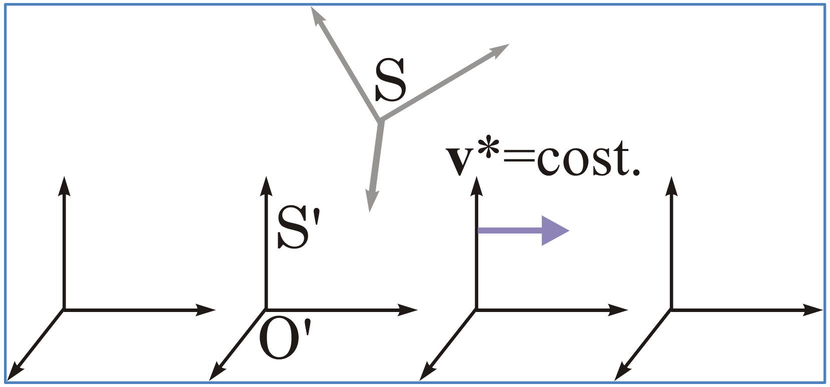
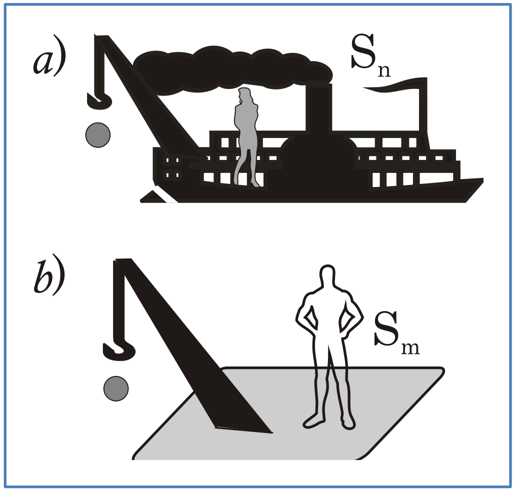
Principio di relatività.



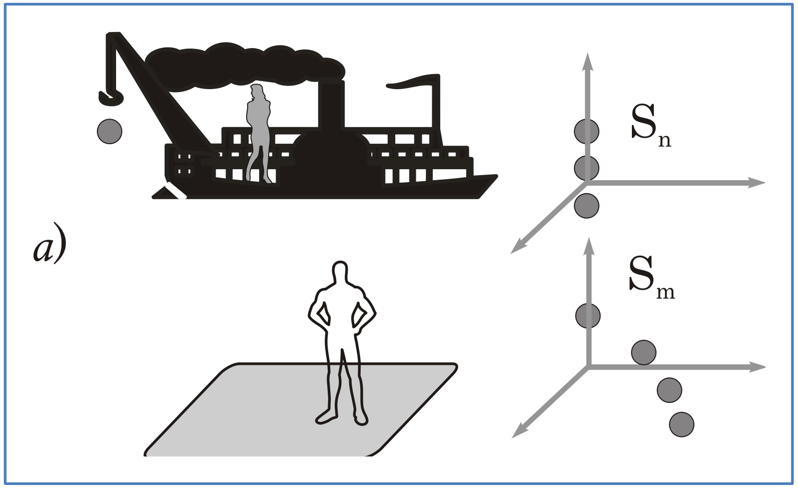
I sistemi di riferimento inerziali traslano con moto rettilineo e uniforme l'uno rispetto all'altro.

Sistemi di riferimento inerziali del tutto ***equivalenti***: *sono regolati dalle medesime Leggi*.
Tutte le Leggi fondamentali della Fisica debbono avere la *stessa forma* in tutti i sistemi di riferimento di questo tipo: ***sono invarianti nella forma***.
In questo caso, si tratta di ambito meccanico.
Ma anche dopo, la tendenza è di riportare ad una descrizione meccanica qualsiasi fenomeno naturale.

Scelta del sistema di riferimento: arbitraria, comoda.
In fisica: descrizione di fenomeni complessi con poche leggi.



