Meccanica classica: Cinematica

Vincenzo Vagnoni
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e
Fondazione Giuseppe Occhialini

Fossombrone, 20 Marzo 2009

http://www.fondazioneocchialini.it

Cinematica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La **meccanica** studia i moti dei corpi e le leggi che li governano.
- **Cinematica**: approccio descrittivo. Studio delle grandezze fisiche e dei metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto, **senza curarsi delle cause** che li determinano.
- **Punto materiale**: è l'oggetto mobile più semplice. Ha **dimensioni trascurabili nel contesto considerato**.
  - P. es.: nel sistema solare la Terra può essere considerata un punto materiale, in quanto ha dimensioni piccole rispetto alle orbite dei pianeti e i suoi moti di rotazione, precessione, ecc. possono essere tralasciati nella descrizione del moto di rivoluzione.

Cinematica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Oggetti estesi**: possono essere suddivisi in tante parti, sufficientemente piccole per il dettaglio richiesto, e considerati come **sistemi di punti materiali**.
- **Il moto è relativo**: si può descrivere il moto soltanto quando si è stabilito rispetto a che cosa il movimento è valutato.
- **Sistema di Riferimento** (**SdR**): sistema di corpi, **in quiete gli uni rispetto agli altri** (distanza reciproca immutata nel tempo), rispetto a cui si descrive il moto.
- **Terna cartesiana di riferimento**: terna cartesiana, fissa rispetto al SdR, utilizzata per descrivere quantitativamente il moto.

Principio di relatività

- **Principio di Relatività**: **Non esiste un SdR privilegiato. Le leggi della Fisica sono uguali in tutti i SdR.**
  - La diatriba tra punto di vista **tolemaico** (geocentrico) e **copernicano** (eliocentrico) è **superata** nella fisica moderna: i due punti di vista non sono in antitesi (è altrettanto corretto dire che la Terra si muove rispetto al Sole o che il Sole si muove rispetto alla Terra). **La descrizione copernicana è più semplice ma non più "vera"**: con opportuni strumenti di calcolo si può pure descrivere il moto dei pianeti nel SdR terrestre.

Tempo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per decidere se un punto si muove occorre controllare se la sua posizione cambia col passare del tempo.
- Se si vuole considerare il tempo come **grandezza fisica** occorre darne una **definizione operativa**, ovvero bisogna stabilire qual è il procedimento con cui si misurano gli intervalli di tempo.
- Gli strumenti per la misura del tempo (orologi, cronometri) si basano su di un **fenomeno periodico** (che si ripete continuamente, come il moto di un pendolo). Gli intervalli di tempo tra due successive ripetizioni sono **supposti uguali** e uno qualunque di questi intervalli è assunto come unità di misura.
  - Es.: passaggio del Sole o di una stella dal meridiano locale (**giorno solare** e **giorno sidereo**). NB: in un anno 1 giorno solare in meno dei giorni siderei.
  - Es.: oscillazioni di un pendolo o di un bilanciere collegato a una molla a spirale. Oscillazioni di un quarzo piezoelettrico. Oscillazioni della radiazione elettromagnetica emessa in determinate transizioni atomiche.

L’unità di tempo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- I giorni **siderei** sono di lunghezza uguale tra loro, i giorni **solari** no, a causa del moto della Terra attorno al Sole, che non avviene a velocità costante.
- Tuttavia, poiché la vita quotidiana è basata sul Sole, si preferì riferire l’unità di tempo al **giorno solare medio** (media calcolata in un anno): **1 s = 1/86400** di giorno solare medio.
- Con il progredire della tecnica degli orologi atomici (nata nel 1949) si osservarono discrepanze rispetto alla periodicità terrestre (il giorno sidereo, misurato da un orologio atomico, **aumenta di 2 ms in un secolo** in conseguenza all’effetto delle maree).

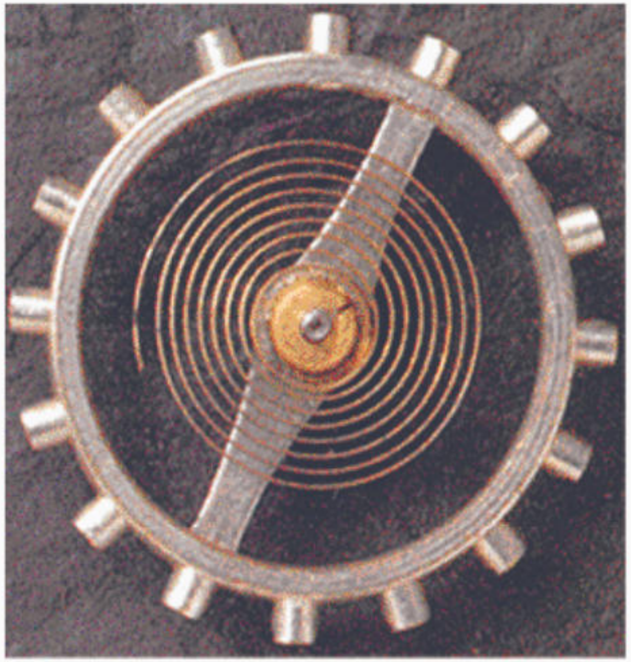
L’unità di tempo

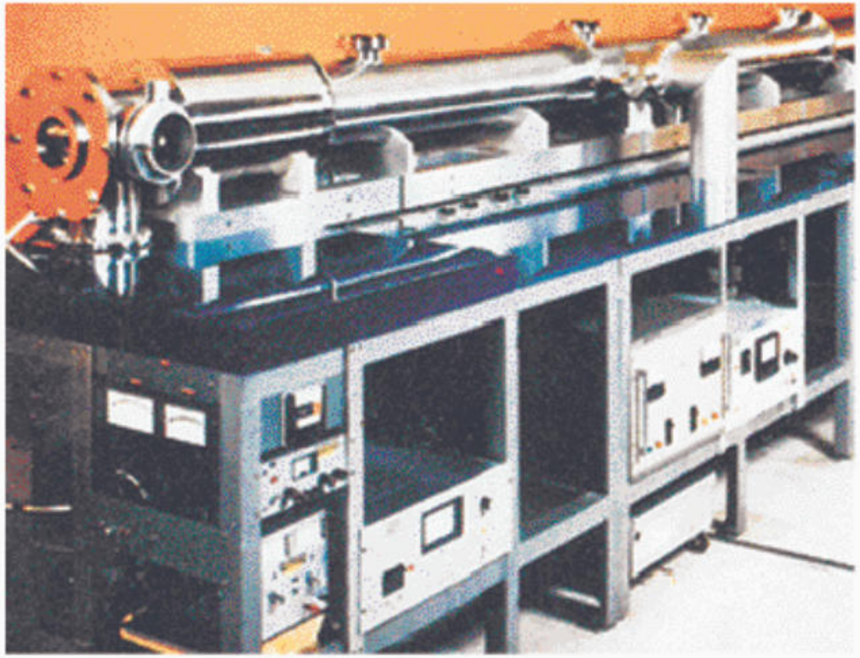
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il secondo fu perciò ridefinito (1960) come una **frazione** di un **anno** particolare (l’anno **1900**).
- Nel 1967 il secondo fu nuovamente ridefinito, come **multiplo del periodo di oscillazione** (9.192.631.770 oscillazioni) della **radiazione elettromagnetica** emessa dagli atomi di **Cesio 133** in una particolare transizione.
- La precisione di un orologio atomico è circa una parte su 10^{13}, ovvero esso sbaglia al massimo 1 secondo ogni 300000 anni).

