l'esistenza di una velocità limite?

Consideriamo ad esempio le trasformazioni degli intervalli da O' ad O. Evidentemente si ottengono le velocità semplicemente mettendo a rapporto gli intervalli spaziali e temporali

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dfrac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(y_2' - y_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(z_2' - z_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_y = \dfrac{\dfrac{(y_2' - y_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_z = \dfrac{\dfrac{(z_2' - z_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \\ v_y = \dfrac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \\ v_z = \dfrac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases}$$

da cui otteniamo le nuove leggi della somma delle velocità che sostituiscono quelle di Galileo valide nella fisica classica, ***le leggi relativistiche di composizione delle velocità***

$$\boxed{v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'}}$$

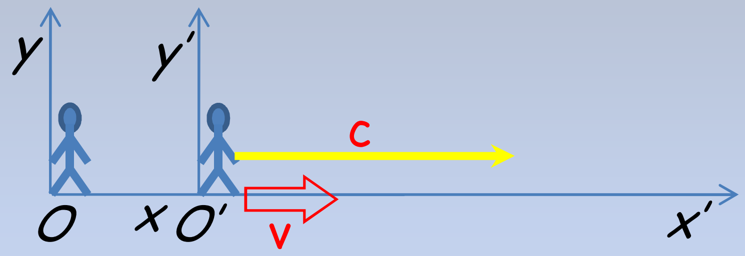
La struttura delle nuove leggi di composizione è piuttosto complessa, tuttavia, come atteso, le leggi relativistiche conducono a quelle galileiane nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Infatti se $v \ll c$ si ottiene facilmente

$$v_x \simeq v_x' + v \qquad v_y \simeq v_y' \qquad v_z \simeq v_z'$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_y = \dfrac{v_y' \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_z = \dfrac{v_z' \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases}$$

Notiamo che dato un corpo materiale in moto con una certa velocità ***v'ₓ***, ***v'ᵧ***, ***v'ᶻ*** rispetto ad O' appare in moto anche ad O, ovviamente. Tuttavia le velocità trasversali al moto che egli osserva, non dipendono solamente dalle velocità trasversali che il corpo aveva rispetto ad O', dipendono anche da quella longitudinale lungo la direzione del moto. In un certo senso *le componenti della velocità si mescolano* contrariamente a quanto avviene con la composizione galileiana delle velocità.

Ancora più sorprendente è la regola di addizione delle velocità lungo la direzione del moto. Ragionando con l'esempio esaminato all'inizio si ottiene



$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} c} = c$$

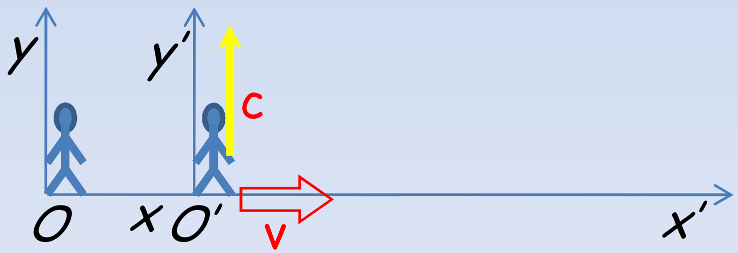
*Ovvero dato un riferimento O' che si muove con velocità v rispetto ad O (lungo le x' positive), se un raggio luminoso si muove con velocità c rispetto ad O' (lungo le x' positive), allora tale raggio si muove con velocità c anche rispetto ad O. Dunque, **secondo le leggi relativistiche di composizione delle velocità v+c=c, in accordo con l'esistenza di una velocità limite*** (e con il secondo postulato) ma in completo conflitto con le leggi galileiane.

Per completezza analizziamo anche il caso in cui il raggio luminoso verticalmente in O': ***v'_x=0, v'_y=c***

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \qquad v_y = \dfrac{v_y' \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} v_x'} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v \\ v_y = c\sqrt{1 - v^2 / c^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{v^2 + c^2 (1 - v^2 / c^2)} = c$$

che conferma le conclusioni già commentate.



Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz: il principio di causalità

Esaminiamo, ancora una volta, la trasformazione di Lorentz per l'intervallo temporale che riscriviamo in una forma adatta per le considerazioni che faremo

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t_2' - t_1')$$

ed immaginiamo che, nel riferimento O' (per semplicità lungo l'asse delle x), abbiano luogo due eventi: il primo nel punto x'_1 al tempo t'_1 ed il secondo nel punto x'_2 al tempo t'_2 (con t'_2 quindi successivo a t'_1).
Osserviamo che se il numeratore dell'ultima espressione è positivo allora se $t'_2-t'_1>0$ anche $t_2-t_1>0$ ovvero l'ordine temporale degli eventi è lo stesso per tutti e due gli osservatori.
Se invece il numeratore è negativo se $t'_2-t'_1<0$ si ha $t_2-t_1<0$ ovvero l'osservatore O vede un ordine degli eventi invertito rispetto a quello osservato da O'. Riassumendo abbiamo

$$\begin{cases} se \quad 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 0 \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) > 0 \\ se \quad 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < 0 \quad allora \quad (t_2' - t_1') > 0 \Rightarrow (t_2 - t_1) < 0 \end{cases}$$

d'altra parte abbiamo che

$$1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 0 \qquad \frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > -\frac{c^2}{v} \qquad \left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < \left|\frac{c^2}{v}\right| \le \left|\frac{c^2}{v_{\max}}\right| \le |c| \qquad dunque \quad \left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < |c|$$

per cui possiamo riscrivere le nostre condizioni nel modo seguente

$$\begin{cases} se \quad \left|\dfrac{(x_2'-x_1')}{(t_2'-t_1')}\right| < |c| \quad allora \quad (t_2'-t_1') > 0 \Rightarrow (t_2-t_1) > 0 & (1) \\ se \quad \left|\dfrac{(x_2'-x_1')}{(t_2'-t_1')}\right| > |c| \quad allora \quad (t_2'-t_1') > 0 \Rightarrow (t_2-t_1) < 0 & (2) \end{cases}$$

Quale è il significato di queste relazioni?