Caduta di un grave; separatamente:
stessa legge del moto, **a** = cost.
(dipende dal *Principio di relatività galileiana*)



Stessa traiettoria, rettilinea (dipende dalle stesse condizioni iniziali):
infatti, incrociando, le traiettorie sono diverse.

Utilizziamo il secondo Principio della dinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = m\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{w}_2 = m\mathbf{a}_2 \end{cases} \quad \text{ma } \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{g} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{w}_1 = m\mathbf{g} \\ \mathbf{w}_2 = m\mathbf{g} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \equiv \mathbf{w}$$

Quindi, per ambedue: $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$ con $\mathbf{g} = \text{costante}$

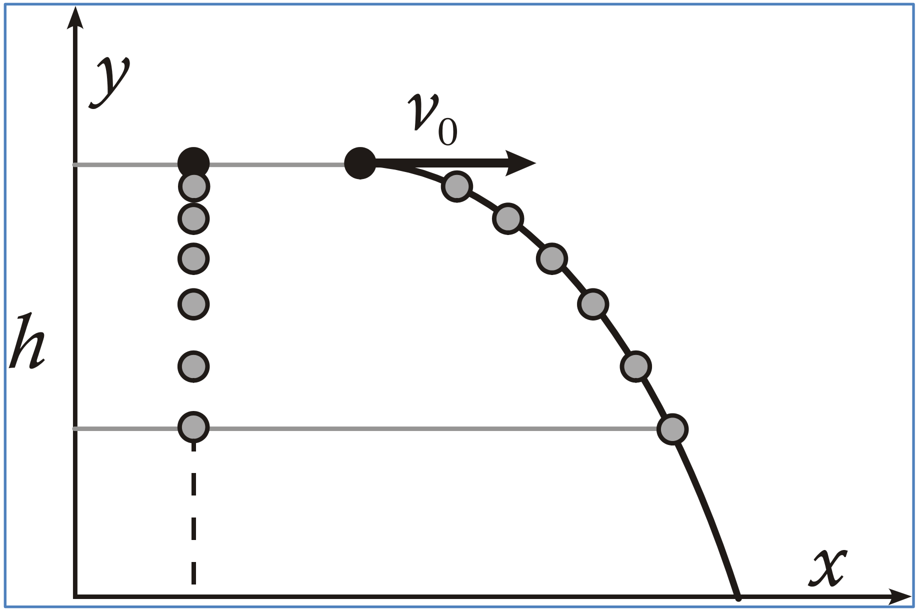
Facendo i conti: $\begin{cases} v_x \;\; t \;\; = \cancel{v_x(t_0)} + \cancel{a_x t} \\ v_y \;\; t \;\; = \cancel{v_y(t_0)} + a_y t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x \;\; t \;\; = 0 \\ v_y \;\; t \;\; = -g\,t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \;\; t \;\; = x \;\; t_0 \;\; = 0 \\ y \;\; t \;\; = h - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

che è l’equazione di una retta.

Se invece "incrociamo": $v_x(t_0) = v_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -g\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \neq 0 \\ y(t) = h - \dfrac{1}{2} g\,t^2 \end{cases}$$

