FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Introduzione al calcolo vettoriale

Vincenzo Vagnoni
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e
Fondazione Giuseppe Occhialini

Fossombrone, 20 Marzo 2009

Grandezze fisiche

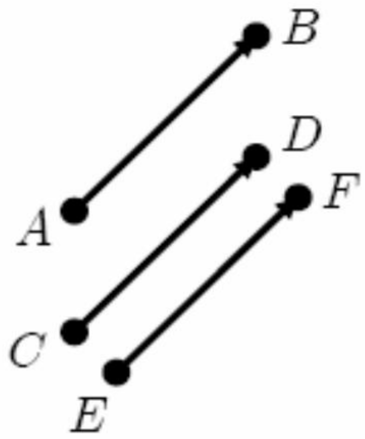
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Grandezze scalari**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* e una *unità di misura*.
  - Esempi: lunghezza, tempo, superficie, volume, massa, temperatura, carica elettrica, ecc.
- **Grandezze vettoriali**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* (detto modulo o norma), una *direzione*, un *verso* e una *unità di misura*.
  - Esempi: spostamento rettilineo di un punto, velocità, accelerazione, forza, momento di una forza, momento di dipolo elettrico, ecc.
- **Grandezze tensoriali**: la loro specificazione è ancora più complicata
  - Esempi: rotazione, tensore di inerzia, ecc.

Cos'è un vettore

FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Prototipo**: spostamento rettilineo di un punto.
  - Spostamento di un punto da A a B $\xleftrightarrow[\text{su}]{1-1}$ segmento orientato che congiunge A con B.
  - Esistono infiniti segmenti orientati che rappresentano spostamenti rettilinei di egual lunghezza, paralleli ed equiversi.
    - Chiamiamo **vettore** $\vec{v}$ il **"quid" comune** a tali segmenti orientati (Vailati-Enriquez).
    - Oppure, definiti equipollenti due segmenti orientati di egual lunghezza, paralleli ed equiversi, definiamo **vettore** $\vec{v}$ la **classe di equivalenza** dei segmenti orientati rispetto alla relazione di equipollenza (Frege-Russel).



$$\vec{v} = B - A = D - C = F - E$$

Notazioni equivalenti:

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \underline{v} = \overline{v}$$

Caratteristiche di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Modulo** (o **norma**): distanza tra origine A e vertice B. Si indica con $\left\|\vec{v}\right\| = \left|\vec{v}\right| = v$
- **Direzione**: orientamento nello spazio della retta su cui giace il segmento orientato AB.
- **Verso**: senso di percorrenza.

- Medesima direzione, medesimo verso, moduli diversi.

- Medesimo modulo direzione diversa.

- Medesimo modulo, medesima direzione, verso opposto.

Uguaglianza tra vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

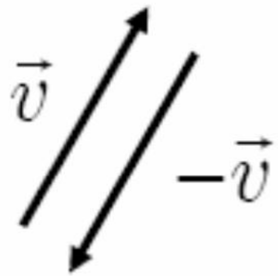
- Due vettori si dicono **uguali** se, e soltanto se, hanno:
  - il **medesimo modulo**,
  - la **medesima direzione**,
  - il **medesimo verso**.

- Se due vettori non sono uguali si dicono **disuguali**, ma **non** è possibile definire una **relazione d'ordine** in quanto non si può trovare un criterio per affermare che un vettore è maggiore o minore di un altro.

Vettore opposto e vettore nullo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$, si definisce **vettore opposto** $-\vec{v}$ un vettore avente stessa direzione, stesso modulo ma verso opposto.



- Si chiama **vettore nullo** $\vec{0}$ un vettore che ha modulo nullo (in questo caso direzione e verso sono indeterminati).

Cos’è un versore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

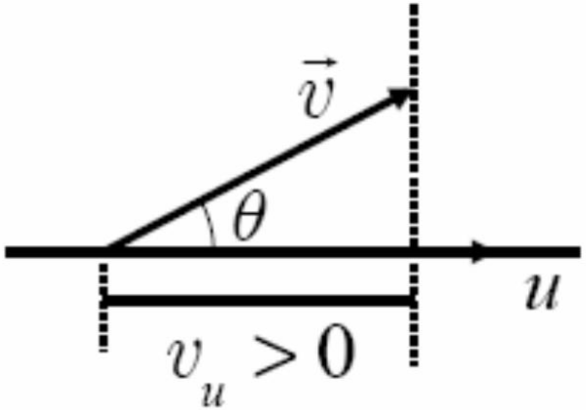
- Si chiamano **versori** i vettori di modulo unitario.

- Per ogni vettore $\vec{v}$ **non nullo** esiste un versore che ha la stessa direzione orientata:

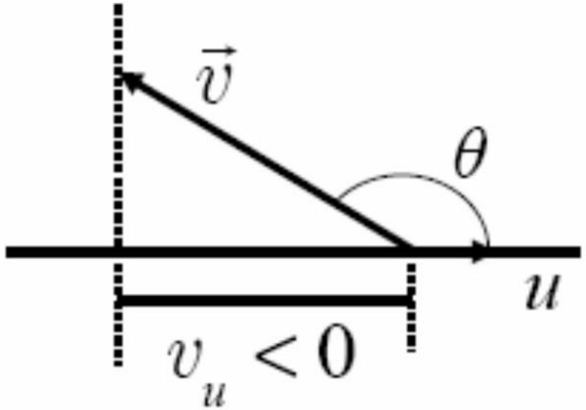
$$\hat{v} = \operatorname{vers}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

Proiezione di un vettore lungo una direzione

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce la componente di $\vec{v}$ su u e si indica con v_u il prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il coseno dell'angolo θ che il vettore forma con la direzione orientata u.