L’unità di tempo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI





- bilanciere di un orologio meccanico
- orologio al cesio

http://www.fondazioneocchialini.it

L’unità di tempo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Oggi è possibile avere in casa o al polso un orologio sincronizzato con un orologio atomico.
- Un **orologio atomico**, presso il Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) a Braunschweig, (Berlino-Charlottenburg, Germania) è collegato a un’**antenna radio** situata a Mainflingen, a 24 km da Francoforte, che trasmette il segnale orario (DCF77) sulla frequenza di 77.5 kHz con una potenza di 50 kW fino a una distanza di 1500-2000 km.
- L’orologio ricevitore è in grado di sincronizzarsi con l’orologio atomico con uno scarto di circa 2 ms.

L’unità di tempo

- È anche possibile sincronizzare gli orologi dei computer **via Internet** con un orologio atomico.
- Lo scarto tipico di è di alcune decine di millisecondi.
- L’operazione è consentita dal protocollo **NTP** (**Network Time Protocol**) che si appoggia su TCP/IP (lo stack di protocolli utilizzati da Internet).
- Client NTP sono disponibili in tutte le distribuzioni Linux e in Windows XP. Sulle precedenti versioni di Windows possono essere istallati.
- Una lista dei time-server pubblici si può trovare all’URL **http://www.ntp.org/**.

L'unità di lunghezza

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il **metro** fu definito nel 1791 dall'Accademia delle Scienze di Parigi, come la **1/40.000.000 parte del meridiano terrestre**.
- Un **campione concreto** fu realizzato nel 1799 con un regolo di platino di sezione rettangolare di lunghezza pari a 1 m alla temperatura di fusione del ghiaccio.
- Si verificarono **discrepanze** tra le due definizioni e nel 1875 fu deciso di **non** riferire il metro alla Terra (che ha **dimensione variabile** in modo non prevedibile per i cambiamenti di forma della superficie terrestre) ma di riferirsi a un **nuovo campione**: una sbarra con sezione a X di platino-iridio (lega 90%-10%) con due tacche alla distanza di 1 m a 0°C (precisione 0.2 μm). Nel 1889 ne vennero costruite 30 copie, poi diffuse per il mondo.

L’unità di lunghezza

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Nel 1960 si definì il metro come un **multiplo della lunghezza d’onda** nel vuoto della luce rosso-arancione emessa dal **Cripton 86** in una particolare transizione (errore 0.01 μm).
- Nel 1983 si è infine deciso di definire il metro come la **distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299.792.458 di secondo**.
  - In questo modo si **riducono le misure di lunghezza a misure di tempo**.
  - Inoltre si **fissa per convenzione la velocità della luce nel vuoto** a c = 299.792.458 m/s.

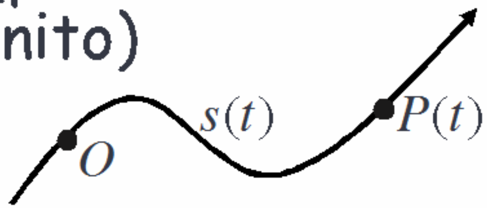
Descrizione intrinseca del moto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo un punto materiale che si muove (la sua posizione P si modifica nel tempo: $P=P(t)$) o, in maniera equivalente, il suo vettore posizionale:

  $$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

- **Traiettoria**: linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto.
- Scegliendo sulla traiettoria un'**origine** O e un **verso**, si indica con s la lunghezza dell'arco OP (positiva se P segue O nel verso di percorrenza definito)
- **Legge oraria**: è la funzione $\boxed{s = s(t)}$.



- Da **traiettoria** e **legge oraria** si ha una descrizione completa del moto del punto (**descrizione intrinseca**).

Descrizione cartesiana del moto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Una descrizione alternativa consiste nell'assegnare le 3 coordinate cartesiane x, y e z del punto P in funzione del tempo (descrizione cartesiana).

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(equazioni parametriche con il tempo t come parametro)

- Le equazioni parametriche, **se il parametro è il tempo**, forniscono una **descrizione completa** del moto del punto, diversa ma equivalente alla descrizione intrinseca.

- Se si sceglie l'origine degli assi cartesiani nel punto fisso O e si considera il corrispondente vettore posizionale, si ha:

$$\vec{r}(t) = P(t) - O = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Velocità del moto uniforme

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La velocità è un concetto introdotto per descrivere la **"rapidità"** con cui un punto materiale si sposta.
- **Moto uniforme**: è il moto di un punto materiale che **percorre archi di traiettoria di ugual lunghezza in intervalli di tempo uguali**. La legge oraria si può perciò scrivere soltanto nella forma:

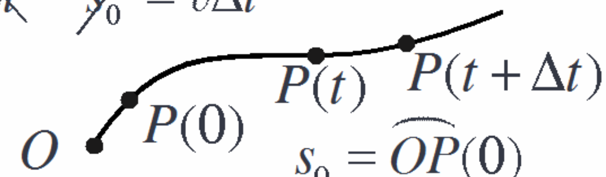
$$s(t) = vt + s_0$$

dove s_0 è il valore di s all'istante $t = 0$ e **v è un parametro** (**costante**). Se la funzione $s(t)$ non fosse di **primo grado in t** gli archi di traiettoria percorsi in intervalli di tempo uguali potrebbero non essere uguali.

- L'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo Δt è:

$$\Delta s = s\left(t + \Delta t\right) - s\left(t\right) = v\left[\cancel{t} + \Delta t\right] + \cancel{s_0} - \cancel{vt} - \cancel{s_0} = v\Delta t$$

funzione moltiplicazione



$$s_0 = \overset{\frown}{OP}(0)$$

$$s(t) = \overset{\frown}{OP}(t)$$

$$s(t+\Delta t) = \overset{\frown}{OP}(t+\Delta t)$$

Velocità del moto uniforme

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

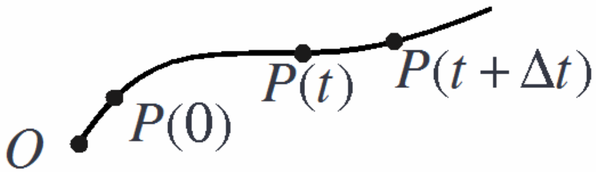
$$\Delta s = v \Delta t$$

- Segue che il parametro v si può esprimere come:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$ (**velocità nel moto uniforme**)

ed è perciò tanto più grande quanto più lungo è l'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo fissato.