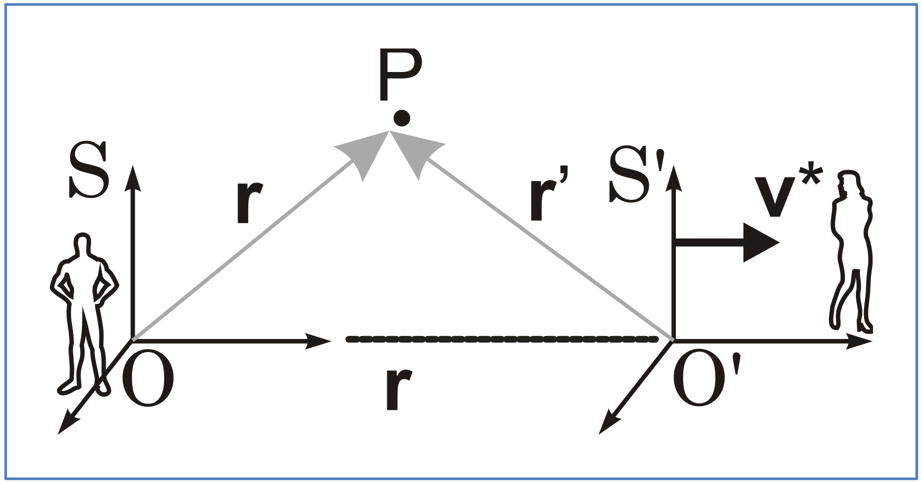


$$\Rightarrow y(t) = h - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2$$

parabola!!

In sostanza, dunque, ***l'invarianza*** *della forma* delle Leggi fisiche (in tutti i sistemi inerziali) non richiede che tutte le grandezze abbiano gli stessi valori nei diversi sistemi, salvo che siano scalari. In particolare, le componenti dei vettori cambiano fra un riferimento e un altro, però devono trasformarsi allo stesso modo: devono essere ***covarianti***.

In ambito della ***meccanica*** classica, il Primo Principio e il Principio di relatività galileiana sono equivalenti.
Ma il secondo è più generale, se riferito non solo alla meccanica classica.



$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}' \\ \mathbf{OO}' = \mathbf{v}^* t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{v}^* t + \mathbf{r}' \\ t = t' \end{cases}$$

trasformazioni di Galileo

derivando rispetto a t: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\left(\mathbf{v}^* t\right)}{dt} + \dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}^* + \dfrac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}' \\ t = t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}' \\ t = t' \end{cases}$$

tempo assoluto!

In effetti, nei principi della dinamica figura l'accelerazione (invariante) e non la velocità (non invariante).

Anche la $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$ è invariante. Infatti:
le forze dipendono dalla *distanza*, che non varia (assoluta!);
ed eventualmente da velocità relative (per esempio, l'attrito);
la massa è grandezza scalare.

Quindi, rispetto agli esperimenti meccanici, tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti. E cioè:

- non esistono sistemi inerziali privilegiati
- le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni di Galileo.

Principi basilari della meccanica classica:

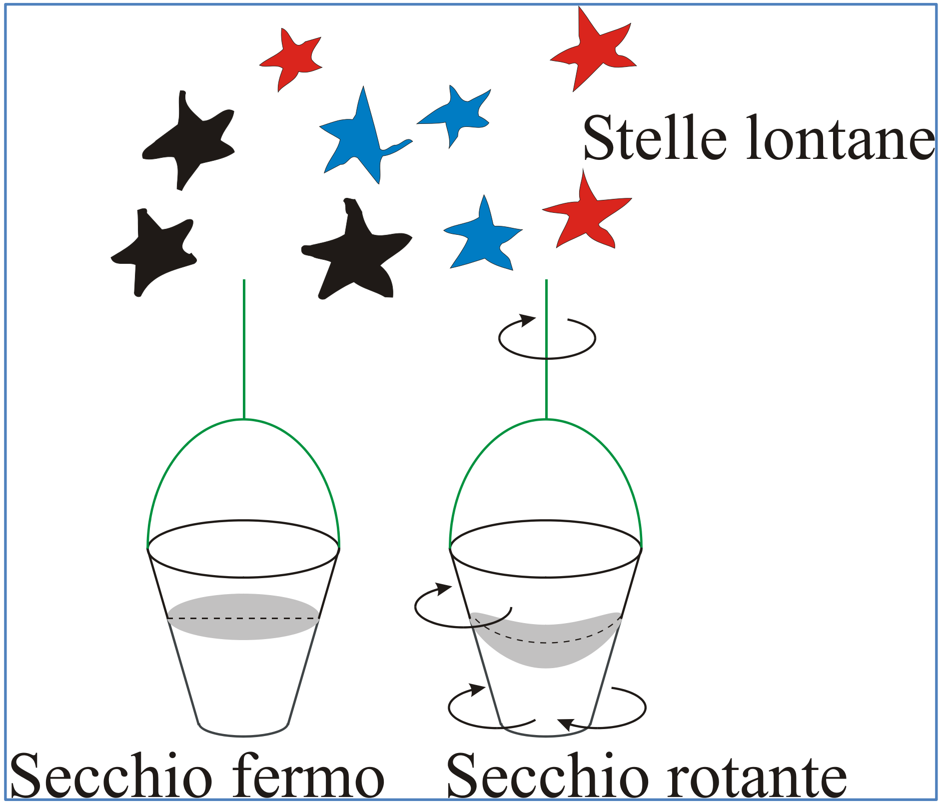
- principio di relatività galileiana
- principio di invarianza del tempo
- terzo principio (spazio omogeneo e isotropo)