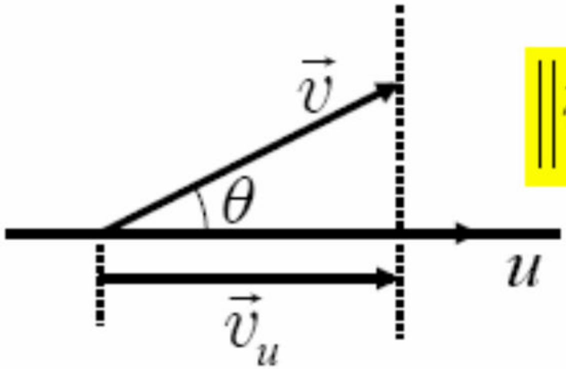


$$v_u = \left\|\vec{v}\right\| \cos\theta$$

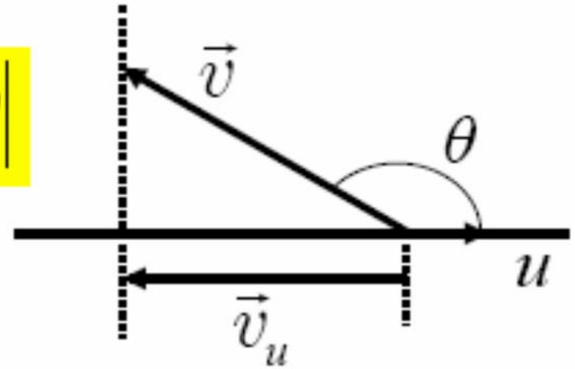


Proiezione di un vettore lungo una direzione

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce <u>il</u> componente di $\vec{v}$ su u e si indica con $\vec{v}_u$ il vettore che ha per modulo il valore assoluto del<u>la</u> corrispondente componente v_u e per verso: lo stesso verso di u se $v_u > 0$; il verso contrario se $v_u < 0$.



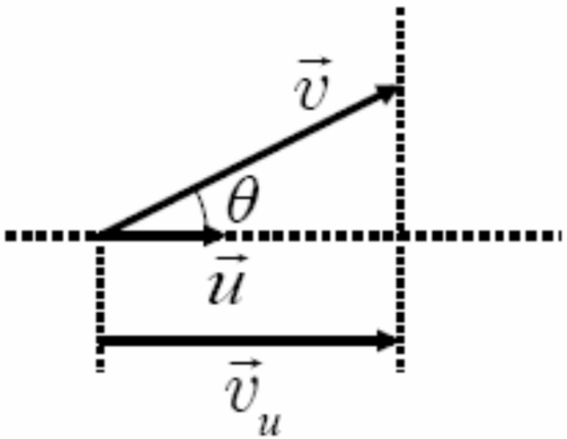
$$\left\|\vec{v}_u\right\| = \left|v_u\right| = \left\|\vec{v}\right\| \left|\cos\theta\right|$$



Proiezione di un vettore lungo un altro vettore

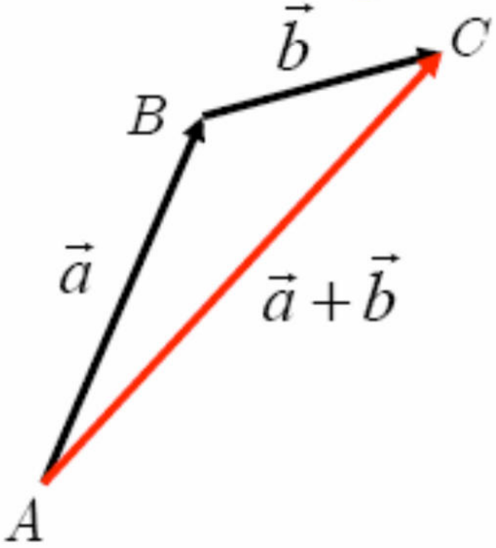
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si definisce il componente o la componente di un vettore $\vec{v}$ su un altro vettore $\vec{u}$ (o su un versore $\hat{u}$) come il componente o la componente di $\vec{v}$ rispetto alla direzione orientata di $\vec{u}$ o $\hat{u}$.



Somma di vettori

- Prototipo: spostamento rettilineo di un punto.
- Se considero due spostamenti successivi dello stesso punto: prima da A a B, poi da B a C.
- Il risultato (**somma** dei due vettori) è lo spostamento da A a C (**regola del triangolo**):



$$C - A = \left(C - B\right) + \left(B - A\right)$$

Ovvero, indicando:

$\vec{a} = B - A,\ \vec{b} = C - B$

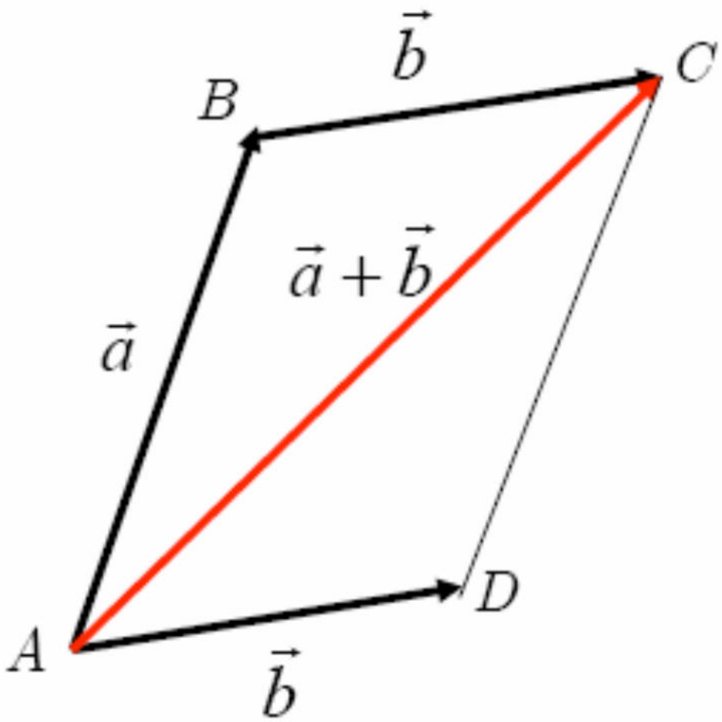
Sarà:

$$\vec{a} + \vec{b} = C - A$$

Regola del parallelogramma

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

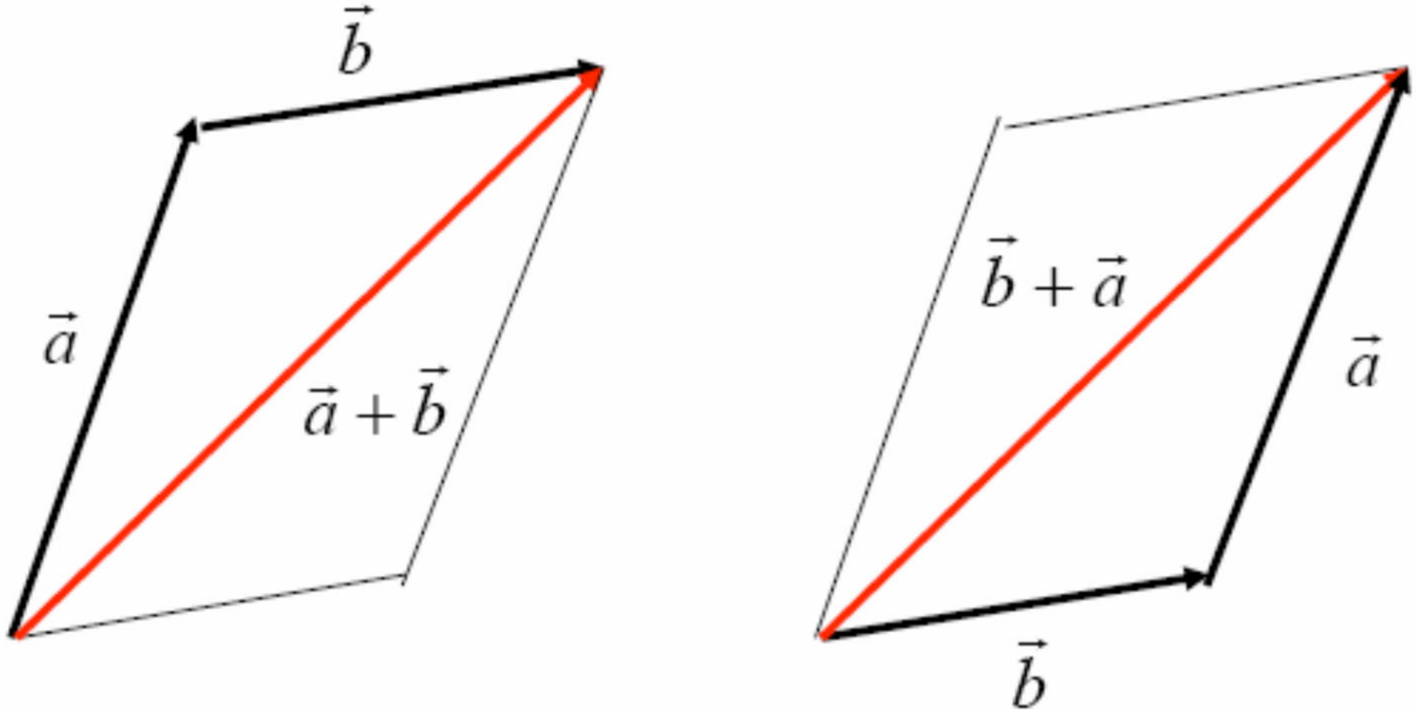
- La somma $\vec{a} + \vec{b} = C - A$ è la **diagonale** del parallelogrammo $ABCD$ avente per lati i segmenti orientati $B - A$ e $D - A$.



Commutatività della somma di vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

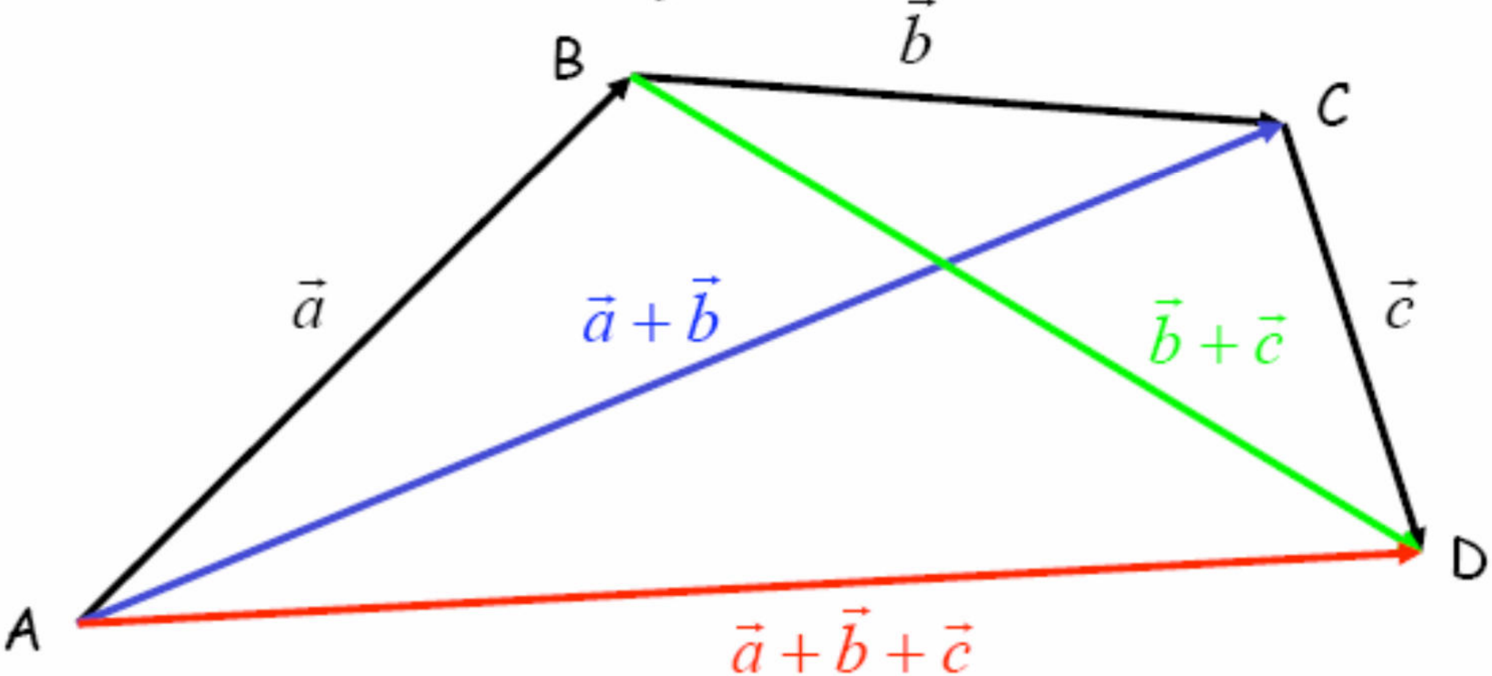
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$



Associatività della somma di vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\left.\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} &= D-A\\ \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) &= D-A\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