- Chiamiamo perciò **velocità** del moto uniforme tale parametro v.



$$s_0 = \overset{\frown}{OP}(0)$$
$$s(t) = \overset{\frown}{OP}(t)$$
$$s(t+\Delta t) = \overset{\frown}{OP}(t+\Delta t)$$

Velocità del moto vario

- Nel **moto vario** (cioè **non-uniforme**) possiamo definire la **velocità media**:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- tuttavia v_m dipende, oltre che da t, anche da Δt (durante il tempo Δt la velocità può cambiare).
- Introduciamo allora la **velocità istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La velocità istantanea è la derivata di s rispetto a t.

La misura della velocità istantanea

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Volendo misurare sperimentalmente la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

  occorre precisare operativamente il procedimento di misura, considerando la **sensibilità**, sempre limitata, **degli strumenti di misura**.

- L'intervallo di tempo **Δt non può essere scelto piccolo ad arbitrio**:
  - se **Δt è più piccolo della sensibilità del cronometro** utilizzato per la misura, la misura di Δt dà risultato nullo.
  - se Δt è molto piccolo, può anche accadere che lo spostamento **Δs sia inferiore alla sensibilità dello strumento di misura della lunghezza**. Di conseguenza la misura di Δs dà risultato nullo.

La misura della velocità istantanea

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per misurare la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre scegliere gli intervalli Δt e Δs in modo che:

  - Tali intervalli siano **sufficientemente piccoli** che **lo stato di moto in essi non subisca variazioni apprezzabili nel contesto che stiamo considerando** (cioè data la precisione di cui abbiamo bisogno).
  - Tali intervalli siano **sufficientemente grandi** da **potere essere misurati con gli strumenti di misura di cui disponiamo**.

Velocità istantanea e traiettoria nella fisica microscopica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La limitazione del concetto di velocità istantanea non è dovuta soltanto nella limitazione della sensibilità degli strumenti di misura.
- I concetti di **velocità istantanea** (derivata dello spostamento rispetto al tempo) e di **traiettoria** (linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto) di un punto materiale **hanno senso** soltanto **se un punto materiale ha una posizione definita in ogni istante di tempo**.
- Lo studio sperimentale del moto delle **particelle atomiche e sub-atomiche** mostra che esse **non hanno una ben definita posizione in un certo istante di tempo**:
  - I concetti di **traiettoria** e di **velocità istantanea** **perdono significato** nel caso delle particelle atomiche e sub-atomiche.

Velocità istantanea di un elettrone libero

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

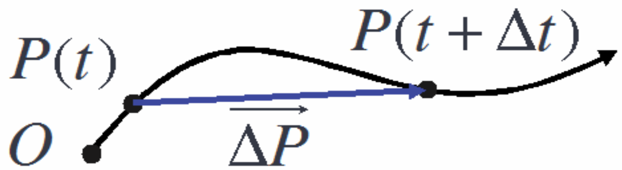
- In particolare, risolvendo le equazioni del moto della meccanica quantistica (equazioni di Heisemberg) si trova che **la misura di una componente della velocità istantanea di un elettrone libero può dare come risultato soltanto** $\pm c$ (dove c è la velocità della luce nel vuoto).
- La **velocità osservata** degli elettroni, che è sempre una velocità **media**, è invece **sempre minore di** c.
- Segue che **la velocità istantanea di un elettrone libero non è affatto costante, ma oscilla rapidamente** (con velocità che può avere soltanto i valori $\pm c$) **attorno a un valore medio che è il valore osservato**.

Velocità vettoriale

FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- In un **moto curvilineo** la **direzione** del moto **varia nel tempo**. v contiene informazioni sulla rapidità di spostamento, ma non sulla direzione.
- Si può compendiare in un'unica grandezza fisica la rapidità del moto e la sua direzione.
- Consideriamo lo spostamento di un punto P in un intervallo Δt, ma invece di misurare lo spostamento lungo la traiettoria, consideriamo lo spostamento **"in linea d'aria"**, ovvero il segmento orientato:

$$\overrightarrow{\Delta P} = P(t+\Delta t) - P(t)$$



- Possiamo ora definire la **velocità media vettoriale**:

$$\vec{v}_m = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

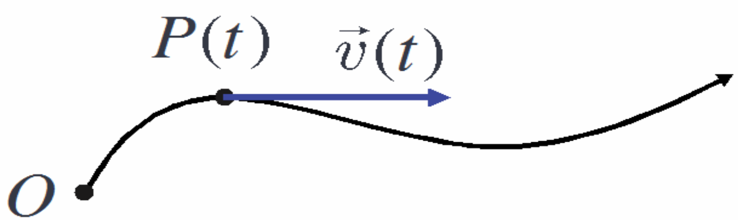
Velocità vettoriale

- Essa ha la stessa direzione dello spostamento e modulo tanto più grande quanto maggiore lo spostamento ("in linea d'aria") compiuto in un intervallo di tempo fissato.
- Si può definire anche la **velocità istantanea vettoriale**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}$$

che dunque è la derivata del punto (o del vettore posizionale) rispetto al tempo.

- La direzione di $\vec{v}$ è **tangente alla traiettoria** nel punto $P(t)$



Velocità vettoriale

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

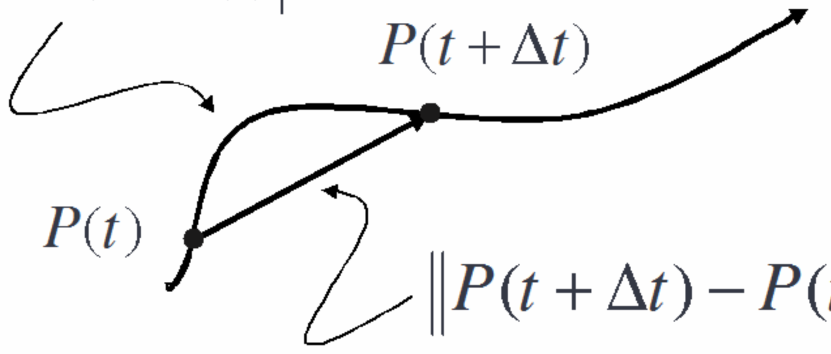
- Poiché nel limite di un arco infinitesimo, la corda approssima l'arco, si ha:

$$\underbrace{\left\| P(t+\Delta t) - P(t) \right\|}_{\text{corda}} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \underbrace{\left| s(t+\Delta t) - s(t) \right|}_{\text{arco}}$$

per cui il modulo della velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare prima definita:

$$\boxed{\left\| \vec{v} \right\| = \left| \dot{s} \right|}$$

$$\overbrace{\left| s(t+\Delta t) - s(t) \right|}^{\text{arco}}$$



$$\left\| P(t+\Delta t) - P(t) \right\|$$

Rappresentazioni della velocità

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Se chiamiamo $\hat{t}$ un versore tangente alla traiettoria, col verso concorde a quello del moto, si ha:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$$