Newton e lo spazio assoluto

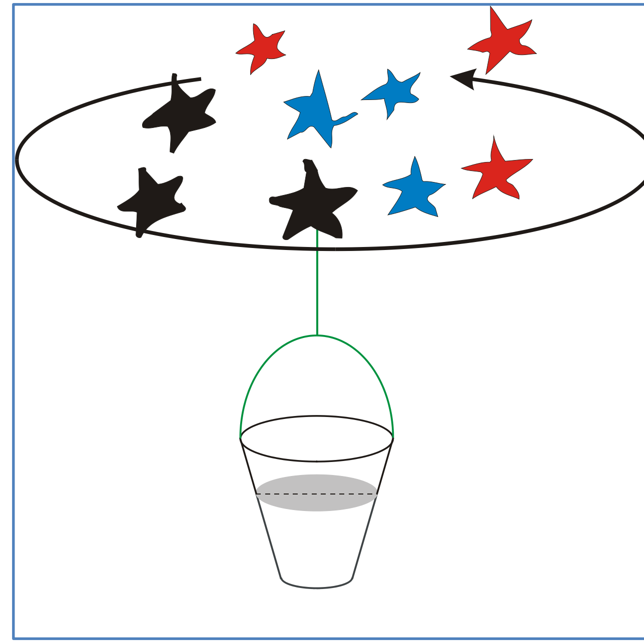
Contraddizione: per Newton esiste uno spazio assoluto, "che per sua natura, senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile".

Newton considera le ***forze inerziali*** (*pseudoforze*) una prova dell'esistenza dello spazio assoluto.

Un esperimento ideale:



E se ruotassero le stelle, restando fermo il secchio??

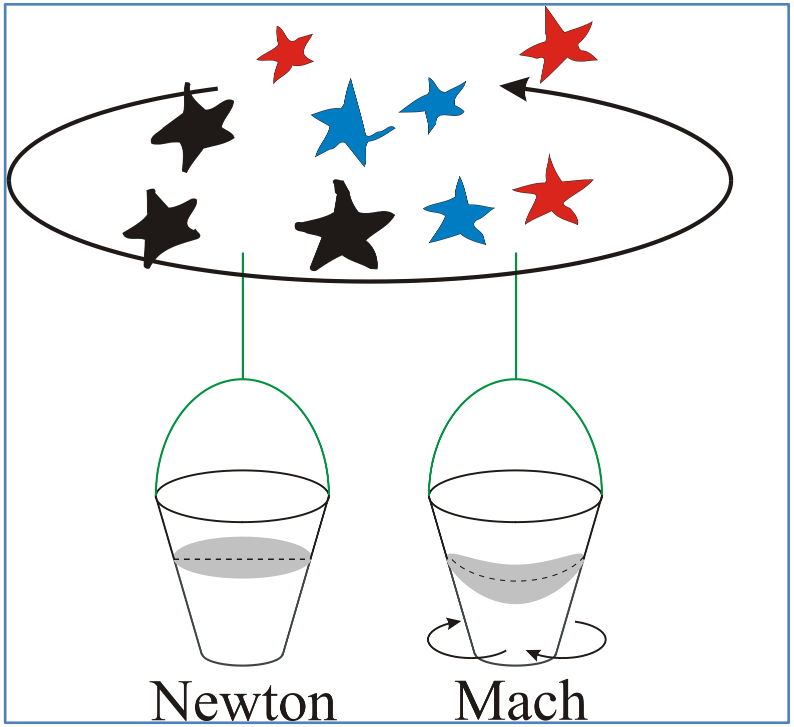


Per Newton conta l'accelerazione ***assoluta***.

