



FONDAZIONE  
GIUSEPPE OCCHIALINI

## Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

### Introduzione alla Relatività Ristretta III parte

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 20 Aprile 2009



FONDAZIONE  
GIUSEPPE OCCHIALINI

## Trasformazioni di Lorentz

### Il cambiamento di SdR in meccanica relativistica.

Introduzione alla Relatività  
Ristretta. III parte. 2  
Domenico Galli

## Le Nuove Leggi di Trasformazione

- Vogliamo ora formulare le nuove leggi di trasformazione che sostituiscano la trasformazione di Galileo.
- Ci baseremo sui seguenti postulati:
  - Validità del **Principio di Relatività Ristretta**:
    - le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i SdR inerziali;
  - **Invarianza** della **velocità della luce nel vuoto**:
    - la luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità che ha lo stesso valore  $c$  in tutti i SdR inerziali;
  - **Omogeneità** dello **spazio-tempo**:
    - Le leggi della fisica sono invarianti per **traslazioni** nello spazio o nel tempo;
  - **Isotropia** dello **spazio-tempo**:
    - Le leggi della fisica sono invarianti per **rotazioni**.

## La Forma Generale

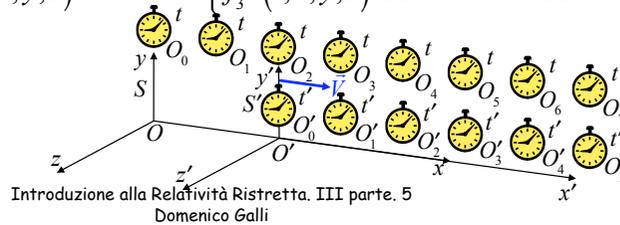
- Innanzitutto le trasformazioni che cerchiamo possono coinvolgere le 3 variabili **spaziali**  $x$ ,  $y$  e  $z$  e, a differenza delle trasformazioni di Galileo, anche la variabile **temporale**  $t$ .

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) \\ x' = f_1(t, x, y, z) \\ y' = f_2(t, x, y, z) \\ z' = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

## La Forma Generale (II)

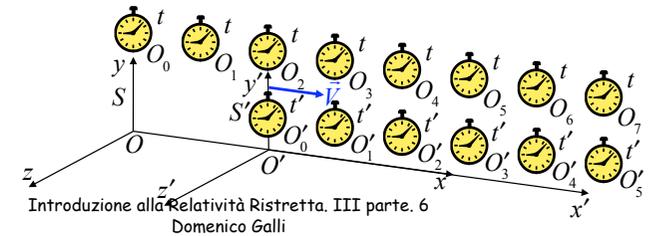
- In queste trasformazioni  $f_0, f_1, f_2$  e  $f_3$ , sono funzioni generiche che associano a una quaterna ordinata di numeri reali un altro numero reale:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) \\ x' = f_1(t, x, y, z) \\ y' = f_2(t, x, y, z) \\ z' = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} f_0 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow t' \in \mathbb{R} \\ f_1 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow x' \in \mathbb{R} \\ f_2 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow y' \in \mathbb{R} \\ f_3 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow z' \in \mathbb{R} \end{cases}$$



## La Forma Generale (III)

- Procederemo ora nel cercare le **restrizioni** che i **postulati** prima elencati (relatività, invarianza della velocità della luce, omogeneità e isotropia dello spazio-tempo) **impongono alla forma** delle **funzioni**  $f_0, f_1, f_2$  e  $f_3$ .

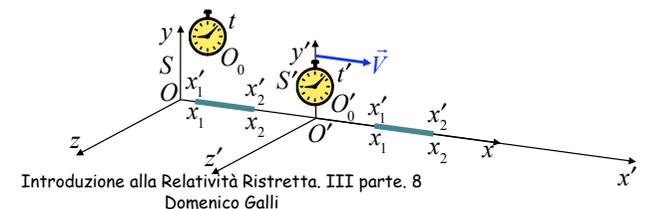


## Omogeneità dello Spazio-Tempo

- Qualunque esperimento deve dare esattamente gli stessi risultati se viene ripetuto nelle stesse condizioni fisiche in punti diversi dello spazio e in tempi diversi (**omogeneità** dello spazio-tempo).
  - In altre parole le leggi della fisica debbono essere **invarianti per traslazioni** nello **spazio** o nel **tempo**.
  - Si tratta di un requisito fondamentale, in quanto sarebbero poco utili leggi che cambiano a seconda della posizione o nel tempo.
- Questo requisito impone alle funzioni  $f_0, f_1, f_2$  e  $f_3$  di essere **lineari** (ovvero di essere funzioni di primo grado).