- (rappresentazione **intrinseca** della velocità).
- Se deriviamo l'espressione:

$$P - O = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

- considerando che i versori cartesiani sono costanti:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

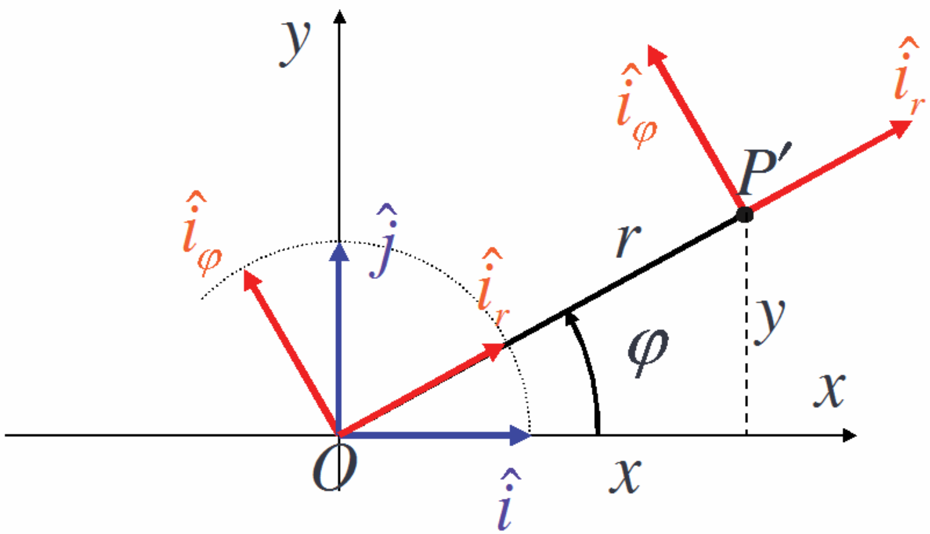
- (rappresentazione **cartesiana** della velocità).

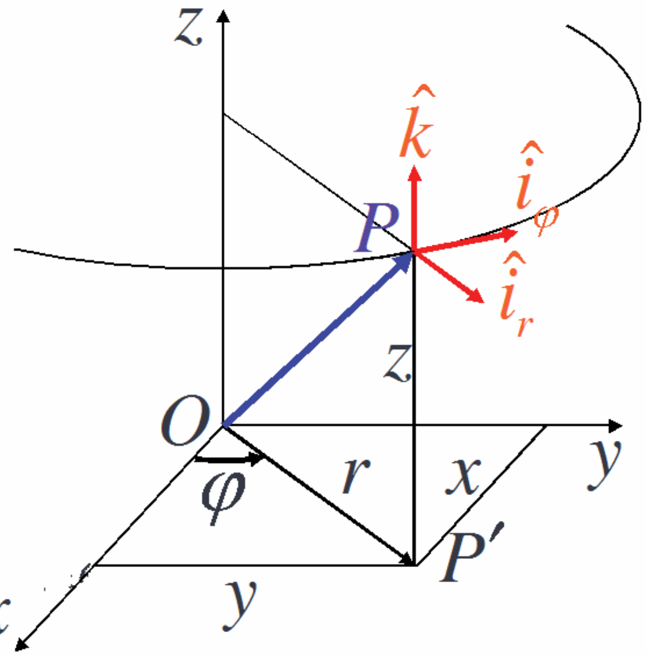
Coordinate polari cilindriche

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \text{vers}\left(P' - O\right) \\ \hat{i}_\varphi = \hat{k} \wedge \hat{i}_r \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$

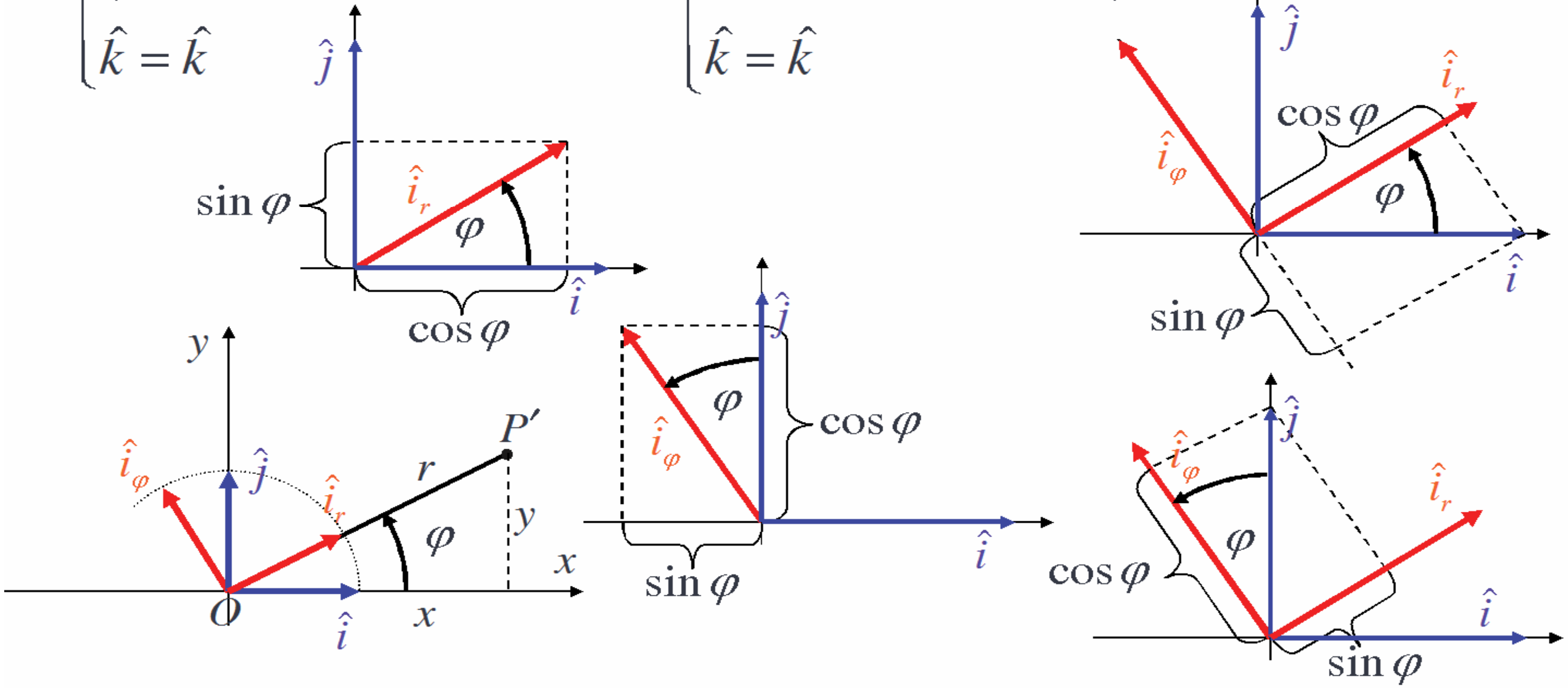




Coordinate polari cilindriche

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \\ \hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{i} = \cos\varphi\,\hat{i}_r - \sin\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{j} = \sin\varphi\,\hat{i}_r + \cos\varphi\,\hat{i}_\varphi \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$