Ciò che conta è il moto rispetto dell'acqua rispetto allo spazio esterno (*assoluto*), non rispetto al secchio (se fermo il secchio, la superficie dell'acqua resta concava, perché l'acqua continua a girare).

Il vero contenuto del primo principio è l'esistenza dello spazio assoluto (necessità ontologica più che logica). In qualche modo, non gli interessa che ciò sia vero anche in tutti i sistemi che traslano uniformemente rispetto a esso.

Già dopo 20 anni, il vescovo *Berkeley* criticava questa posizione: lo spazio assoluto non serve se non è osservabile.
In uno spazio con un solo corpo, non ha senso parlare di una rotazione: servono altri corpi, rispetto a cui la rotazione avviene: le stelle.
Dunque sono queste l'origine del fenomeno osservato alla superficie dell'acqua.



Dopo un secolo, *Mach* (e dopo altri 30 anni, *Einstein*).

Newton si convince anche dell’esistenza di un tempo assoluto, legato a moti periodici sempre *più regolari*:

“Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato *durata*. Quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo …”

“Tutti i movimenti possono essere accelerati o ritardati, ma il flusso del tempo assoluto non può essere mutato.”

Nel frattempo, nello studio dei fenomeni ottici, si contrapponevano due tipi di modelli: quello corpuscolare e quello ondulatorio.
L’osservazione di fenomeni di interferenza determinò la scelta del secondo, e di conseguenza la necessità di un mezzo adeguato, che doveva permeare tutto l’Universo (luce dalle stelle): ***l’etere cosmico***.

Le onde

Suono, luce, onde radio, onde sismiche ...

Tutte: ***perturbazione*** di una proprietà fisica (rispetto a una situazione di equilibrio), con origine in una ***sorgente***.

La velocità di propagazione dipende dalle caratteristiche del mezzo: elasticità, densità ...

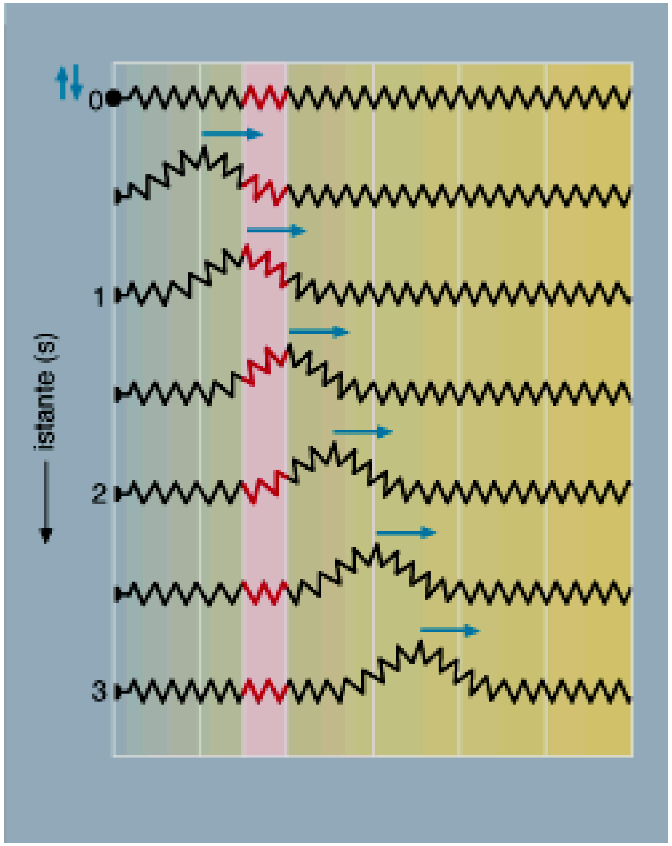
Meccaniche: oscillazioni del ***mezzo*** in cui si propagano

Elettromagnetiche: oscillazioni del ***campo*** ELM.