Per capirlo, immaginiamo che nel riferimento O' l'evento A corrisponda allo sparo di un proiettile da un certo punto x'_1 ad un certo tempo t'_1 , mentre l'evento B corrisponda all'arrivo del proiettile sul bersaglio nel punto x'_2 al tempo t'_2 che, in seguito all'impatto, va in frantumi. In questo caso l'evento A causa l'evento B e, nel riferimento O', lo precede temporalmente. Ora se questo non fosse vero anche in tutti gli altri riferimenti in alcuni casi potrebbe accadere di osservare l'evento B prima dell'evento A e dunque una situazione assurda nella quale la frantumazione del bersaglio precede l'arrivo del proiettile!
Il fatto che i due eventi possano essere connessi da un proiettile ci assicura, però, che deve essere verificata la (1) poiché nessuna azione fisica può superare la velocità della luce. In questo caso le trasformazioni di Lorentz garantiscono che ogni altro osservatore vedrà gli eventi nello stesso ordine temporale scongiurando la situazione assurda di cui sopra.
L'inversione degli eventi può avvenire solo con la condizione espressa dalla (2). Occorre però sottolineare che in questo caso la distanza spaziale e temporale degli eventi è tale da non potere essere in nessun modo connessi da una qualche azione fisica per cui l'inversione del prima con il dopo, in questo caso possibile, non può comunque produrre situazioni assurde.

L'esempio dovrebbe allora chiarire il significato delle (1) e (2):
il quoziente $R=(x'_2-x'_1)/(t'_2-t'_1)$ è il rapporto tra la distanza spaziale e temporale tra i due eventi misurata da O'. Ricordando che secondo la TRR esiste una velocità limite per tutti gli enti fisici, $|R|<|c|$ *significa che i due eventi potrebbero essere connessi da una qualche azione fisica, mentre* $|R|>|c|$ *significa che i due eventi non potrebbero in nessun modo essere connessi da una qualche azione fisica*. Nel primo caso si dice che gli eventi potrebbero essere in una *relazione di causa-effetto* o semplicemente in una *relazione causale*, mentre nel secondo caso si dice che gli eventi non potrebbero essere in una relazione di causa-effetto o in una relazione causale.
Le disequazioni di cui sopra allora affermano che
se due eventi fisici possono essere in relazione causale, l'ordine temporale degli eventi è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali, mentre, se due eventi fisici non possono essere in relazione causale l'ordine temporale degli eventi può essere scambiato per certi osservatori.
Questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di cruciale importanza in quanto afferma che nonostante la relatività degli intervalli spaziali e temporali ***nella teoria della relatività vale il principio di causalità*** (*se due eventi sono in relazione causale allora il primo deve precedere il secondo per ciascun osservatore inerziale*), **requisito irrinunciabile per una teoria fisica!**

Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali

Abbiamo appreso, nelle pagine precedenti, che la distanza spaziale e temporale tra due eventi fisici è relativa dipendendo dall'osservatore inerziale che la misura, così come relativa risulta essere la loro eventuale simultaneità.
Secondo le trasformazioni di Galileo invece le distanze spaziali tra eventi simultanei sono assolute [$\Delta x = \Delta x'$ *se* $\Delta t' = 0$] così come le distanze temporali tra eventi non simultanei ($\Delta t = \Delta t'$). L'unica grandezza relativa risulta essere la distanza spaziale di eventi non simultanei che essendo data dalla espressione $\Delta x = (\Delta x' + v\Delta t')$ dipende chiaramente dall'osservatore che la misura.
Con le trasformazioni di Lorentz tutte queste grandezze diventano relative per cui *ci si potrebbe chiedere se nella teoria della relatività ristretta esistano grandezze assolute.*
Richiamiamo allora le trasformazioni di Lorentz ed immaginiamo due eventi fisici tali che $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$, $\Delta z' = 0$ e $\Delta t' = 0$ ovvero *tali da essere coincidenti sia spazialmente che temporalmente per l'osservatore O':*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1'); \quad (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1'); \quad (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = 0 \\ (y_2 - y_1) = 0 \\ (z_2 - z_1) = 0 \\ (t_2 - t_1) = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\boxed{\begin{cases} \Delta x' = 0 \\ \Delta y' = 0 \\ \Delta z' = 0 \\ \Delta t' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 0 \\ \Delta y = 0 \\ \Delta z = 0 \\ \Delta t = 0 \end{cases}}$$

se due eventi fisici coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora soddisfano questa condizione per ogni altro osservatore inerziale dunque ***la coincidenza spaziale e temporale di due eventi è assoluta***.
Come vedremo questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di grande rilevanza.

Le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz:
l'assolutezza delle distanze spazio-temporali

Richiamiamo ancora le trasformazioni di Lorentz, riscriviamole in una forma più compatta sostituendo le espressioni (***x_2-x_1***) con ***Δx*** etc. etc, eleviamo al quadrato gli intervalli e, infine, sommiamo i quadrati dei tre intervalli spaziali sottraendo il quadrato di quello temporale moltiplicato per ***c^2***. Ecco qua sotto i calcoli

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x' + v\,\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \dfrac{\Delta t' + \dfrac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x^2 = \dfrac{\Delta x'^2 + v^2\Delta t'^2 + 2v\Delta x'\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y^2 = \Delta y'^2 \\ \Delta z^2 = \Delta z'^2 \\ \Delta t^2 = \dfrac{\Delta t'^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x'^2 + 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x'\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)} \end{cases}$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \frac{\Delta x'^2 + v^2\Delta t'^2 + 2v\Delta x'\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\,\frac{\Delta t'^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x'^2 + 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x'\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)} =$$

$$= \frac{\Delta x'^2 + v^2\Delta t'^2 + 2v\Delta x'\Delta t' - c^2\Delta t'^2 - \dfrac{v^2}{c^2}\Delta x'^2 - 2v\Delta x'\Delta t'}{(1 - v^2/c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 =$$

$$= \frac{\Delta x'^2(1 - v^2/c^2) - c^2\Delta t'^2(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2$$

ovvero

$$\boxed{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2=(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2}$$