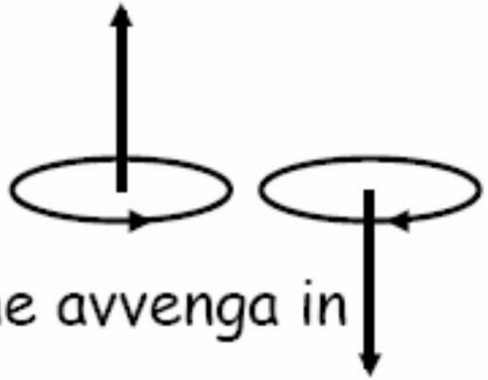


http://www.fondazioneocchialini.it

Rotazioni

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

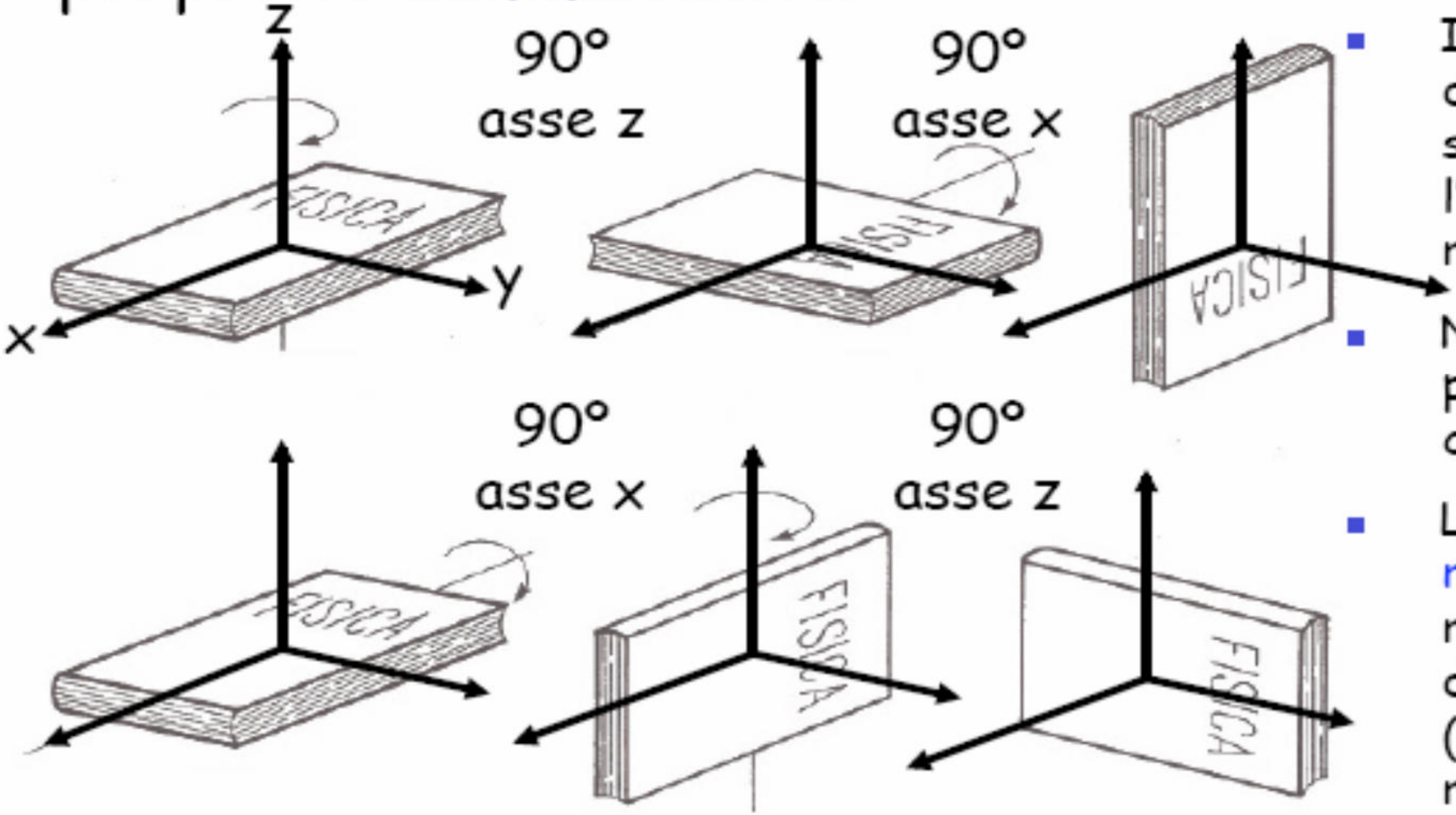
- Una **traslazione** è rappresentata da un vettore.
- Una **rotazione** è essa pure rappresentata da un vettore? (vedremo che la risposta è **NO**).
- Tuttavia, a prima vista potremmo pensare di rappresentare una rotazione mediante:
  - Una direzione (asse di rotazione);
  - Un numero (angolo di rotazione);
  - Un verso (a seconda che la rotazione avvenga in senso orario o antiorario).



Rotazioni

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Verifichiamo se le rotazioni godono della proprietà **commutativa**:

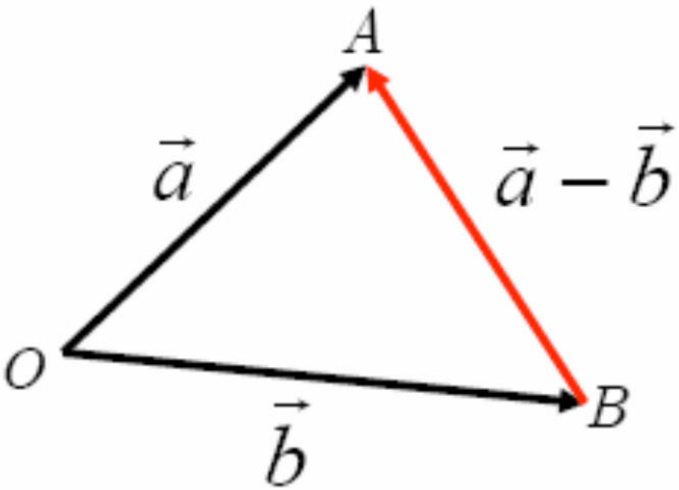


- Il risultato è diverso se si scambia l'ordine delle rotazioni.
- Non vale la proprietà commutativa
- Le rotazioni non sono rappresentate da vettori (sono rappresentate da tensori).