## Omogeneità dello Spazio-Tempo (II)

- Mostriamo con un **esempio** che se le funzioni  $f_0, f_1, f_2$  e  $f_3$  **non** sono **lineari** lo **spazio non** sarebbe **omogeneo**.
- Supponiamo che la coordinata  $x$  si trasformi come:
 
$$x' = f_1(t, x, y, z) = a x^2$$
- Consideriamo ora la misura di un'asta di lunghezza unitaria (nel SdR  $S$ ) collocata lungo l'asse  $x$ .



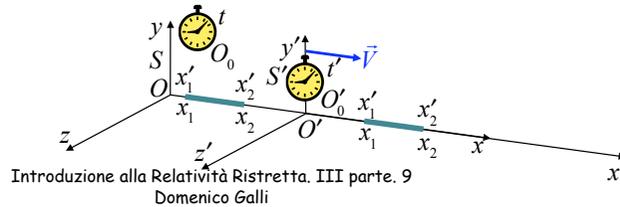
## Omogeneità dello Spazio-Tempo (III)

- Se l'asta è collocata con le estremità in  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 2$ , allora la sua lunghezza in  $S'$  vale:

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(4 - 1) = 3a$$

- Se invece l'asta è collocata con le estremità in  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 4$ , allora la sua lunghezza in  $S'$  vale:

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(16 - 9) = 7a$$



## Omogeneità dello Spazio-Tempo (IV)

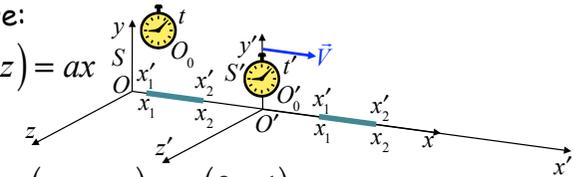
- Quindi, anche se la lunghezza dell'asta è sempre unitaria in  $S$ , la misura compiuta dall'osservatore di  $S'$  darebbe **risultati diversi** a seconda del **punto dello spazio** in cui l'asta è stata posta.
- Se invece la coordinata  $x$  si trasforma come la funzione lineare:

$$x' = f_1(t, x, y, z) = ax$$

si ha:

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2 - x_1) = a(2 - 1) = a$$

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2 - x_1) = a(4 - 3) = a$$

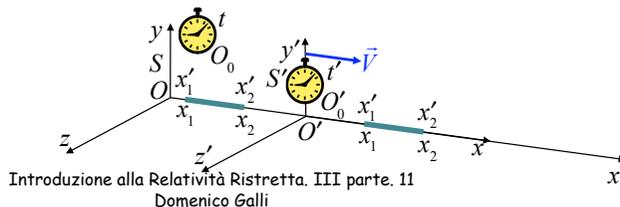


Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 10  
Domenico Galli

## Omogeneità dello Spazio-Tempo (V)

- La forma più generale di trasformazioni lineari è data dalle espressioni:

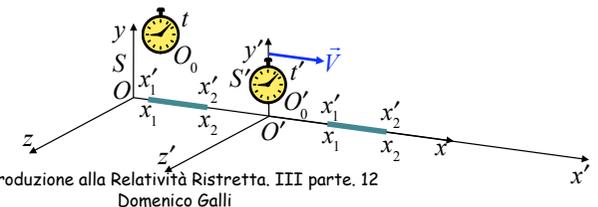
$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + b_0 \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$$



## Omogeneità dello Spazio-Tempo (VI)

- Se supponiamo che i due SdR coincidano e i loro orologi siano sincronizzati quando  $t = t' = 0$  allora i termini  $b_0, b_1, b_2$  e  $b_3$  si annullano e si ha:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$



## Disposizione degli Assi Cartesiani

- Se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i piani  $xy$  e  $x'y'$  coincidano, allora si ha che:

$$z = 0 \Leftrightarrow z' = 0$$

qualsiasi siano i valori di  $t, x$  e  $y$ . Da questo segue che:

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0$$

$$z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{33}z$$

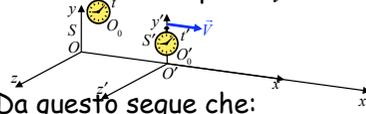
- Analogamente, se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i piani  $xz$  e  $x'z'$  coincidano, allora si ha che:

$$y = 0 \Leftrightarrow y' = 0$$

qualsiasi siano i valori di  $t, x$  e  $z$ . Da questo segue che:

$$a_{20} = a_{21} = a_{23} = 0$$

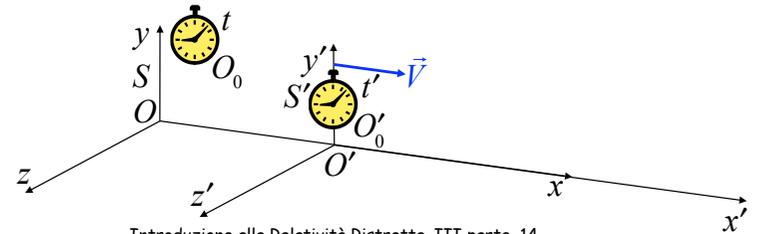
$$y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{22}y$$



## Disposizione degli Assi Cartesiani (II)

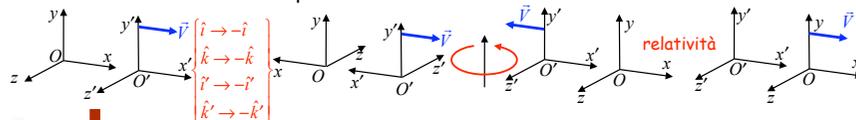
- Avremo quindi:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{22}y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{33}z \end{cases}$$



## Isotropia e Relatività

- Sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente  $a_{22}$ .
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi  $x, z, x'$  e  $z'$ .
  - L'equazione di trasformazione di  $y$  non cambia.
  - I ruoli di  $S$  e  $S'$  risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di  $180^\circ$  attorno all'asse  $y$  i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
  - Infine, sostituiamo la traslazione di  $S'$  rispetto a  $S$  con la traslazione di  $S$  rispetto a  $S'$  con verso opposto. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.



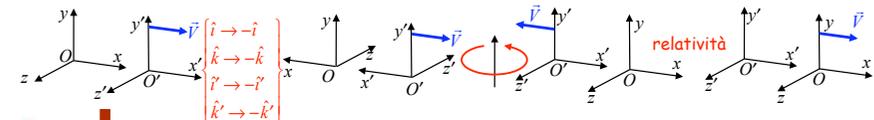
## Isotropia e Relatività (II)

- Invertendo contemporaneamente i 4 assi  $x, z, x'$  e  $z'$ :
  - L'equazione di trasformazione di  $y$  non cambia.
  - Otteniamo così una configurazione che differisce da quella di partenza soltanto per lo **scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici**.
- Insieme alla trasformazione:

$$y' = a_{22}y$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$y = a_{22}y'$$



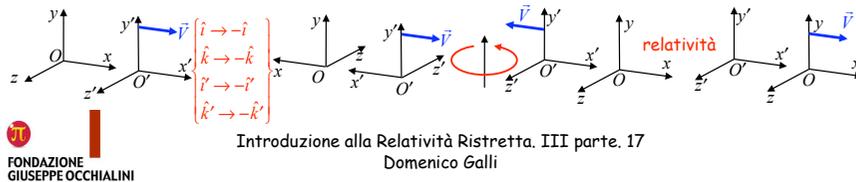
## Isotropia e Relatività (III)

- Si ha quindi:

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_{22}y \\ y &= a_{22}y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow y' = a_{22}y = a_{22}a_{22}y'$$

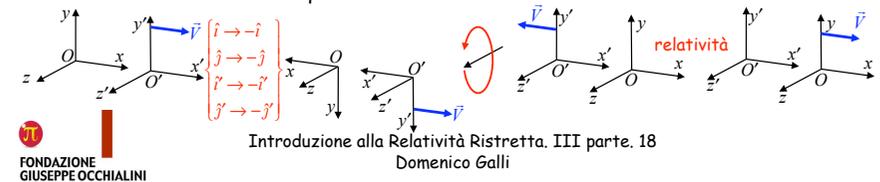
$$a_{22}a_{22} = 1$$

$$a_{22} = 1$$



## Isotropia e Relatività (IV)

- Analogamente, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente  $a_{33}$ .
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi  $x, y, x'$  e  $y'$ .
  - L'equazione di trasformazione di  $z$  non cambia.
  - I ruoli di  $S$  e  $S'$  risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di  $180^\circ$  attorno all'asse  $z$  i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
  - Infine, sostituiamo la traslazione di  $S'$  rispetto a  $S$  con la traslazione di  $S$  rispetto a  $S'$  con verso opposto. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.