Si noti che la somma dei termini tra parentesi rappresenta il quadrato della distanza spaziale tra due eventi e che questa, come atteso non è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Tuttavia se gli osservatori inerziali sottraggono alla distanza spaziale tra due eventi il prodotto della velocità della luce con la loro distanza temporale (ovvero la quantità $c^2\Delta t^2$ che ha le dimensioni di una lunghezza elevata al quadrato) troveranno tutti lo stesso valore. Nella TRR questo tipo di distanza prende il nome di ***distanza spaziotemporale tra due eventi*** per cui possiamo affermare che ***la distanza spazio-temporale tra gli eventi è la stessa per tutti gli osservatori inerziali*** ovvero che ***la distanza spaziotemporale tra due eventi è una grandezza assoluta*** (in questa forma, l'assolutezza delle coincidenze spaziotemporali viste nella pagina precedente si deriva immediatamente) .

Vale la pena sviluppare alcune considerazioni in merito alla espressione appena vista. Per cominciare pensiamo a due punti nello spazio ordinario tridimensionale: la loro distanza, per un certo osservatore O, è data dal teorema di Pitagora

$$d^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$$

Ora se assumiamo un riferimento O' ruotato rispetto ad O il nuovo osservatore misurerà diverse coordinate dei punti e quindi diversi valori degli intervalli $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ ma, quando va a calcolare la distanza tra i due punti, trova lo stesso valore misurato da O. Dunque

$$d^2=(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)$$

da cui

$$(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)=(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2) \qquad (1)$$

la distanza tra due punti dello spazio ordinario è la stessa per tutti gli osservatori ruotati tra loro.

Ora gli eventi fisici possiedono, oltre ad una posizione nello spazio, anche una posizione nel tempo per cui potremmo pensare di rappresentarli in un riferimento con quattro assi cartesiani: tre dedicati alla posizione spaziale ***(x,y,z)*** ed uno dedicato a quella temporale ***t***. Per rappresentare lunghezze anche su questo quarto asse, potrebbe poi essere conveniente posizionare l'evento non in ***t*** ma in ***ct***. In questo modo, due eventi fisici in questo spazio sarebbero caratterizzati dagli intervalli spaziali Δx, Δy, Δz e temporali $c\Delta t$ e la distanza potrebbe essere calcolata attraverso il teorema di Pitagora in quattro dimensioni

$$d^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)+c^2\Delta t^2$$

Pensando poi di assimilare un cambiamento di riferimento inerziale ad una rotazione del sistema d'assi quadridimensionale si otterrebbe, in analogia con il caso tridimensionale,

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + c^2 \Delta t'^2$$

e quindi

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + c^2 \Delta t^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + c^2 \Delta t'^2 \qquad (2)$$

che assomiglia molto alla relazione soddisfatta dalle trasformazioni di Lorentz trovata nella pagina precedente

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2 \Delta t^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) - c^2 \Delta t'^2 \qquad (3)$$

Seguendo questa idea *si potrebbe pensare di interpretare il passaggio fisico da un riferimento all'altro come una rotazione ordinaria di un riferimento a quattro dimensioni (tre spaziali ed una temporale) nel quale però il teorema di Pitagora vale per le dimensioni spaziali ma non per quella temporale dato che c'è un segno meno nella (3).*
Se si è però disposti ad introdurre *un asse dei tempi immaginario*, la (3) può essere scritta come

$$\boxed{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + (i^2 c^2 \Delta t^2) = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + (i^2 c^2 \Delta t'^2) \qquad (4)}$$

ovvero identica alla (2). Dunque, ***una volta introdotti tre assi spaziali ordinari ed un asse dei tempi immaginario, il passaggio da un riferimento inerziale ad un altro è assimilabile ad una rotazione dell'intero sistema d'assi, dove, pur variando gli intervalli, vengono conservate le distanze calcolate con il teorema di Pitagora in quattro dimensioni.***

Questa interpretazione geometrica delle trasformazioni di Lorentz, basata sul concetto di rotazione, fu suggerita nel 1908 dal matematico tedesco Hermann Minkowsky (circa tre anni dopo la formulazione della TRR da parte di A. Einstein). In suo onore, ***il riferimento a quattro assi ortogonali di cui tre ordinari ed uno temporale immaginario, viene detto riferimento spaziotemporale o spazio-tempo di Minkowsky***. Assumendo questa definizione i risulta i appena discussi si riassumono affermando che

il passaggio fisico da un riferimento inerziale all'altro è assimilabile ad una rotazione del riferimento di Minkowsky (o ad una rotazione nello spazio-tempo di Minkowsky).

Lo spazio tempo di Minkowsky è, in ultima analisi, *una elegante costruzione formale capace di descrivere in modo sintetico il contenuto fisico della teoria della relatività ristretta.*
Quando i fisici devono stabilire se una data nuova teoria rispetti o meno la TRR, oppure vogliono costruire una nuova teoria in accordo con la TRR, lo spazio-tempo di Minkowsky rappresenta la via più rapida per raggiungere lo scopo. Nonostante questo fondamentale vantaggio, sotto il profilo fisico non aggiunge nulla di nuovo a quanto già affermato dalle stesse trasformazioni di Lorentz.

Rotazioni del riferimento di Minkowsky:
deduzione degli effetti relativistici

In quel che segue, cercheremo di dedurre gli effetti relativistici per via geometrica, ruotando il riferimento di Minkowsky.