Rappresentazione della velocità in coordinate cilindriche

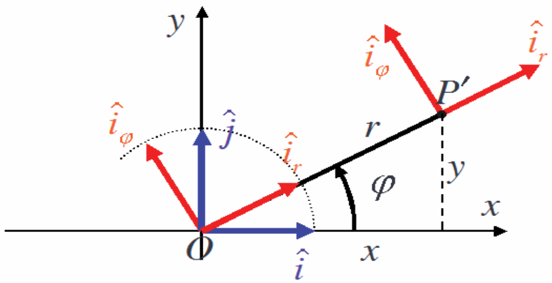
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

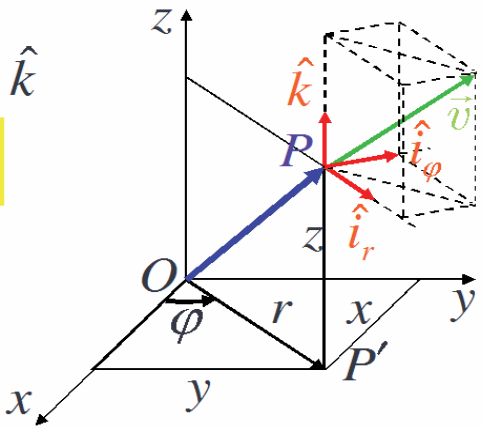
$$
\begin{cases}
\dfrac{d\hat{i}_r}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{j} = \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\right) = \dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi \\
\dfrac{d\hat{i}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j} = -\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\right) = -\dot{\varphi}\,\hat{i}_r \\
\dfrac{d\hat{k}}{dt} = 0
\end{cases}
$$

$$P - O = r\,\hat{i}_r + z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{P} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\,\dot{\hat{i}}_r + \dot{z}\,\hat{k}$$

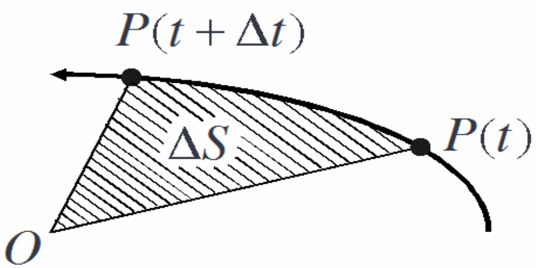
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\,\dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + \dot{z}\,\hat{k}}$$





Velocità aerolare

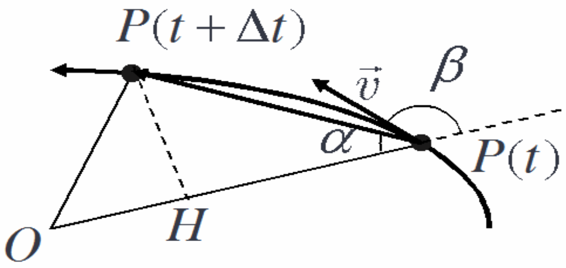
- Si definisce **velocità areolare** l'area spazzata dal vettore posizionale nell'unità di tempo:



$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left\| P(t) - O \right\|}_{\text{base}} \underbrace{\left\| P(t+\Delta t) - H \right\|}_{\text{altezza}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| P(t) - O \right\| \left\| P(t+\Delta t) - P(t) \right\| \left| \sin \alpha \right|$$



$$A \simeq \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{2} \left\| P(t) - O \right\| \left\| \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| \left| \sin \alpha \right| \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| P(t) - O \right\| \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| \left| \sin(\pi - \beta) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| P - O \right\| v \left| \sin \beta \right|$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \pi - \beta$$

$$\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$$

Velocità aerolare

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Possiamo definire la velocità areolare come **vettore**:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(P-O)\wedge\vec{v}$$

- In tal caso essa risulta perpendicolare al piano del moto.

- La velocità areolare è pari alla **metà** del **momento della velocità rispetto al centro di riduzione** O.

Accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Rappresenta quantitativamente la **rapidità con cui varia la velocità di un punto**.
- Possiamo quindi definire **accelerazione media** il rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- e **accelerazione istantanea** il limite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{P} = \frac{d^2 P}{dt^2}$$

Espressione intrinseca dell’accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l’espressione:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$$

- Si ottiene:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}}$$

- Dobbiamo valutare $\dot{\hat{t}}$, che si può anche scrivere nella forma:

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds}\dot{s}$$

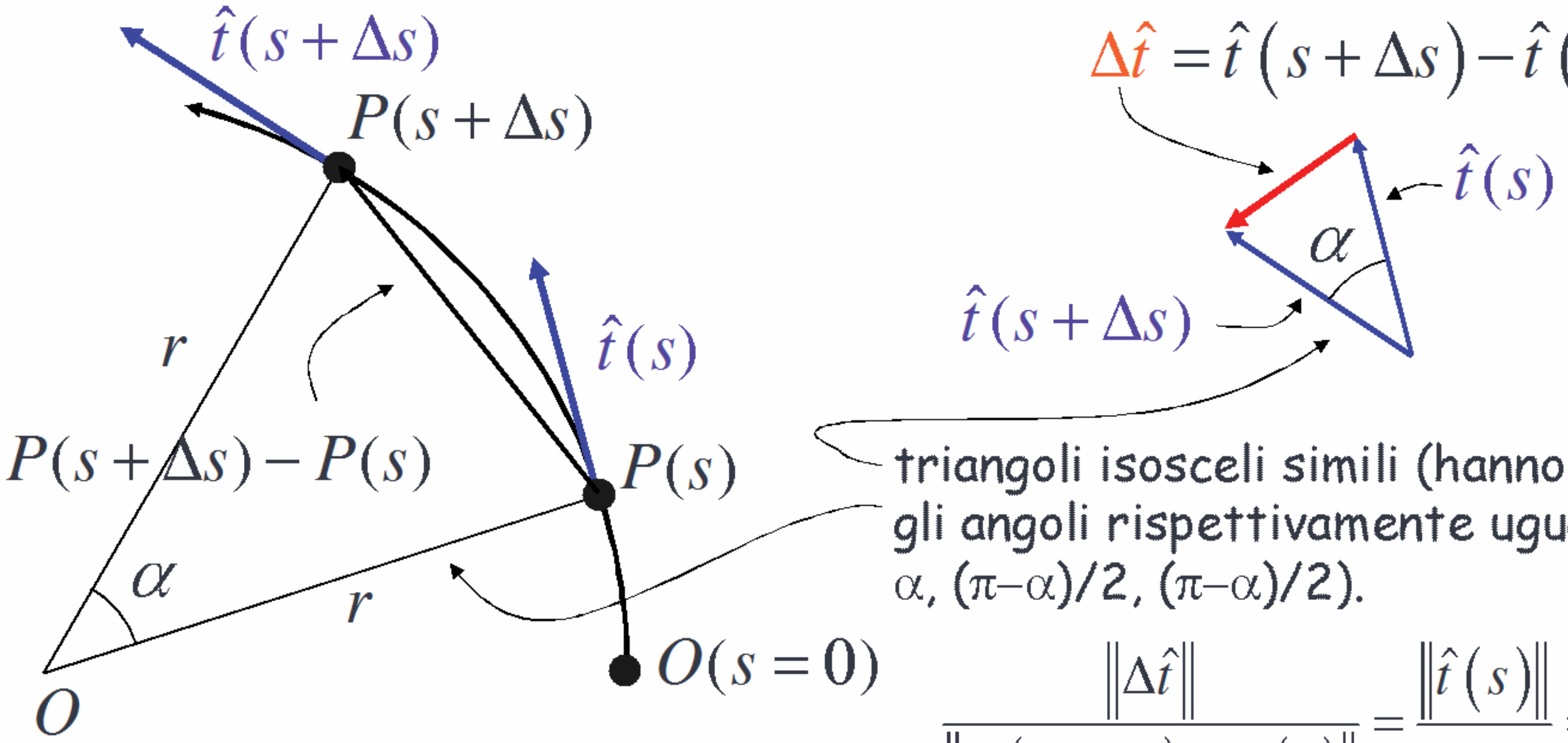
- Consideriamo inizialmente una traiettoria circolare e cerchiamo di determinare:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$