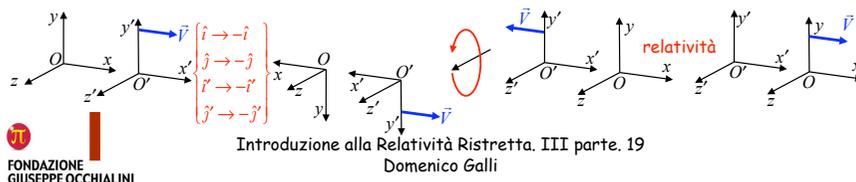
## Isotropia e Relatività (V)

- Invertendo contemporaneamente i 4 assi  $x, y, x'$  e  $y'$ :
  - L'equazione di trasformazione di  $z$  non cambia.
  - Otteniamo così una configurazione che differisce da quella di partenza soltanto per lo scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici.
- Insieme alla trasformazione:

$$z' = a_{33}z$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$z = a_{33}z'$$



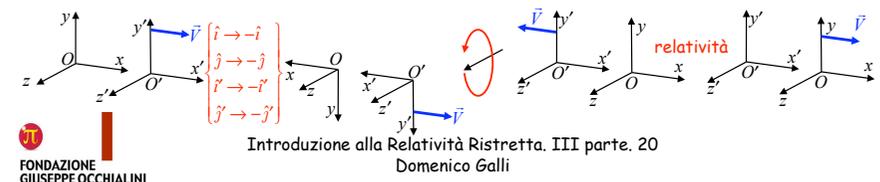
## Isotropia e Relatività (VI)

- Si ha quindi:

$$\left. \begin{aligned} z' &= a_{33}z \\ z &= a_{33}z' \end{aligned} \right\} \Rightarrow z' = a_{33}z = a_{33}a_{33}z'$$

$$a_{33}a_{33} = 1$$

$$a_{33} = 1$$



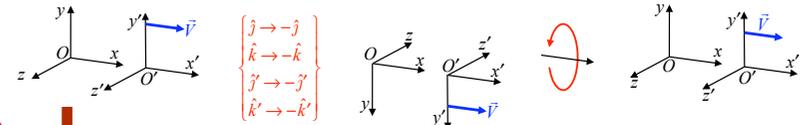
## Isotropia e Relatività (VII)

- Avremo quindi:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

## Isotropia e Relatività (VIII)

- In maniera simile, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio possiamo determinare i coefficienti  $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ .
- Invertiamo (cioè cambiamo verso) contemporaneamente i 4 assi  $y, z, y'$  e  $z'$ .
  - Le equazioni di trasformazione di  $x$  e  $t$  cambiano nel seguente modo:
 
$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$
  - I ruoli di  $S$  e  $S'$  risultano scambiati.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un altro punto di vista:
  - Ruotiamo poi di  $180^\circ$  attorno all'asse  $x$  i due SdR. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.



## Isotropia e Relatività (IX)

- Insieme alle trasformazioni:

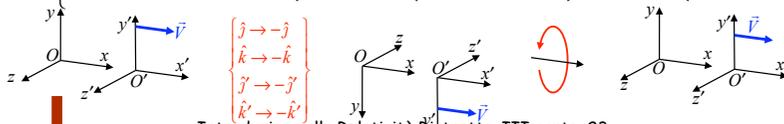
$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases}$$

devono perciò valere anche le trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$

- Sommandole membro a membro:

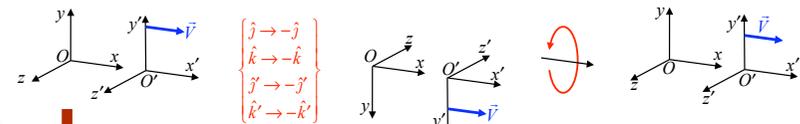
$$\begin{cases} t' + t' = a_{00}t + a_{01}x + \cancel{a_{02}y} + \cancel{a_{03}z} + a_{00}t + a_{01}x - \cancel{a_{02}y} - \cancel{a_{03}z} \\ x' + x' = a_{10}t + a_{11}x + \cancel{a_{12}y} + \cancel{a_{13}z} + a_{10}t + a_{11}x - \cancel{a_{12}y} - \cancel{a_{13}z} \end{cases}$$



## Isotropia e Relatività (X)

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$



## La Velocità Relativa dei Due SdR

- Osserviamo che un punto materiale che sia **in quiete nell'origine** del SdR  $S'$  ( $x' = 0$ ) nel SdR  $S$  deve avere velocità  $V$ :