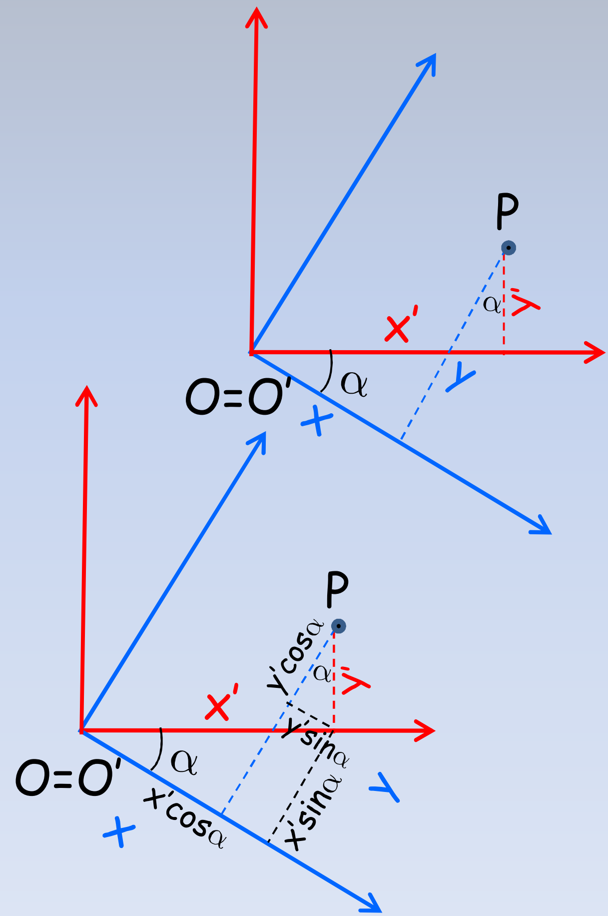
Per cominciare analizziamo una ***rotazione ordinaria***, di un certo angolo α, della coppia di assi rappresentata in figura. Con tutta evidenza il punto ***P*** possiede coordinate ***x'*** e ***y'*** rispetto al sistema iniziale (in rosso) e coordinate ***x*** e ***y*** rispetto a quello finale ruotato (in blu).

Dalla figura sottostante troviamo facilmente

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \dfrac{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \\[2ex] y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = \dfrac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \end{cases}$$

le quale si può anche scrivere come

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \\[2ex] y = \dfrac{y' + x'tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \end{cases}$$



Tali espressioni mostrano una notevole somiglianza con le trasformazioni di Lorentz!

Ricordiamo ora che le trasformazioni di Lorentz sono rotazioni nello spazio-tempo di Minkowsky che prevede *un asse dei tempi immaginario* che assumiamo lungo l'asse delle ***y***

$$y' = ict' \qquad y = ict$$

Notiamo, inoltre, che nelle espressioni della pagina precedente compare la radice

$$\sqrt{1+tg^2\alpha}$$

alla quale corrisponde, nelle trasformazioni di Lorentz, la radice

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

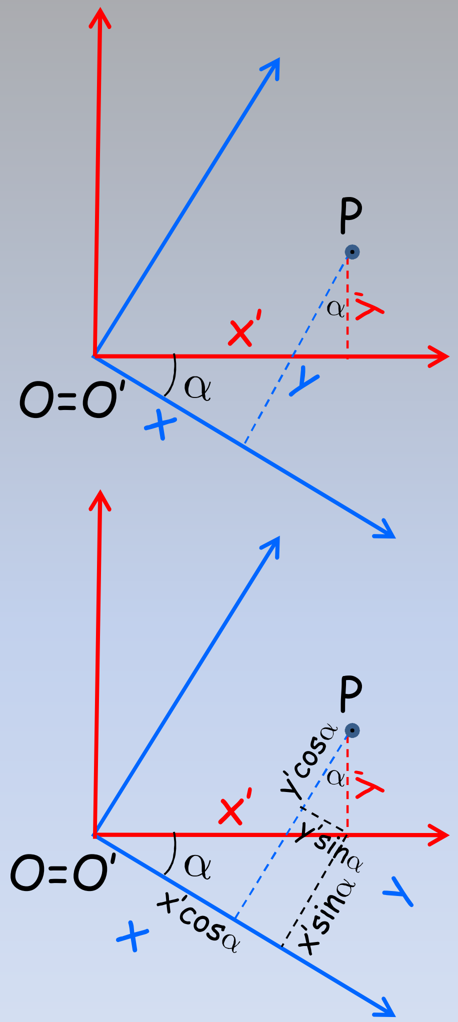
Le due radici quadrate saranno uguali se

$$tg^2\alpha = -\frac{v^2}{c^2} \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

Sostituendo ora *y', y, e tg* α nelle formule della rotazione ordinaria della pagina precedente otteniamo le espressioni

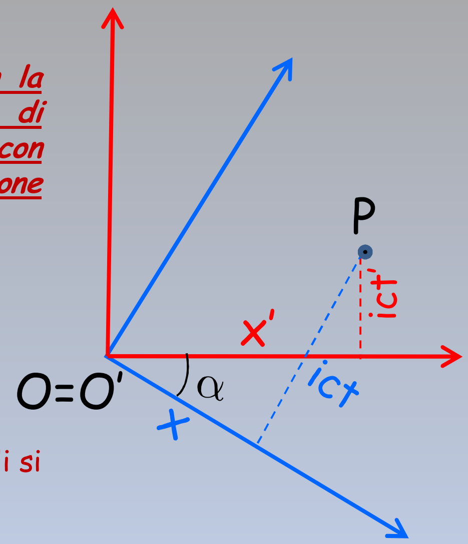
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y' tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x' tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' - ict'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \\ ict = \dfrac{ict' + x'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

perfettamente coincidenti con le trasformazioni di Lorentz per le coordinate x e t!