Espressione intrinseca dell’accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\Delta\hat{t} = \hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)$$



triangoli isosceli simili (hanno gli angoli rispettivamente uguali: α, (π–α)/2, (π–α)/2).

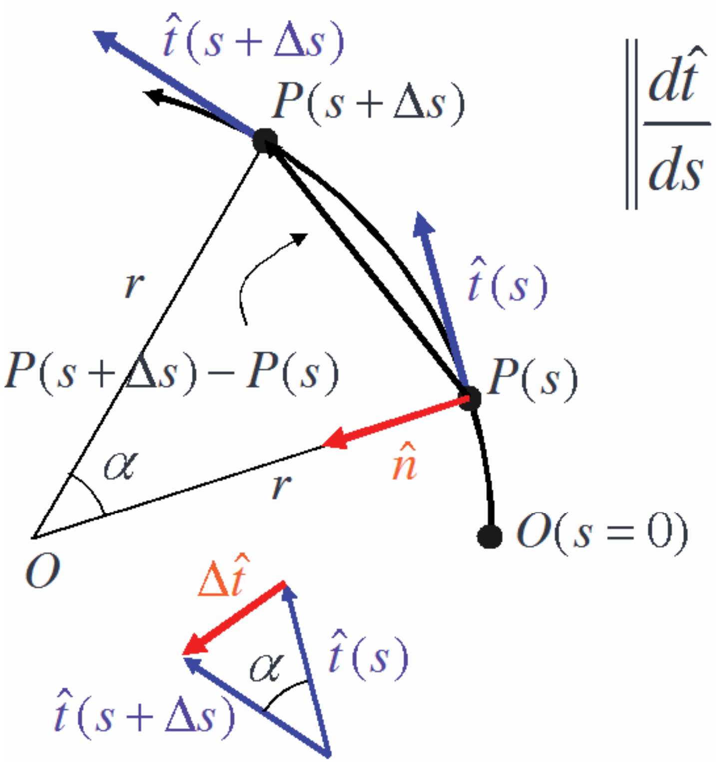
$$\frac{\left\|\Delta\hat{t}\right\|}{\left\|P(s+\Delta s) - P(s)\right\|} = \frac{\left\|\hat{t}(s)\right\|}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0 \;\Rightarrow\; \Delta\hat{t} \underset{\Delta s \to 0}{\perp} \hat{t}$$

$$\left\|\Delta\hat{t}\right\| = \frac{\left\|P(s+\Delta s) - P(s)\right\|}{r}$$

Espressione intrinseca dell'accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\left\|\frac{d\hat t}{ds}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|\Delta \hat t\right\|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\frac{\left\|P(s+\Delta s)-P(s)\right\|}{r} =$$

corda

$$= \frac{1}{r}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left\|P(s+\Delta s)-P(s)\right\|}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$

arco

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\dfrac{d\hat t}{ds}\right\| = \dfrac{1}{r} \\ \Delta\hat t \underset{\Delta s\to 0}{\perp} \hat t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\hat t}{ds} = \frac{1}{r}\hat n$$

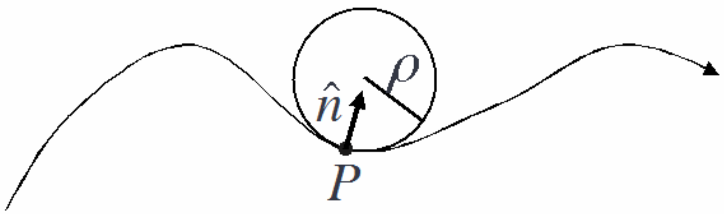
- dove $\hat n$ é il versore radiale **centripeto**, detto **normale** alla traiettoria.

Espressione intrinseca dell'accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può passare da una traiettoria circolare a una **traiettoria generica** approssimandone ogni tratto infinitesimo con un arco di circonferenza.
- La geometria analitica dimostra che in generale questo arco infinitesimo esiste e fa parte di una **circonferenza** detta **osculatrice** alla traiettoria in P, giace su di un piano detto **piano osculatore** della traiettoria in P e ha un raggio detto **raggio di curvatura** della traiettoria in P.
- Indicando con ρ il raggio di curvatura, si ha, per una traiettoria qualunque:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}$$



Espressione intrinseca dell'accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- L'**espressione intrinseca dell'accelerazione** diviene quindi:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

- **Non** vi è **mai** componente **binormale**, ovvero componente in direzione: $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$

- Mentre la **velocità è sempre tangente** alla traiettoria, l'**accelerazione** possiede **una componente tangenziale** e **una normale**.
  - Se il moto è **rettilineo** ($\rho \to \infty$) la componente normale si annulla e rimane **soltanto** la **componente tangenziale**.
  - Se il moto è **uniforme** ($\dot{s}$ costante) la componente tangenziale si annulla e rimane **soltanto** la **componente normale**.