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = Vt$$

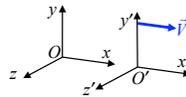
- Sostituendo nelle leggi di trasformazione, otteniamo:

$$x' = a_{10}t + a_{11}x$$

$$0 = a_{10}t + a_{11}Vt = (a_{10} + a_{11}V)t, \quad \forall t$$

$$a_{10} + a_{11}V = 0$$

$$a_{10} = -a_{11}V$$



## La Velocità Relativa dei Due SdR (II)

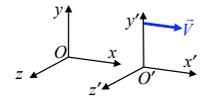
- Avremo quindi:

$$a_{10} = -a_{11}V$$

$$x' = a_{10}t + a_{11}x = -a_{11}Vt + a_{11}x = a_{11}(x - Vt)$$

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$



## Omogeneità, Isotropia e Relatività

- Le leggi di trasformazione:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

sono le **più generali** leggi compatibili con i postulati di **Omogeneità** e **Isotropia** dello spazio e con il Principio di **Relatività**.

- Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Galileo**.
- Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Lorentz**.

## Trasformazioni di Galileo

- Nelle trasformazioni di **Galileo** il **tempo è assoluto**, ovvero non cambia passando da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$t' = t, \quad \forall t$$

$$t' = a_{00}t + a_{01}x = t, \quad \forall t$$

$$\begin{cases} a_{00} = 1 \\ a_{01} = 0 \end{cases}$$

- Inoltre le **lunghezze non cambiano** nel passaggio da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$\Delta x' = \Delta x$$

$$\begin{cases} \Delta x' = x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2 - Vt) - a_{11}(x_1 - Vt) = a_{11}(x_2 - x_1) \\ \Delta x' = \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$a_{11} = 1$$

## Trasformazioni di Galileo (II)

- Sostituendo le condizioni:

$$a_{00} = 1, a_{01} = 0, a_{11} = 1$$

nelle trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

otteniamo le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = t \\ x' = f_1(t, x, y, z) = x - Vt \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

## Trasformazioni di Galileo (III)

- Nelle trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = t \\ x' = f_1(t, x, y, z) = x - Vt \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

- Lo **spazio** è **assoluto**:
  - La distanza tra due punti non dipende dal SdR:
- Il **tempo** è **assoluto**:
  - L'intervallo di tempo non dipende dal SdR.

## Invarianza della Velocità della Luce

- La relatività di Einstein sostituisce:
  - i vincoli di Galileo sullo spazio-tempo, evidentemente troppo radicali:
    - spazio assoluto e tempo assoluto.
  - con un altro tipo di vincolo sulle proprietà dello spazio-tempo:
    - l'**invarianza della velocità della luce**.
- Dovremo imporre questa condizione alle trasformazioni generiche:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

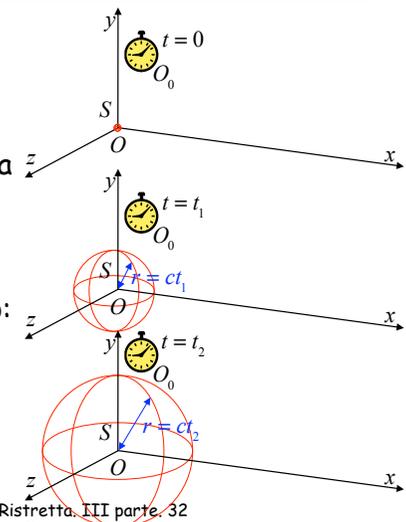
## Fronte d'Onda Sferico

- Consideriamo un'onda sferica di luce prodotta da una sorgente puntiforme.
- Consideriamo un fronte d'onda che all'istante  $t = 0$  ha raggio  $r = 0$ .
- Il fronte d'onda è una superficie sferica il cui raggio aumenta con il tempo:

$$r(t) = ct$$

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} = ct$$

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2t^2$$

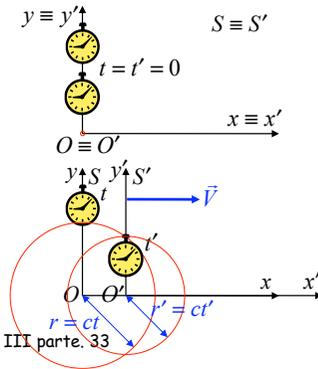


## Invarianza della Velocità della Luce

- Supponiamo ora che il fronte d'onda sferico abbia raggio  $r = 0$  nell'istante  $t = t' = 0$  in cui i due SdR  $S$  e  $S'$  sono sovrapposti.