Giungiamo allora alla seguente conclusione: ***costruendo lo spazio di Minkowsky con la variabile x' lungo l'ascissa e la variabile ict' lungo l'ordinata, la trasformazione di Lorentz con velocità v (ovvero il passaggio da un riferimento inerziale O' in moto con velocità v al riferimento inerziale O fisso) è formalmente identica ad una rotazione oraria del riferimento di un angolo α tale che***

$$\boxed{tg\alpha = i\frac{v}{c}}$$



dove evidentemente l'angolo è tanto più grande quanto maggiore è la velocità.

NOTA: data una certa velocità di traslazione v, si calcolerà l'angolo tale che *tg*α*=v/c* e gli si aggiungerà l'unità immaginaria *i*.

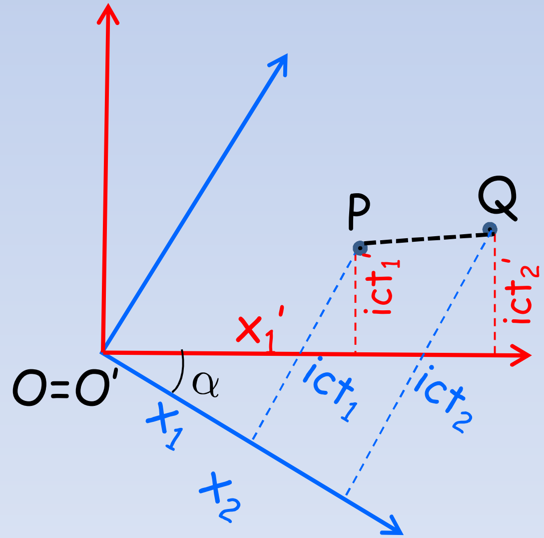
Distanza spaziotemporale

Dati due eventi fisici P e Q, la trasformazione di Lorentz (rotazione) lascia invariata la distanza degli eventi

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \Delta y' = ic\Delta t' \qquad \Delta y = ic\Delta t$$

sostituendo otteniamo

$$\Delta x'^2 + (ic\Delta t')^2 = \Delta x^2 + (ic\Delta t)^2 \qquad \boxed{\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2}$$



la quale mostra che ***l'invarianza della distanza spaziotemporale tra due eventi in seguito ad una trasformazione di Lorentz viene interpretata come invarianza della distanza pitagorica nello spazio di Minkowsky a seguito della rotazione corrispondente.***
Si noti che, come caso particolare, si ottiene immediatamente che se P e Q coincidono per O' allora coincidono anche per O da cui l'affermazione che *se due eventi coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora devono coincidere per ogni altro.*

Dilatazione del tempo

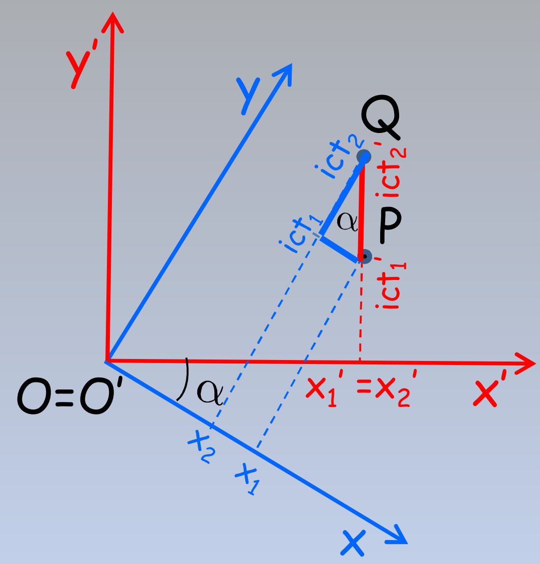
Consideriamo 'l'orologio luminoso' con il cammino di andata e ritorno del raggio lungo l'asse y' del riferimento O' analizzato a suo tempo. La partenza e l'arrivo del raggio luminoso in O' corrispondono a due eventi con la stessa ascissa x' e diversa ordinata ict' (vedi figura).
La trasformazione di Lorentz (rotazione del riferimento) fa si che l'osservatore O veda invece due eventi con un certo intervallo spaziale x_2-x_1 (che O' non osserva) e soprattutto un diverso intervallo temporale t_2-t_1 (dilatazione del tempo). Per quanto riguarda quest'ultimo si ha

$$\Delta y = \Delta y' \cos\alpha \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c} \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad \Delta y' = ic\Delta t'$$

Dalla trigonometria si ha $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ e quindi sostituendo la formula della dilatazione del tempo

$$ic\Delta t = ic\Delta t' \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = ic\Delta t' \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$



Relatività della simultaneità

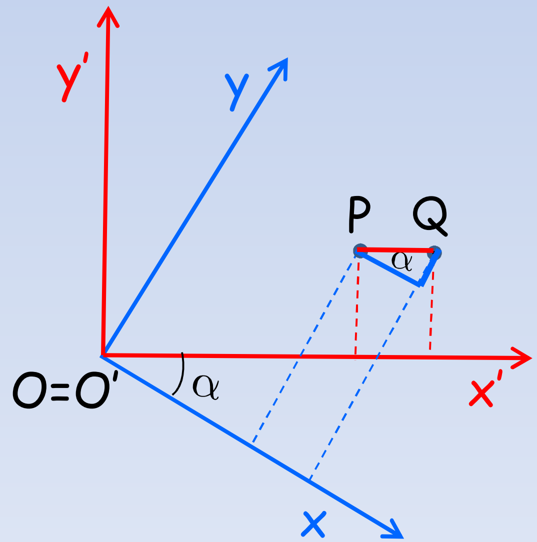
Gli eventi P e Q, in posizioni diverse, appaiono simultanei a O' ma non ad O (relatività della simultaneità). Dalla geometria si ha facilmente che

$$\Delta y = \Delta x' \sin\alpha \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c} \qquad \Delta y = ic\Delta t$$