Espressione cartesiana dell'accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l'espressione cartesiana della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

- essendo i versori cartesiani costanti, si ottiene l'**espressione cartesiana dell'accelerazione**:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k}}$$

Espressione polare cilindrica dell'accelerazione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Derivando rispetto al tempo l'espressione polare cilindrica della velocità:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\,\dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + \dot{z}\,\hat{k}$$

- e ricordando le derivate dei versori:

$$\dot{\hat{i}}_r = \dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi, \qquad \dot{\hat{i}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\hat{i}_r$$

- Si ottiene l'**espressione polare cilindrica dell'accelerazione**:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\,\hat{i}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{i}}_r\right) + \left(\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + r\dot{\varphi}\,\dot{\hat{i}}_\varphi\right) + \ddot{z}\,\hat{k} =$$

$$= \ddot{r}\,\hat{i}_r + \dot{r}\left(\dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi\right) + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\hat{i}_\varphi + r\dot{\varphi}\left(-\dot{\varphi}\,\hat{i}_r\right) + \ddot{z}\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\hat{i}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\hat{i}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{k}$$

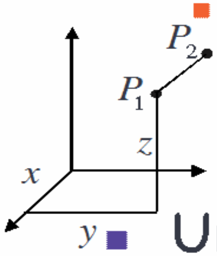
Gradi di libertà

- Per descrivere la posizione di un punto materiale sono necessari e sufficienti 3 parametri (p.es.: 3 coordinate cartesiane, cilindriche o sferiche). Si dice allora che un **punto materiale** P ha **3 gradi di libertà**.
- Si chiama **numero dei gradi di libertà** (GdL) di un sistema meccanico qualunque **il minimo numero di parametri necessari per individuare una sua generica configurazione**.
- Un sistema di ***n*** **punti materiali liberi** ha **3*n* gradi di libertà**.
- Una **restrizione** ai movimenti di un sistema meccanico si chiama **vincolo**. Ogni vincolo **permette** certi movimenti ma ne **vieta** altri.
- Un punto materiale vincolato a muoversi su di una **superficie** ha **2 GdL** (p.es.: pezzi sulla scacchiera, posizione GPS sulla superficie terrestre). Si può continuare a usare 3 coordinate, ma esse non sono indipendenti (p.es.: sulla superficie terrestre $x^2+y^2+z^2=r^2$, su di un piano $z=0$, ecc.)

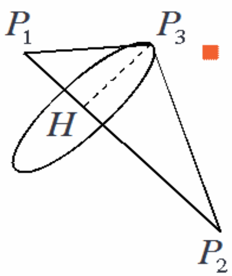
Gradi di libertà

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un punto materiale vincolato a muoversi su di una **linea** ha **1 GdL** (è sufficiente il parametro s).
- Un sistema di **2 punti materiali** P_1 e P_2 vincolati a mantenere **distanza inalterata** $\|P_2 - P_1\|$ ha **5 GdL**.
  - Infatti con 3 coordinate si descrive la posizione di P_1. Fissato P_1, P_2 si trova su di una superficie sferica di raggio $\|P_2 - P_1\|$ e centro fissato P_1, quindi bastano soltanto 2 parametri per determinare la sua posizione.



- Un sistema di **3 punti materiali** vincolato a mantenere **inalterate** le **mutue distanze** ha **6 GdL**.
  - Infatti, usate 5 coordinate per fissare P_1 e P_2, occorre 1 sola coordinata per determinare la posizione di P_3 (P_3 si trova sulla circonferenza di centro H e raggio $\|P_3 - H\|$).



Gradi di libertà

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un sistema di **4 punti materiali** vincolati a mantenere **inalterate** le **mutue distanze** ha **6 GdL**.
  - La posizione del quarto punto è fissata dagli altri 3.
- Un sistema di $n \geq 4$ **punti materiali** vincolati a mantenere **inalterate** le **mutue distanze** ha **6 GdL**.
- Un sistema di n punti materiali vincolati a mantenere **inalterate** le **mutue distanze** si chiama **corpo rigido**.
- Un **corpo rigido libero** ha **6 GdL**.
  - Le velocità di tutti i punti che compongono un corpo rigido si ricava da **2 vettori** (6 scalari).

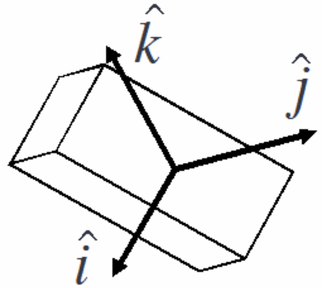
Moto di un corpo rigido

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo un **SdR solidale al corpo rigido** e scegliamo in esso una terna cartesiana di versori $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ortogonali tra loro.

- In generale i **versori cambiano continuamente direzione**, ma **restano ortogonali tra loro e unitari**:

$$\begin{cases} \hat{i}\bullet\hat{i}=\hat{j}\bullet\hat{j}=\hat{k}\bullet\hat{k}=1 \\ \hat{i}\bullet\hat{j}=\hat{j}\bullet\hat{k}=\hat{k}\bullet\hat{i}=0 \end{cases}$$



- Le derivate rispetto al tempo dei versori non sono nulle (essi hanno modulo costante ma direzione variabile). Derivando le relazioni qui sopra si ha:

$$\text{N.B.}:\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\vec{v}\bullet\vec{v})=2\dfrac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{v} \\ \dfrac{d}{dt}(\vec{v}\bullet\vec{w})=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\bullet\vec{w}+\vec{v}\bullet\dfrac{d\vec{w}}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{i}}{dt}\bullet\hat{i}=\dfrac{d\hat{j}}{dt}\bullet\hat{j}=\dfrac{d\hat{k}}{dt}\bullet\hat{k}=0 \\ \dfrac{d\hat{i}}{dt}\bullet\hat{j}+\hat{i}\bullet\dfrac{d\hat{j}}{dt}=\dfrac{d\hat{j}}{dt}\bullet\hat{k}+\hat{j}\bullet\dfrac{d\hat{k}}{dt}=\dfrac{d\hat{k}}{dt}\bullet\hat{i}+\hat{k}\bullet\dfrac{d\hat{i}}{dt}=0 \end{cases}$$

Moto di un corpo rigido

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un generico vettore si può scrivere, per componenti:

$$\vec{v} = (\vec{v} \bullet \hat{i})\hat{i} + (\vec{v} \bullet \hat{j})\hat{j} + (\vec{v} \bullet \hat{k})\hat{k}$$

- Definendo i 3 simboli:

$$\omega_1 = \frac{d\hat{j}}{dt} \bullet \hat{k}, \quad \omega_2 = \frac{d\hat{k}}{dt} \bullet \hat{i}, \quad \omega_3 = \frac{d\hat{i}}{dt} \bullet \hat{j}$$

- si può scrivere:

N.B.: $\frac{d\hat{k}}{dt} \bullet \hat{i} + \hat{k} \bullet \frac{d\hat{i}}{dt} = 0$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \bullet \hat{i}\right)\hat{i} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \bullet \hat{j}\right)\hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \bullet \hat{k}\right)\hat{k} = 0\hat{i} + \omega_3 \hat{j} - \omega_2 \hat{k}$$