La propagazione della perturbazione implica propagazione dell'informazione: voci, immagini …

Non **trasportano** materia ma **energia**
(quantità di moto, momento angolare)

Obbediscono alla stessa equazione differenziale.



Moto (per es. della Terra) attraverso l'etere: moto assoluto. Nei fenomeni ondulatori, la velocità dell'onda (in questo caso rispetto all'etere) dipende solo dal tipo di mezzo, e dal moto dell'osservatore rispetto al mezzo.

Ad esempio, in una corda elastica $v_{corda} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Nel caso del suono in aria $v_{suono\,(aria)} \approx \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

Lungo tutto il XIX secolo, ricerca di questo ipotetico mezzo.

Un modo: evidenziare il moto della Terra rispetto all'etere.
Il modello: se nell'aria c'è del vento, la velocità del suono rispetto all'osservatore cambia:

$$v_{suono}^{con\,vento} \text{ varia fra } V_{suono}^{senza\,vento} \pm v_{vento}$$

Allo stesso modo, se la Terra si muove nell'etere:

$$v_{luce} \text{ varia fra } c \pm v_{TE}$$

velocità della Terra rispetto all'Etere

Con qualche aggiustamento ad hoc:
per esempio, il trascinamento (totale o parziale).
Per mettere d'accordo tutte le evidenze sperimentali, l'etere avrebbe dovuto essere, allo stesso tempo, molto rarefatto e molto denso (e magari simile a un solido).

Con le equazioni di Maxwell (intorno al 1873): l'interazione elettromagnetica si propaga per onde, a velocità finita; tale velocità sta dentro le equazioni.

Senza cariche e correnti (***spazio libero***):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} \\ \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \right) \nabla^2 f = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Equazione delle onde classiche (di *D'Alembert*):

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad \left[\upsilon = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \,\text{m/s nel vuoto} \right]$$

Assumendo $v_{TE} \approx v_{rivoluzione} \approx 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

esperimenti basati sulla misurazione del rapporto $\frac{v_{TE}}{v_{luce}} \approx 10^{-4}$
sarebbero stati molto difficili.

Perché non utilizzare l'interferenza?

Interferenza delle onde EM

Consideriamo un mezzo isotropo, omogeneo.

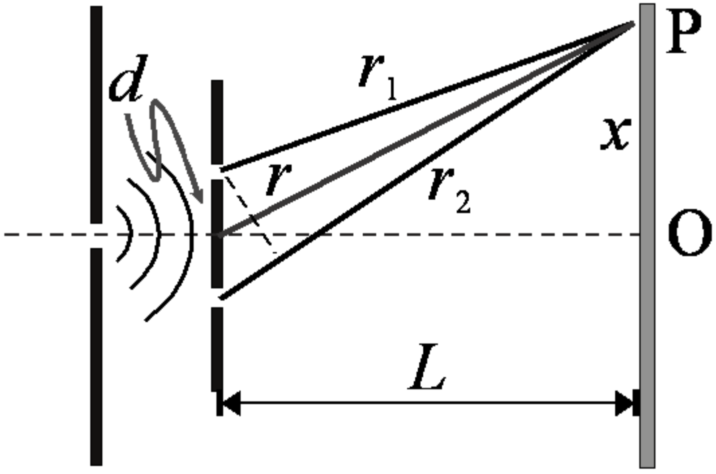
Due onde sovrapposte: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \Rightarrow E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$

$$\Rightarrow \langle I \rangle = \frac{\langle E_1^2 \rangle}{Z} + \frac{\langle E_2^2 \rangle}{Z} + 2\frac{\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle}{Z} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle I_{12} \rangle$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$\langle I_{12} \rangle = 2\frac{\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle}{Z}$ è il termine di interferenza