- Per l'invarianza della velocità della luce:

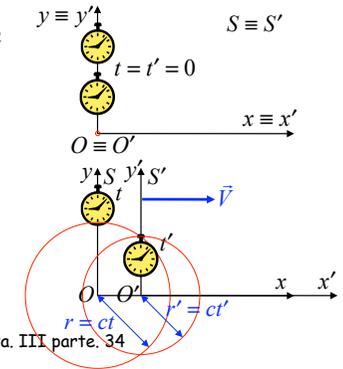
- Nel SdR  $S$  il fronte d'onda è una superficie sferica di **centro  $O$**  e **raggio crescente  $r = ct$** .
- Nel SdR  $S'$  il fronte d'onda è ancora una superficie sferica di **centro  $O'$**  e **raggio crescente  $r' = ct'$** .



## Invarianza della Velocità della Luce (II)

- Per l'invarianza della velocità della luce dovranno perciò valere, simultaneamente, le due relazioni:

$$\begin{cases} r^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2 t^2 \\ r'^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2 \end{cases}$$



## Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2 t^2 \\ r'^2(t') = x'^2(t') + y'^2(t') + z'^2(t') = c^2 t'^2 \end{cases}$$

- Sostituiamo nella seconda relazione le variabili con gli apici ottenute dalle trasformazioni generiche:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{11}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ a_{11}^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{00}t + a_{01}x)^2 \end{cases}$$

## Trasformazioni di Lorentz (II)

- Sviluppamo e raccogliamo le variabili:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ a_{11}^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{00}t + a_{01}x)^2 \\ a_{11}^2 x^2 + a_{11}^2 V^2 t^2 - 2a_{11}^2 Vtx + y^2 + z^2 = c^2 a_{00}^2 t^2 + c^2 a_{01}^2 x^2 + 2c^2 a_{00} a_{01} tx \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ (a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01})tx = (c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2)t^2 \end{cases}$$

## Trasformazioni di Lorentz (III)

- Confrontando termine a termine le due relazioni (debbono essere equivalenti  $\forall (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ ):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ (a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01})tx = (c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2)t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2 = 1 \\ Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01} = 0 \\ c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2 = c^2 \end{cases}$$

- Da questo sistema possiamo ricavare le 3 incognite  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  e  $a_{11}$ .

## Trasformazioni di Lorentz (IV)

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2 = 1 \\ Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01} = 0 \\ c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2 = c^2 \end{cases}$$

- Ricaviamo  $a_{01}$  dalla seconda e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 \left( -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \right)^2 = 1 \Rightarrow a_{11}^2 - \frac{V^2 a_{11}^4}{c^2 a_{00}^2} = 1 \Rightarrow c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 = V^2 a_{11}^2 + c^2 \end{cases}$$

## Trasformazioni di Lorentz (V)

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 = V^2 a_{11}^2 + c^2 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo ambo i membri della III per  $a_{11}^2$  e sottraendola dalla I:

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{11}^2 \Rightarrow a_{00}^2 - a_{11}^2 = 0 \Rightarrow a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

## Trasformazioni di Lorentz (VI)

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

- Sostituendo  $a_{00}$  ricavato dalla III nella I:

$$\begin{cases} c^2 a_{11}^4 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{11}^2 \Rightarrow (c^2 - V^2)a_{11}^4 - c^2 a_{11}^2 = 0 \Rightarrow (c^2 - V^2)a_{11}^2 - c^2 = 0 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

## Trasformazioni di Lorentz (VII)

- Infine sostituendo:

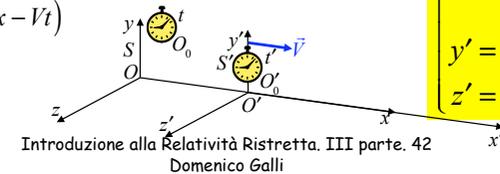
$$\left\{ \begin{aligned} (c^2 - V^2)a_{11}^2 = c^2 &\Rightarrow a_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Rightarrow a_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} = \mp \frac{Va_{11}}{c^2} &= \mp \frac{V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{aligned} \right.$$

- Dove scegliamo i segni superiori per avere gli assi  $x$  e  $x'$  e gli assi  $t$  e  $t'$  concordi.