- e analogamente per gli altri versori:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_3 \hat{j} - \omega_2 \hat{k}, \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \omega_1 \hat{k} - \omega_3 \hat{i}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1 \hat{j}$$

Moto di un corpo rigido

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Oppure, definito il vettore:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}$$

- Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\omega} \wedge \hat{i} &= \det \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \omega_3 \hat{j} - \omega_2 \hat{k} \\
\vec{\omega} \wedge \hat{j} &= \det \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \omega_1 \hat{k} - \omega_3 \hat{i} \\
\vec{\omega} \wedge \hat{k} &= \det \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1 \hat{j}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} \\ \dfrac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j} \\ \dfrac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k} \end{cases}$$

(formule di Poisson)

Moto di un corpo rigido

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per un **generico versore** $\hat{u}$ **solidale** al corpo rigido:

$$\hat{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}, \qquad (u_x,\ u_y,\ u_z \text{ costanti se } \hat{u} \text{ è solidale})$$

- si ha:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = u_x \frac{d\hat{i}}{dt} + u_y \frac{d\hat{j}}{dt} + u_z \frac{d\hat{k}}{dt} = u_x \vec{\omega} \wedge \hat{i} + u_y \vec{\omega} \wedge \hat{j} + u_z \vec{\omega} \wedge \hat{k} =$$

$$= \vec{\omega} \wedge \left(u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k} \right) = \vec{\omega} \wedge \hat{u}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{u}}$$

- $\vec{\omega}$ **dipende** perciò soltanto dal **modo in cui si muove** il corpo rigido e non dalla scelta del versore.

Moto di un corpo rigido

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo il segmento orientato che connette **due punti qualunque**, P e O, di un corpo rigido. Per il vincolo di rigidità:

$$\left\| P - O \right\| = r \equiv \text{cost}$$

$$P - O = r\hat{u}$$

- Si ha perciò, chiamando $\vec{v}_P = \dot{P}$ e $\vec{v}_O = \dot{O}$ le velocità dei due punti:

$$\dot{P} - \dot{O} = r\dot{\hat{u}} = r\vec{\omega} \wedge \hat{u} = \vec{\omega} \wedge \left(r\hat{u} \right) = \vec{\omega} \wedge \left(P - O \right)$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \left(P - O \right)$$

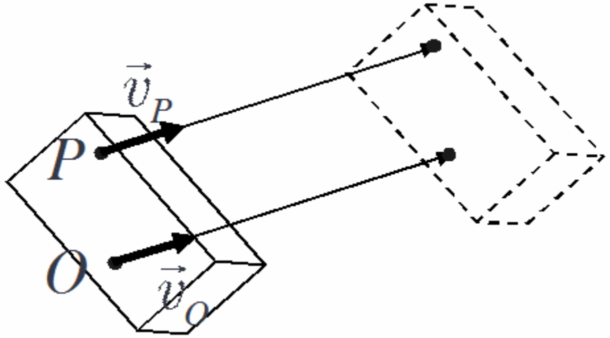
- (**formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi**).

Moto traslatorio

- Se $\vec{\omega} = \vec{0}$ il moto si dice **traslatorio**

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O \qquad \forall P}$$

- Le velocità di tutti i punti del corpo rigido sono uguali tra loro.



Moto rotatorio

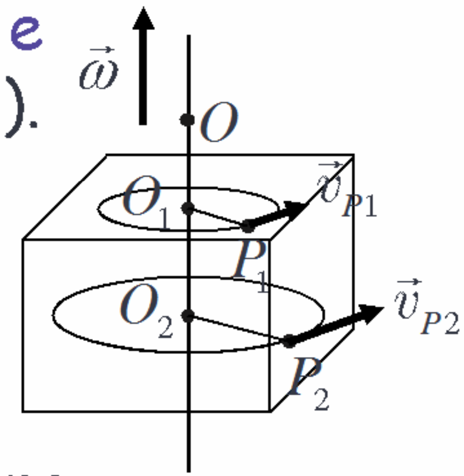
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Se esiste almeno un punto O tale che $\vec{v}_O = \vec{0}$ il moto si dice **rotatorio**:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)}$$

- Tutti i punti O_i della **retta passante per O e parallela a $\vec{\omega}$** sono fissi (**asse di rotazione**).

$$\vec{v}_{Oi} = \vec{\omega} \wedge (O_i - O) = \vec{0} \quad \text{poiché} \quad \vec{\omega} \parallel (O_i - O)$$



- Gli altri punti P_i descrivono **traiettorie circolari** di centro O_i, giacenti in piani perpendicolari all'asse di rotazione (debbono avere distanza fissa dall'asse di rotazione, per i vincoli di rigidità).

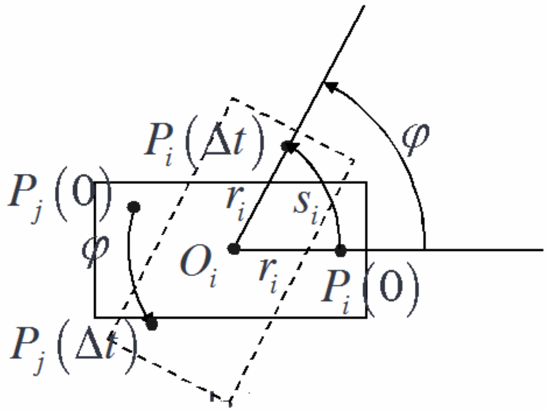
Moto rotatorio

- Se chiamiamo $\|P_i - O_i\| = r_i$ allora:

$$v_{Pi} = \|\vec{v}_{Pi}\| = \|\vec{\omega} \wedge (P_i - O_i)\| = \omega\, r_i \left|\sin \tfrac{\pi}{2}\right| = \omega\, r_i$$

- cioè la velocità di un punto è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione.

- L'angolo φ che $P_i(\Delta t) - O_i$ forma con $P_i(0) - O_i$ (ovvero l'angolo di cui ruota il sistema nel tempo Δt) è lo stesso per tutti i punti a causa del vincolo di rigidità.



Velocità angolare

- Lungo la traiettoria circolare descritta dal punto P_i

$$s_i = r_i\varphi \;\Rightarrow\; \dot{s}_i = r_i\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; v_i = |\dot{s}_i| = r_i|\dot{\varphi}| \;\Rightarrow\; \omega = \frac{v_i}{r_i} = |\dot{\varphi}|$$

- Scelto il versore $\hat{u}$ dell'asse di rotazione con la regola della mano destra, si può scrivere:

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{u}}$$

- $\vec{\omega}$ è perciò chiamato **velocità angolare**.
- Si **noti bene** che **non** si può scrivere $\cancel{\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}}}$ in quanto, come abbiamo visto, le rotazioni non sono vettori.