Differenza tra vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- È l'operazione inversa della somma
- Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si chiama **differenza** fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con $\vec{a}-\vec{b}$ quel vettore che sommato a $\vec{b}$ dà come risultato $\vec{a}$.



$$\vec{a} = A - O$$

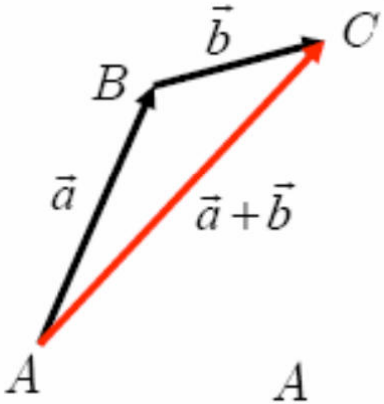
$$\vec{b} = B - O$$

$$\vec{a} - \vec{b} = A - B$$

Disuguaglianza triangolare

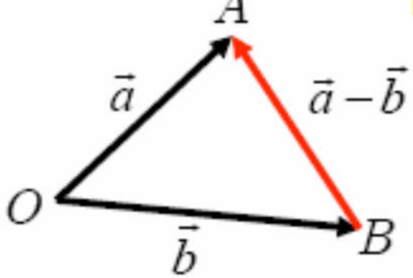
- Il modulo della somma (o della differenza) di due vettori è in generale **diverso** dalla somma (o dalla differenza) dei moduli.

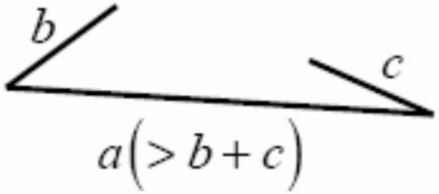
- Per la **disuguaglianza triangolare** si ha:

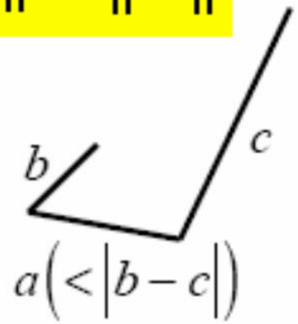


$$\left|\left\|\vec{a}\right\|-\left\|\vec{b}\right\|\right| \le \left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \le \left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$$

$$\left|\left\|\vec{a}\right\|-\left\|\vec{b}\right\|\right| \le \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| \le \left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$$





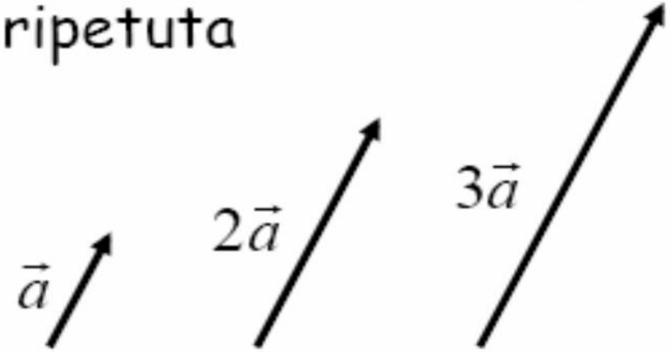


http://www.fondazioneocchialini.it

Prodotto di un vettore per uno scalare

- Si può definire il **prodotto** di un numero **naturale** n per un **vettore** $\vec{a}$ come una somma ripetuta

$$\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n\ \text{volte}}=n\vec{a}$$



- Generalizzando, si definisce **prodotto** di un **numero reale** θ e un **vettore** $\vec{a}$ e si indica con il simbolo $\alpha\vec{a}$ il vettore che ha per modulo il prodotto $|\alpha|\|\vec{a}\|$, per direzione la stessa direzione di $\vec{a}$, e, per verso, lo stesso verso di $\vec{a}$ se $\theta > 0$, il verso contrario se $\theta < 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{a}\in V\end{array}\right\}\alpha\vec{a}\in V$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

- Il prodotto di un vettore per uno scalare è commutativo, associativo, distributivo, sia rispetto alla somma di scalari, sia rispetto alla somma di vettori.

$$\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$$

$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$$

$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

$$\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$$

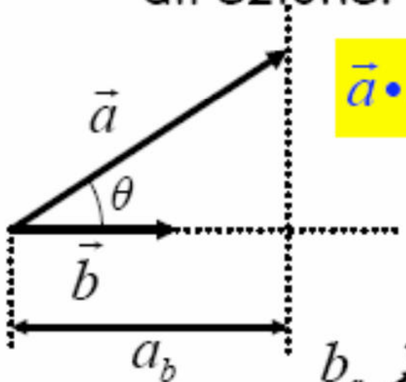
$$\vec{a}\frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|} = \hat{a} = \operatorname{vers}\vec{a}$$

$$\begin{cases} \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ \vec{a},\vec{b} \in V \end{cases}$$

Prodotto scalare tra due vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

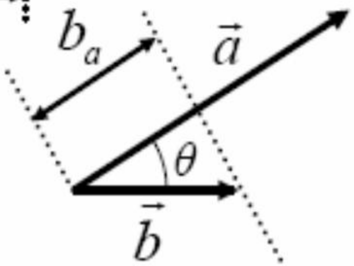
- Associa a due vettori uno scalare (p. es., associa a forza e spostamento il lavoro).
- Si definisce **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} \bullet \vec{b}$ il prodotto del modulo di uno dei due vettori per **la** componente dell'altro sulla sua direzione.



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_b\, b = a\, b_a$$

$$\begin{cases} a_b = a\cos\theta \\ b_a = b\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_b\, b = \left(a\cos\theta\right) b \\ a\, b_a = a\left(b\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\theta = a\, b\cos\theta$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left\|\vec{a}\right\| = 0 \quad oppure \\ \left\|\vec{b}\right\| = 0 \quad oppure \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$$

Proprietà del prodotto scalare

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto scalare gode delle proprietà **commutativa** e **distributiva** rispetto alla somma di vettori.