Se le onde sono piane e sono coerenti (stessa ampiezza):



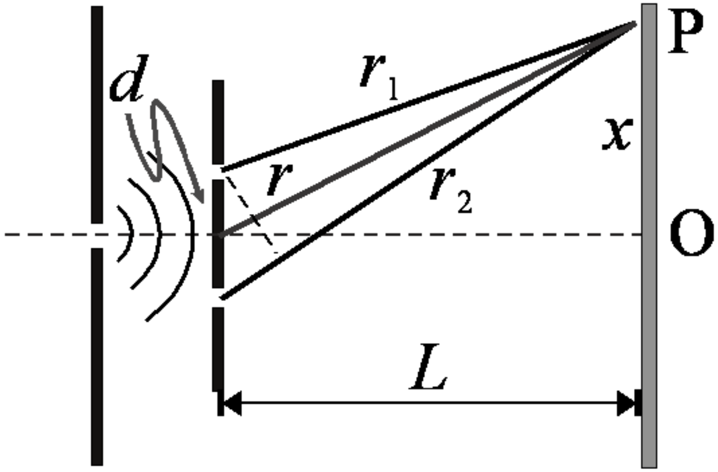
$$\begin{cases} E_1 = A\sin\ \varphi_1 \\ E_2 = A\sin\ \varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2\cos\delta} \\ \delta = \varphi_2 - \varphi_1 = k\ \ r_2 - r_1 \end{cases}$$

differenza di cammino

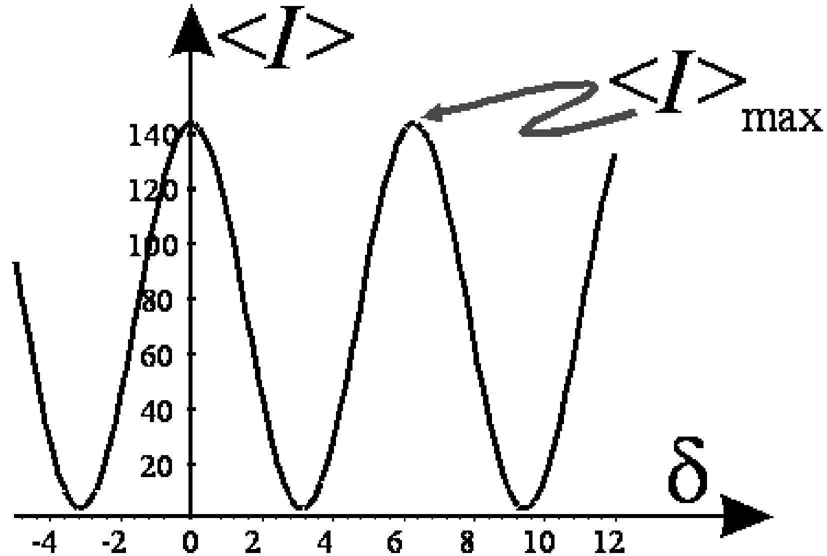
$$\Rightarrow \langle I \rangle = \frac{2A^2\ \ 1+\cos\delta}{2Z} =$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$= 2\langle I_1 \rangle\ \ 1+\cos\delta \qquad = 4\langle I_1 \rangle \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



$$\langle I \rangle = 4\langle I_1 \rangle \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$



$$\text{max} \quad r_2 - r_1 = n\lambda$$

$$\text{min} \quad r_2 - r_1 = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