## Trasformazioni di Lorentz (VIII)

- Sostituendo ora i parametri ottenuti nelle trasformazioni generiche si ottiene infine:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{00} = a_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} &= -\frac{V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ t' &= a_{00}t + a_{01}x \\ x' &= a_{11}(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right.$$



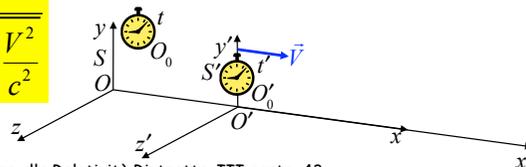
## Trasformazioni di Lorentz (IX)

- Per semplificare le formule spesso si indica con  $\beta$  il cosiddetto **parametro di velocità**, ovvero la velocità misurata in un sistema naturale di unità di misura in cui  $c = 1$ :

$$\beta = \frac{V}{c}$$

- e con  $\gamma$  il cosiddetto **fattore di Lorentz**:

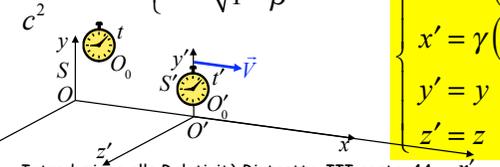
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



## Trasformazioni di Lorentz (X)

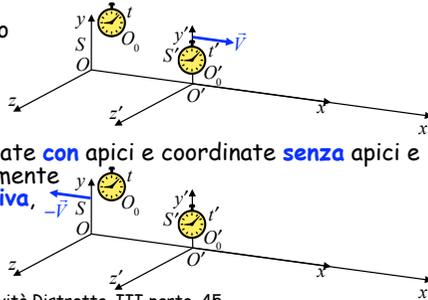
- Utilizzando questi simboli si può scrivere:

$$\left\{ \begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{V}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{V}{c^2}x \right) \\ x' &= \gamma (x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right.$$



## Trasformazioni Inverse

- Si possono ottenere **invertendo** le precedenti trasformazioni:
  - Oververo ricavando le 4 variabili senza apici  $t, x, y$  e  $z$  in funzione delle 4 variabili con apici  $t', x', y'$  e  $z'$  dalle precedenti relazioni.
  - Si tratta in questo caso di risolvere un sistema di 4 equazioni in 4 incognite di I grado.
- Si possono anche ottenere, più semplicemente, applicando il **principio di relatività**:
  - reciprocità** del moto relativo dei due SdR:
    - Se  $S$  si muove rispetto a  $S'$  con velocità  $V$  allora  $S'$  si muove rispetto a  $S$  con velocità  $-V$ .
  - scambiando** tra loro coordinate **con** apici e coordinate **senza** apici e **invertendo** contemporaneamente il **verso della velocità relativa**,  $-\vec{v}$  si devono ottenere relazioni altrettanto valide.



Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 45  
Domenico Galli

## Trasformazioni Inverse (II)

- Si ha quindi:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct = \gamma (ct' + \beta x') \\ x = \gamma (x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 46  
Domenico Galli

## Il Principio di Corrispondenza

- Einstein comprese che le **regole** con cui le leggi della natura si **trasformano** nel passaggio da un SdR all'altro hanno origine unicamente nelle **proprietà dello spazio-tempo**:
  - Devono quindi essere uguali per **tutti** i fenomeni:
    - Meccanici** ed **elettromagnetici**.
- D'altro canto le **trasformazioni di Galileo** avevano ottenuto un **ottimo accordo sperimentale** con la **meccanica** dei corpi macroscopici con velocità molto inferiori alla velocità della luce (**dominio di applicabilità** delle trasformazioni di Galileo).
- Affinché le trasformazioni di Lorentz mantengano l'**accordo sperimentale** delle trasformazioni di Galileo nel loro dominio di applicabilità è necessario che esse **si riducano alle trasformazioni di Galileo nel limite  $V \ll c$** .

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 47  
Domenico Galli

## Il Principio di Corrispondenza (II)

- È chiaro che nel limite  $V \ll c$  si ha:

$$\beta = \frac{V}{c} \xrightarrow{V \ll c} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{c^2} \xrightarrow{V \ll c} 0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{V \ll c} 1$$

e dunque, come atteso:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{V \ll c} \begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

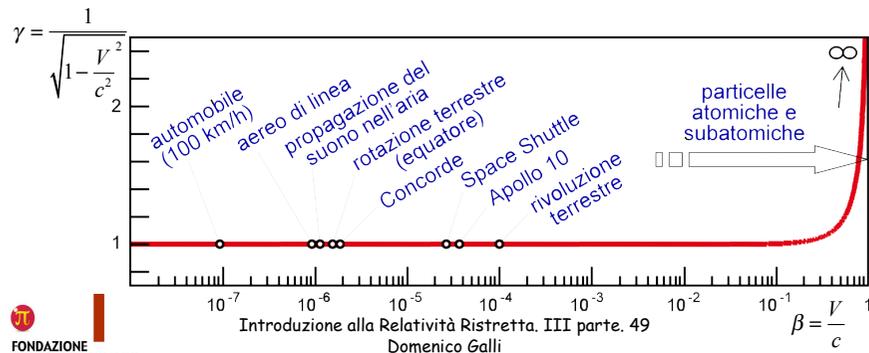
**Lorentz**

**Galileo**

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 48  
Domenico Galli

## Il Principio di Corrispondenza (III)

- **Deviazione** delle previsioni della relatività di **Einstein** da quella di **Galileo** all'aumentare della velocità del moto:
  - Dipendenza del **fattore di Lorentz  $\gamma$**  dal **parametro di velocità  $\beta$** .