Dalla trigonometria si ha $\sin\alpha = tg\alpha/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ da cui sostituendo la formula della desincronizzazione

$$ic\Delta t = \Delta x' \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \Delta x' \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$



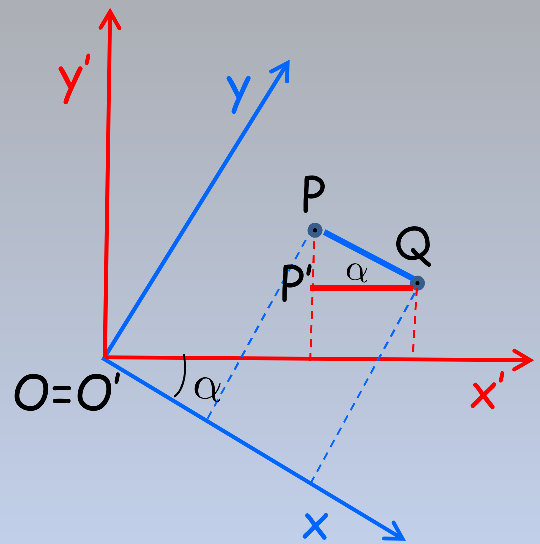
Contrazione delle lunghezze

Data una lunghezza in quiete nel riferimento O', l'osservatore in moto O misura una lunghezza pari alla distanza di due suoi osservatori che vedono gli estremi nello stesso istante, dunque la distanza dei punti P e Q. L'osservatore O' invece misura la distanza dei punti P' e Q. Abbiamo allora

$$\Delta x \cos\alpha = \Delta x' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

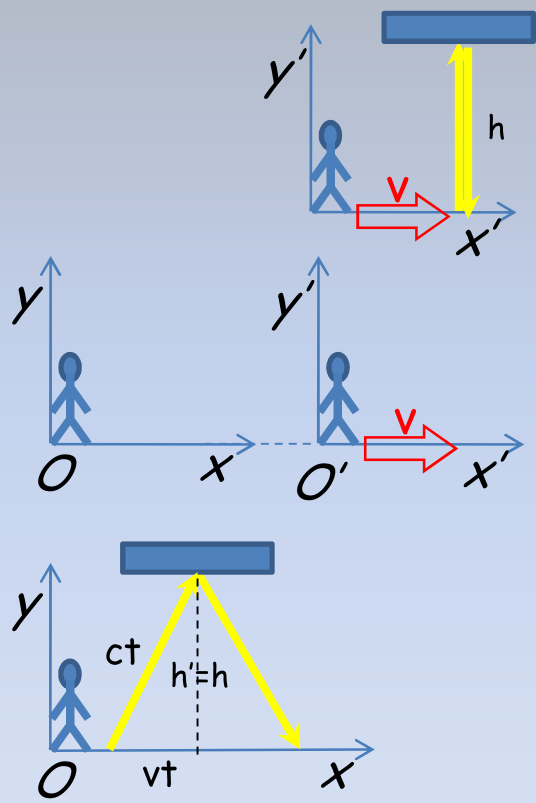
Dalla trigonometria si ha $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ e quindi sostituendo la formula della contrazione della lunghezza

$$\boxed{\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



Dai raggi luminosi alle proprietà intrinseche dello spazio e del tempo

Tutti gli esempi ed i commenti precedenti hanno riguardato sistemi fisici relativamente semplici nei quali era sempre coinvolta la propagazione di raggi luminosi. Questo fatto è in certo senso inevitabile poiché i postulati della TRR precisano in che modo si propaga la luce e quindi qualunque esempio che voglia sfruttarli direttamente deve necessariamente prevedere eventi fisici con raggi luminosi. Questo fatto *potrebbe fare sorgere il dubbio che le trasformazioni di Lorentz descrivano il comportamento dei raggi luminosi e di tutti i fenomeni ad essi connessi e non proprietà intrinseche dello spazio e del tempo.*



Ad esempio consideriamo il semplice dispositivo utilizzato per illustrare il fenomeno della dilatazione dei tempi. Come sappiamo qualche si dimostra facilmente che

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

L'intervallo temporale tra gli eventi Δt_0 , misurato dall'osservatore in quiete O', è più corto di quello Δt_M misurato dall'osservatore in moto O. In questa situazione *si potrebbe pensare che non è l'intervallo temporale a dilatarsi ma piuttosto il modo in cui lo misuriamo.* In altre parole, si potrebbe pensare che usando un orologio, diciamo così, luminoso, si trova l'effetto calcolato mentre usando, ad esempio, un orologio a cucù, si potrebbe trovare una diversa entità dell'effetto o, addirittura, la sua completa assenza.

Se le cose stessero così, non saremmo in presenza di proprietà autentiche (ovvero intrinseche) degli intervalli temporali, ma piuttosto di proprietà dipendenti dal modo in cui questi vengono misurati. Come vedremo la TRR non lascia aperta questa possibilità!

Per comprendere questo fatto, immaginiamo di aggiungere al dispositivo di prima *un pendolo di lunghezza tale da oscillare, nel riferimento O', con lo stesso tempo che impiega il raggio luminoso a compiere il cammino di andata e ritorno*. Possiamo poi sistemare il pendolo in modo tale che, quando il raggio luminoso parte dal punto A, il pendolo parta dallo stesso punto. Siccome il pendolo ha la lunghezza giusta, quando torna nel punto A, incontra nuovamente, in quel punto, il raggio luminoso.

Notiamo subito che in A la posizione del pendolo e del raggio luminoso coincidono sia spazialmente che temporalmente e che, dopo un certo tempo, il raggio luminoso ed il pendolo tornano nello stesso punto A ovvero tornano a coincidere sia spazialmente che temporalmente.

Siccome le coincidenze spaziotemporali sono assolute, queste avvengono per tutti gli osservatori inerziali per cui ogni altro osservatore inerziale O troverà tali coincidenze.