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$$

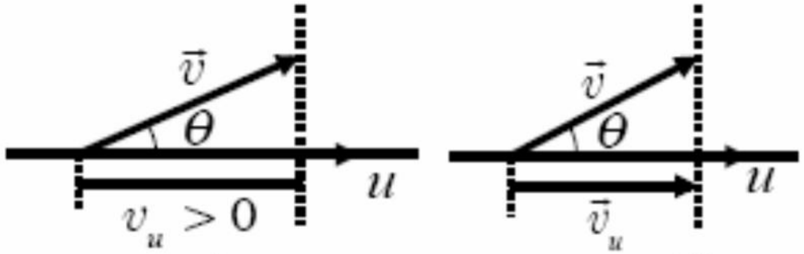
$$\left(m\vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(m\vec{b}\right) = m\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

Componente di un vettore della direzione di un versore o di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del versore $\hat{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \vec{v} \bullet \hat{u} \qquad \vec{v}_u = \left(\vec{v} \bullet \hat{u}\right)\hat{u}$$



- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del vettore generico $\vec{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad \vec{v}_u = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{\left(\vec{v} \bullet \vec{u}\right)\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$$

Quadrato di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si chiama **quadrato di un vettore** il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

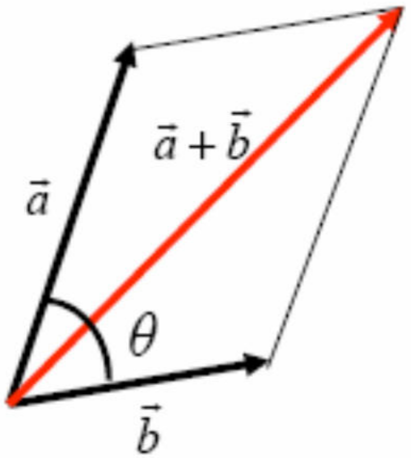
$$\vec{a}^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\cos 0 = \|\vec{a}\|^2$$

- Il **modulo** (o **norma**) di un vettore si può perciò scrivere:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

Modulo della somma o differenza tra vettori

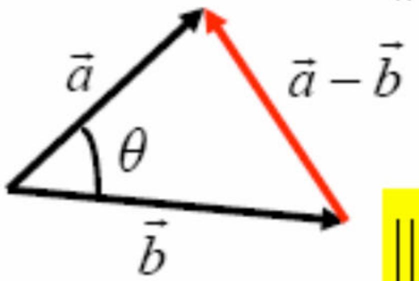
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}}$$

$$\boxed{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}$$



$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)} =$$

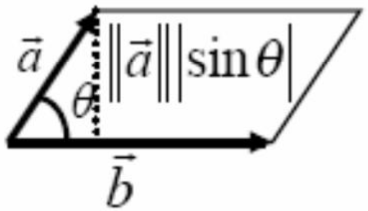
$$= \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}-\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}}$$

$$\boxed{\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}$$

Prodotto vettoriale

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si definisce **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il vettore che ha per modulo l'area del parallelogrammo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di direzione perpendicolare a entrambi i vettori e verso determinato dalla "**regola della mano destra**" (pollice: primo vettore; indice: secondo vettore; medio: prodotto vettoriale).



$$\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| \left(\|\vec{a}\| |\sin\theta| \right)$$

$$\boxed{\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| |\sin\theta|}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{a}\| = 0 \quad oppure \\ \left\|\vec{b}\right\| = 0 \quad oppure \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \end{cases}$$

Proprietà del prodotto vettoriale

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto vettoriale gode delle proprietà **anticommutativa** e **distributiva** rispetto alla somma e alla differenza di vettori.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

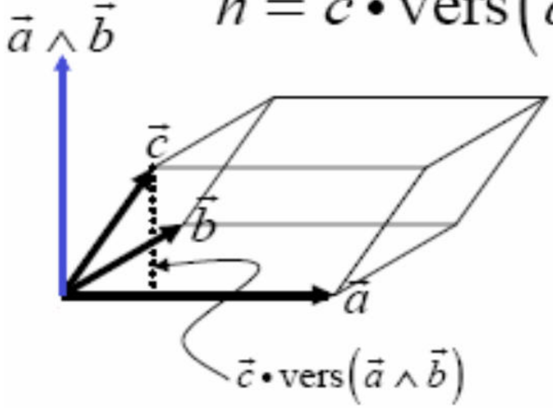
$$\left(m\vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(m\vec{b}\right) = m\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

$$\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} \pm \vec{b} \wedge \vec{c}$$

Doppio prodotto misto

- È dato da: $\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c}$
- È uguale, a meno del segno, al **volume del parallelepipedo** avente per lati $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
- Tale parallelepipedo ha per base e altezza:

$$\left.\begin{array}{l} B = \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \\ h = \vec{c} \bullet \operatorname{vers}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow V = \underbrace{\left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \operatorname{vers}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)}_{\vec{a} \wedge \vec{b}} \bullet \vec{c}$$



$$V = \left| \vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} \right|$$

Doppio prodotto misto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il doppio prodotto misto ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \bullet \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c}$$

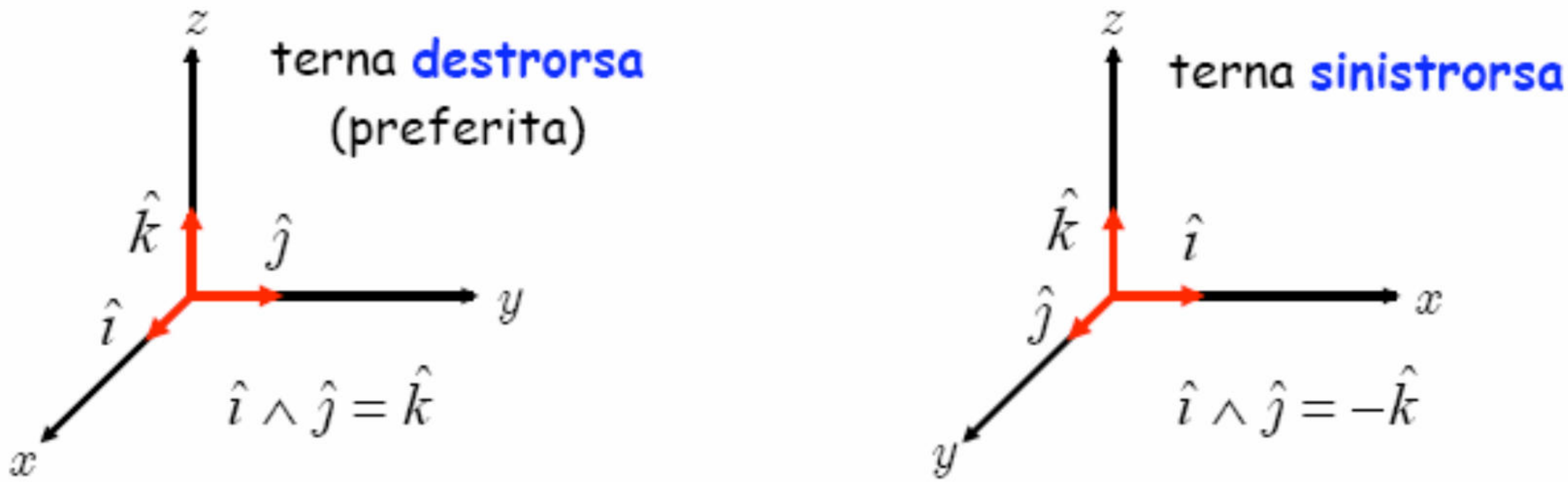
- La prima segue dal fatto che nei 3 casi il volume è il medesimo.
- La seconda si ottiene utilizzando la prima e la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \bullet \vec{a} = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$$