## La Velocità Limite

- Nelle trasformazioni di Lorentz il **fattore di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

**diverge** per  $V \rightarrow c$  e **non è reale** per  $V > c$ :

$$\lim_{V \rightarrow c} \gamma = \infty$$

$$V > c \Rightarrow \gamma \notin \mathbb{R}$$

- Questo pone un limite superiore per il modulo della velocità di traslazione reciproca dei SdR.

$$V < c$$

## Trasformazioni delle Velocità

- Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

si ottiene:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - Vt)}{\gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{x - Vt}{t - \frac{V}{c^2} x} = \frac{\frac{x}{t} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{y}{t} \frac{1}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_z = \frac{z'}{t'} = \frac{z}{\gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{z}{t} \frac{1}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

## Trasformazioni delle Velocità (II)

- Otteniamo quindi le leggi di trasformazione delle velocità:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \\ v_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \end{cases}$$

## Trasformazioni delle Velocità (II)

- Nell'esempio in figura le due auto si muovono con velocità  $0.5c$  e  $0.7c$  nel SdR della strada.

- La velocità di un'auto rispetto all'altra, con le trasformazioni di Galileo, sarebbe:

$$v'_G = v - V = \pm 0.7c - 0.5c = \begin{cases} 0.2c \\ -1.2c < -c \end{cases}$$

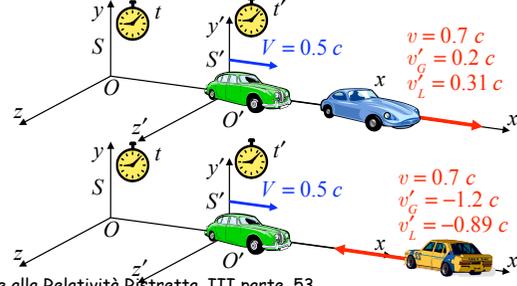
- Utilizzando invece le trasformazioni di Lorentz, si ha:

$$v'_L = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2}v}$$

$$= \frac{\pm 0.7c - 0.5c}{1 - \frac{0.5c}{c^2}(\pm 0.7c)}$$

$$= \begin{cases} 0.31c \\ -0.89c \end{cases}$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 53  
Domenico Galli



## Trasformazioni delle Velocità (III)

- Nell'esempio in figura l'auto si muove con velocità  $\beta c$  nel SdR della strada.

- La velocità dell'onda rispetto all'auto, con le trasformazioni di Galileo, sarebbe:

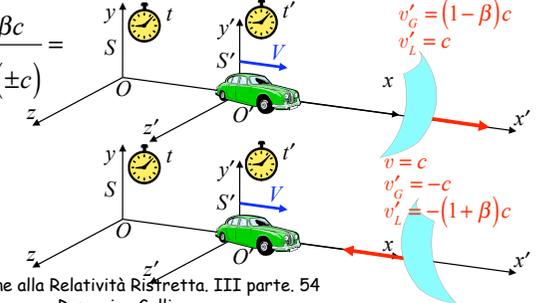
$$v'_G = v - V = \pm c - \beta c = \begin{cases} (1 - \beta)c \\ -(1 + \beta)c < -c \end{cases}$$

- Utilizzando invece le trasformazioni di Lorentz, si ha:

$$v'_L = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2}v} = \frac{\pm c - \beta c}{1 - \frac{\beta c}{c^2}(\pm c)}$$

$$= \frac{(\pm 1 - \beta)c}{1 \mp \beta} = \begin{cases} c \\ -c \end{cases}$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 54  
Domenico Galli



## Trasformazioni delle Velocità (IV)

- La velocità del fronte d'onda vale dunque sempre  $c$  nella meccanica relativistica,

- qualsiasi sia  $\beta$ ,
- cioè in qualsiasi sistema di riferimento in moto rispetto a  $S$ .

- La velocità della luce nel vuoto rappresenta quindi un limite:

- non può essere oltrepassato nemmeno componendo tra di loro velocità prossime o uguali a quelle della luce.

Introduzione alla Relatività Ristretta. III parte. 55  
Domenico Galli