Questo però richiede che l'oscillazione del pendolo e l'oscillazione dell'orologio luminoso abbiano la stessa durata non solo per l'osservatore O' ma per ogni altro osservatore O.

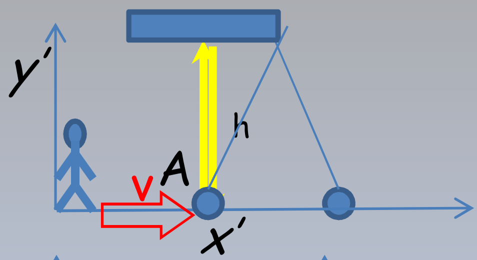
Questo a sua volta equivale ad affermare che se si dilata il tempo misurato dall'orologio luminoso deve dilatarsi, nello stesso modo, anche il tempo misurato dal pendolo.

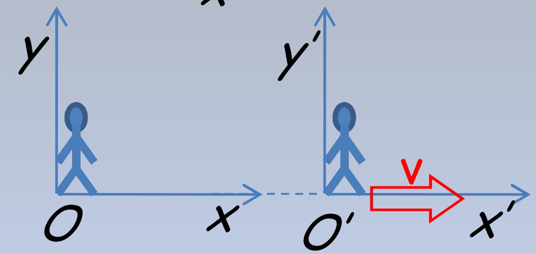
Dato che questo stesso ragionamento può essere ripetuto con qualunque dispositivo si voglia misurare gli intervalli temporali, è chiaro che ci troviamo innanzi ad una proprietà del tempo indipendente dal modo in cui viene misurato vale a dire ad una sua proprietà intrinseca.

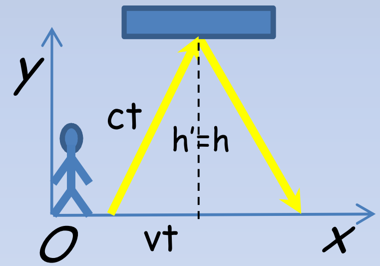
Questi ragionamenti possono essere facilmente estesi anche agli altri effetti relativistici quali la relatività della simultaneità e la contrazione delle lunghezze. Possiamo allora affermare in generale che:

L'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali richiede che le proprietà dello spazio e del tempo, misurate con i raggi luminosi, debbano essere vere per qualunque altro metodo di misura, ovvero, che siano proprietà intrinseche dello spazio e del tempo .

Dunque qualunque intervallo temporale dura più a lungo se osservato i movimento così come qualunque distanza spaziale si accorcia. Sono lo spazio ed il tempo in se ad essere coinvolti e non semplicemente la loro operazione di misura.







Alcuni commenti sulle Trasformazione di Lorentz :
nella TRR è tutto relativo?

Spesso si dice che con la teoria della relatività tutto diventa relativo. Nulla di più sbagliato!
La teoria della relatività afferma che certe grandezze che nella fisica classica si pensava fossero assolute sono in realtà relative ma che esistono nuove grandezze fisiche ignote alla fisica classica che invece sono assolute. In un certo senso ***la teoria della relatività rende relative le vecchie grandezze fisiche ma ne introduce nuove che sono assolute***.
Questo fatto è in se evidente se riassumiamo le principali conclusioni cui siamo giunti analizzando le trasformazioni di Lorentz

i) Gli intervalli temporali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relativi ed aumentano con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *dilatazione dei tempi*);
ii) La simultaneità tra due eventi separati nello spazio dipende dall'osservatore inerziale, è dunque relativa ed il grado di dissincronia aumenta con la velocità dell'osservatore e con la distanza spaziale degli eventi stessi (*relatività della simultaneità*);
iii) Le distanze spaziali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relative e diminuiscono con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *contrazione delle lunghezze*);
iv) La velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque una grandezza assoluta;
v) Le distanza spaziotemporali e le coincidenze spaziotemporali sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e sono dunque grandezze assolute;
vi) L'ordine temporale di eventi che possono essere connessi causalmente è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque assoluto;

In estrema sintesi *la TRR afferma che le distanze spaziali e temporali sono relative ma quelle spaziotemporali sono assolute.*

La costruzione della meccanica relativistica

Quale sia la meccanica nel caso in cui *le velocità dei corpi materiali siano piccole rispetto alla velocità della luce* lo sappiamo: questa non può che essere *la meccanica newtoniana*. Nel suo ambito, i successi la capacità di spiegare i fatti sperimentali sono tali da non lasciare spazio a dubbi.
Immaginiamo allora che *O' sia un osservatore inerziale che vede, ad un certo istante, il corpo materiale fermo* (dato che il corpo materiale in generale può accelerare il riferimento O' soddisfa questa condizione solo all'istante *t*) e quindi verifica la validità della meccanica newtoniana. Chiameremo O' il ***riferimento proprio*** (oppure osservatore proprio) del corpo materiale.
Per capire quali siano, invece, le leggi meccaniche nel caso in cui la velocità del corpo materiale sia rilevante rispetto a quella della luce, si potrebbe pensare di assumere il punto di vista di un osservatore inerziale O che vede il riferimento O' in rapido moto. Chiameremo O ***riferimento relativistico*** (oppure osservatore relativistico).
Si potrebbe poi pensare di ottenere le leggi meccaniche valide per l'osservatore relativistico (meccanica relativistica) semplicemente effettuando una trasformazione di Lorentz su ognuna delle grandezze che compaiono nelle leggi meccaniche note (ovvero le leggi newtoniane) dell'osservatore proprio.
Si può fare, ma sorgono alcuni problemi che devono essere superati.