Rappresentazione cartesiana di un vettore

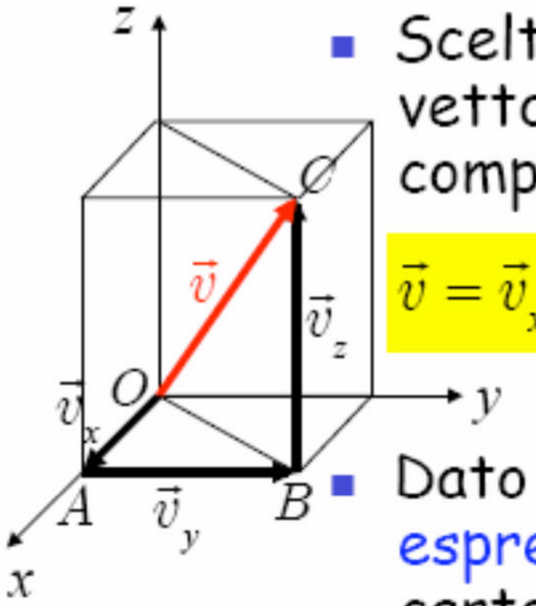
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Terna cartesiana ortogonale**: 3 rette orientate (o assi) x, y e z, a due a due perpendicolari, aventi un punto in comune O detto **origine**.
- **Versori cartesiani**: versori corrispondenti agli assi x, y e z, indicati con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.
- **(Le) componenti cartesiane** e **(i) componenti cartesiani**: le componenti e i componenti di un vettore sugli assi cartesiani.



Rappresentazione cartesiana di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



- Scelta una terna cartesiana ortogonale, qualunque vettore $\vec{v}$ è uguale alla somma dei suoi 3 componenti cartesiani.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = v_x\hat{i} \\ \vec{v}_y = v_y\hat{j} \\ \vec{v}_z = v_z\hat{k} \end{cases}$$

- Dato un vettore, esso ha una differente espressione cartesiana per ogni differente terna cartesiana che si considera.

- Tuttavia, **fissata** una terna cartesiana ortogonale, vi è una corrispondenza biunivoca tra vettori e terne ordinate di numeri reali (le componenti cartesiane).

$$\vec{v} \xleftrightarrow[su]{1-1} (v_x, v_y, v_z)$$

Rappresentazione cartesiana di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

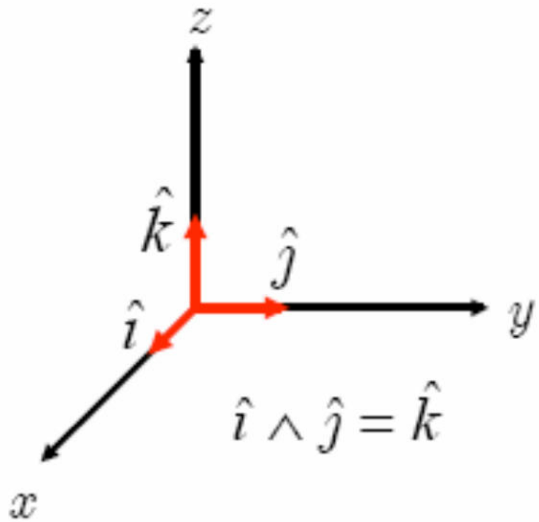
- Fissata una terna cartesiana ortogonale:
  - Due vettori sono **uguali** se e soltanto se sono uguali le 3 corrispondenti componenti cartesiane.
  - Un vettore è **nullo** se e soltanto se sono nulle tutte e 3 le componenti cartesiane.
- Le operazioni tra vettori possono essere eseguite, oltre che nella **forma intrinseca** che abbiamo visto finora, anche nella **forma cartesiana**, utilizzando cioè le espressioni cartesiane dei vettori.

Terna di versori ortogonali

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Prodotti scalari

$$\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}=1,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}=1,\quad \hat{k}\bullet\hat{k}=1$$
$$\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}=0,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{k}=0,\quad \hat{k}\bullet\hat{\imath}=0$$



- Prodotti vettoriali

$$\hat{\imath}\wedge\hat{\imath}=\vec{0},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath}=\vec{0},\quad \hat{k}\wedge\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\wedge\hat{\imath}=\hat{\jmath}$$

Operazioni tra i versori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)+\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x+b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y+b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z+b_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)-\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x-b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y-b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z-b_z\right)\hat{k}$$

$$\alpha\vec{a}=\alpha\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)=\left(\alpha a_x\right)\hat{\imath}+\left(\alpha a_y\right)\hat{\jmath}+\left(\alpha a_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\bullet\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}}_{1}+a_xb_y\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_xb_z\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{k}}_{0}+a_yb_x\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_yb_y\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}}_{1}+a_yb_z\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{k}}_{0}+$$

$$+a_zb_x\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_zb_y\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_zb_z\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{k}}_{1}=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$a=\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Operazioni tra i vettori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}\right) \wedge \left(b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{k}\right) =$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{\imath} \wedge \hat{\imath}}_{0} + a_x b_y \underbrace{\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}}_{\hat{k}} + a_x b_z \underbrace{\hat{\imath} \wedge \hat{k}}_{-\hat{\jmath}} + a_y b_x \underbrace{\hat{\jmath} \wedge \hat{\imath}}_{-\hat{k}} + a_y b_y \underbrace{\hat{\jmath} \wedge \hat{\jmath}}_{0} + a_y b_z \underbrace{\hat{\jmath} \wedge \hat{k}}_{\hat{\imath}} +$$

$$+ a_z b_x \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} + a_z b_y \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{\jmath}}_{-\hat{\imath}} + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{k}}_{0} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k} = \det \begin{Vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{Vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} = \left[\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}\right] \bullet \left(c_x \hat{\imath} + c_y \hat{\jmath} + c_z \hat{k}\right) =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)c_y + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z = \det \begin{Vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{Vmatrix}$$

Operazioni tra i vettori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può anche mostrare che:

$$\begin{cases} \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right)\vec{a} \\ \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c} \end{cases}$$

- Infatti, prendendo, ad esempio la I componente:

$$\left[\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}\right]_x = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_y c_z - \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_z c_y =$$

$$= \left(a_z b_x - a_x b_z\right) c_z - \left(a_x b_y - a_y b_x\right) c_y$$

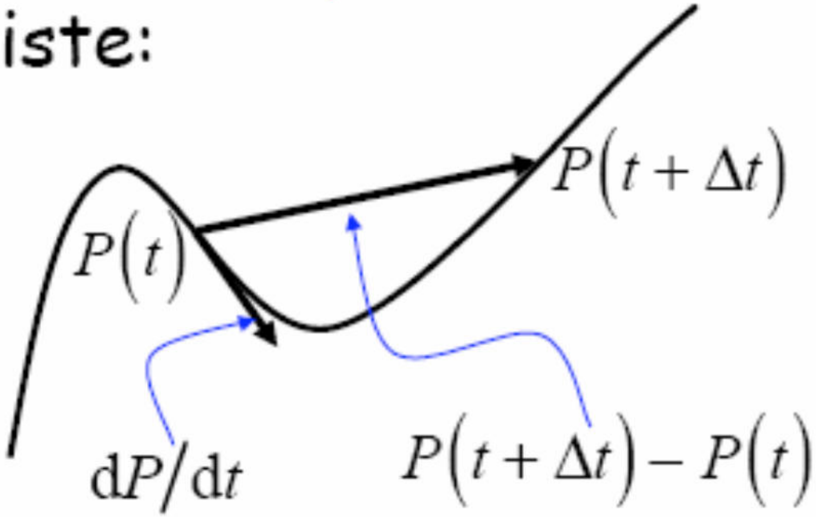
$$\left[\left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right)\vec{a}\right]_x = \left(\cancel{a_x c_x} + a_y c_y + a_z c_z\right) b_x - \left(\cancel{b_x c_x} + b_y c_y + b_z c_z\right) a_x$$

Derivata di un punto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un punto mobile $P = P(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce derivata del punto P rispetto alla variabile t il limite, se esiste:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$



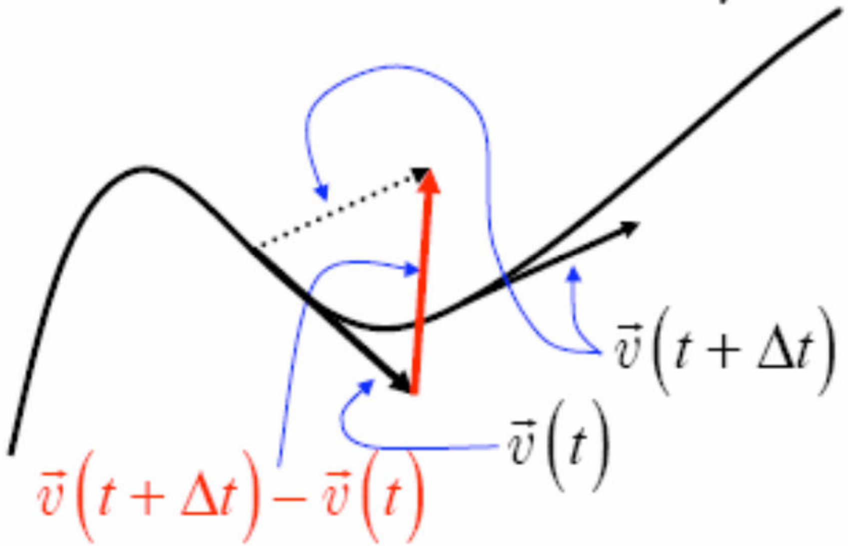
- $P(t+\Delta t) - P(t)$ è un vettore, per cui anche $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ è un vettore.

Derivata di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v} = \vec{v}(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce derivata del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t il limite, se esiste:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



- Poiché $\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ è ancora un vettore, $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ è pure un vettore.

Derivata di un segmento orientato

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La derivata di un segmento orientato $B-A = B(t)-A(t)$ è uguale alla differenza delle derivate dei suoi punti estremi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B-A) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[B(t+\Delta t)-A(t+\Delta t)\right]-\left[B(t)-A(t)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[B(t+\Delta t)-B(t)\right]-\left[A(t+\Delta t)-A(t)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[B(t+\Delta t)-B(t)\right]-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t)-A(t)\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

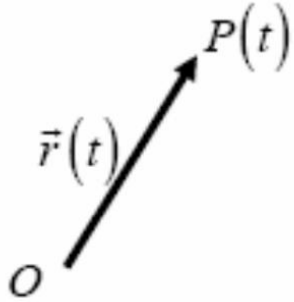
Vettore posizione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un caso interessante si ha quando si considera un segmento orientato $P(t)-O$ con un estremo fisso O (detto **vettore posizionale**):

$$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P(t) - O\right) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$



- La **derivata di un punto** è uguale alla **derivata** del suo **vettore posizionale**.

Regole di derivazione dei vettori

FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha\vec{a}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{a} + \alpha\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

Integrale di un vettore

- Integrale indefinito o funzione primitiva:

$$\vec{w} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

- Integrale definito

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{w}(t_2) - \vec{w}(t_1)$$

- Derivata e integrale possono essere effettuate mediante le espressioni cartesiane

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,\mathrm{d}t = \hat{\imath}\int_{t_1}^{t_2} v_x\,\mathrm{d}t + \hat{\jmath}\int_{t_1}^{t_2} v_y\,\mathrm{d}t + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} v_z\,\mathrm{d}t$$