Per cominciare a ragionare in termini concreti, immaginiamo che l'osservatore proprio, newtoniano O', applichi il secondo principio della dinamica ad un certo corpo materiale di massa *m'* soggetto ad una forza *F'*. Lungo l'asse delle x', ad esempio, scriverà

$$F'_x = m' \frac{d}{dt'} \frac{d}{dt'} x'$$

dove gli apici ricordano che si tratta di grandezze fisiche misurate da O'.
Sulla base di quanto detto la meccanica relativistica si potrebbe ottenere effettuando una trasformazione di Lorentz sulle grandezze ***F'$_x$***, ***m'***, ***dt'***, e ***x'***. Premesso che non sappiamo come si trasformano ***F'$_x$*** ed ***m'***, è comunque chiaro che *il numero di trasformazioni di Lorentz da effettuare nei due membri della equazione è differente .*

Come è facile intuire, se effettuiamo un diverso numero di trasformazioni di Lorentz nei due membri della equazione si determina *cambiamento di forma* della equazione per l'osservatore relativistico O e dunque una violazione del primo postulato che vuole che tutti gli osservatori inerziali verifichino le stesse leggi della fisica. Comprendiamo allora che il contenuto fisico del principio di relatività può essere soddisfatto richiedendo che i due membri della equazione di una certa legge fisica, qualora si cambi riferimento inerziale, si trasformino con lo stesso numero di trasformazioni di Lorentz (ovvero si trasformino nello stesso modo). Giungiamo allora alla ***formulazione matematica del principio di relatività*** spesso detto ***principio di covarianza*** il quale afferma che ***affinchè una legge fisica soddisfi il principio di relatività è sufficiente che, qualora si cambi il riferimento inerziale, i suoi membri si trasformino nello stesso modo rispetto alle trasformazioni di Lorentz***.

Riprendiamo allora l'equazione meccanica $$F'_x = m'\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}x'$$

e osserviamo subito che abbiamo buoni motivi per richiedere che la forza F'_x si trasformi, nel passaggio da un riferimento all'altro, come $\Delta x'$. Ricordiamo infatti che la forza altro non è che l'azione sviluppata da un dinamometro compresso o allungato disposto, ad un certo istante, tra due punti dello spazio P e Q. Questo significa che nel passaggio da un riferimento all'altro ***la forza F deve trasformarsi come il segmento che congiunge i punti P a Q nello stesso istante t ovvero come le grandezze $\Delta x'$, $\Delta y'$ e $\Delta z'$ con $\Delta t'=0$*** (si ricordi che abbiamo già sfruttato questo fatto all'inizio introducendo la meccanica newtoniana).
Richiamiamo allora la legge di trasformazione degli intervalli nel passaggio da O' ad O

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{(\Delta x' + v\Delta t')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \dfrac{(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{(\Delta x' + \frac{v}{c}c\Delta t')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ c\Delta t = \dfrac{(c\Delta t' + \frac{v}{c}\Delta x')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ c\Delta t = \dfrac{\frac{v}{c}\Delta x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \dfrac{F'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ F_y = F'_y \\ F_z = F'_z \\ F_t = \dfrac{\frac{v}{c}F'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

NOTA: Si osservi che nel riferimento relativistico O, oltre alla forza opportunamente trasformata che comunque si osserva anche nel riferimento proprio O', compare una grandezza che abbiamo indicata con F_t e che dipende da $F'x$. Pur non occupandoci ora del suo significato, tale grandezza è una conseguenza inevitabile delle trasformazioni di Lorentz e dunque della TRR.

Qualora cambiassimo riferimento, sulla base del principio di covarianza (ovvero del principio di relatività), dovremmo avere nella equazione

$$F'_x = m'\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}x'$$

lo stesso numero di trasformazioni di Lorentz.

Trasformandosi la forza come $\Delta x'$ il membro di sinistra porta con se una trasformazione di Lorentz per cui la stessa cosa deve fare il membro di destra. Dato che la posizione x' del corpo materiale porta con se una trasformazione di Lorentz dobbiamo concludere che le grandezze m' e dt' non devono essere trasformate rimanendo quelle del riferimento proprio per ogni osservatore inerziale O.

Dunque ***affinchè sia soddisfatto il principio di covarianza (principio di relatività) è necessario che la massa del corpo materiale e l'intervallo temporale vengano misurate nel riferimento proprio***.

Dato che la massa e il tempo nel riferimento proprio si chiamano solitamente ***massa a riposo*** e ***tempo proprio*** e si indicano con m_0 e τ, il secondo principio della dinamica nel riferimento proprio O' prende allora la forma seguente

$$F'_x = m_0\frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}x'$$

Usando le trasformazioni di Lorentz, possiamo affermare, senza fare calcoli, che *nel riferimento relativistico* il secondo principio della dinamica avrà la stessa forma ma con la forza e la posizione senza apici. Dunque, ***l'espressione relativistica del secondo principio della dinamica*** deve essere la seguente

$$\boxed{F_x = m_0\frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}x}$$

la forza eguaglia il prodotto della massa a riposo per la derivata seconda rispetto al tempo proprio della posizione

Dunque, nella espressione delle leggi meccaniche valide per un certo osservatore inerziale O non compaiono la massa la velocità e l'accelerazione misurate da O nel modo consueto ovvero dividendo (nel caso della velocità e della accelerazione) la variazione di posizione e velocità misurate da O per l'intervallo temporale pure misurato da O. Compaiono invece ***la massa misurata nel riferimento proprio (massa a riposo) ed un nuovo tipo di velocità ed accelerazione, calcolate dividendo la variazione di posizione misurata da O per l'intervallo temporale misurato dall'osservatore proprio*** (dunque quantità misurate da differenti osservatori).

Tali velocità ed accelerazione vengono dette ***velocità ed accelerazione di Minkowsky***

$$V_x = \frac{d}{d\tau}x \qquad A_x = \frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}x$$

per cui una formulazione equivalente del secondo principio è

$$F_x = \frac{d}{d\tau}m_0 V_x \qquad F_x = m_0 A_x$$

la forza eguaglia la derivata rispetto al tempo proprio della massa a riposo per la velocità di Minkowsky (quantità di moto di Minkowsky) oppure il prodotto della massa a riposo per l'accelerazione di Minkowsky