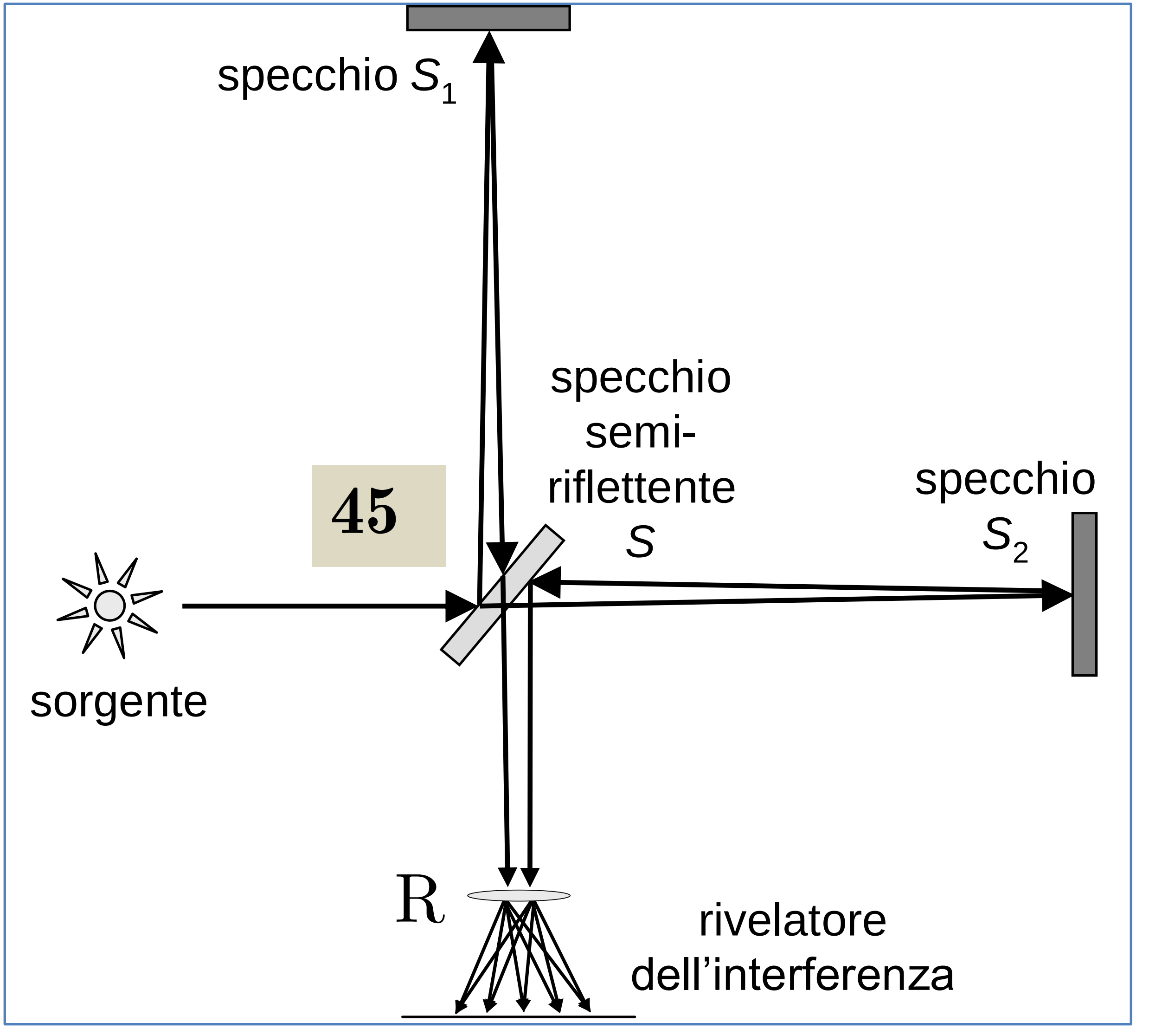
$$\begin{cases} d = 0{,}5\ \text{mm} \\ L = 2\ \text{m} \\ \lambda = 0{,}5\ \mu\text{m} \end{cases} \Rightarrow \ x = 1\ \text{mm}$$

(per 2)

Esperimento di Michelson-Morley

Misurare il tempo impiegato dalla luce a percorrere una distanza nota.

Se l'apparato è fermo rispetto all'etere, osservo interferenza costruttiva in R (cammini S-S1-S e S-S_2-S)

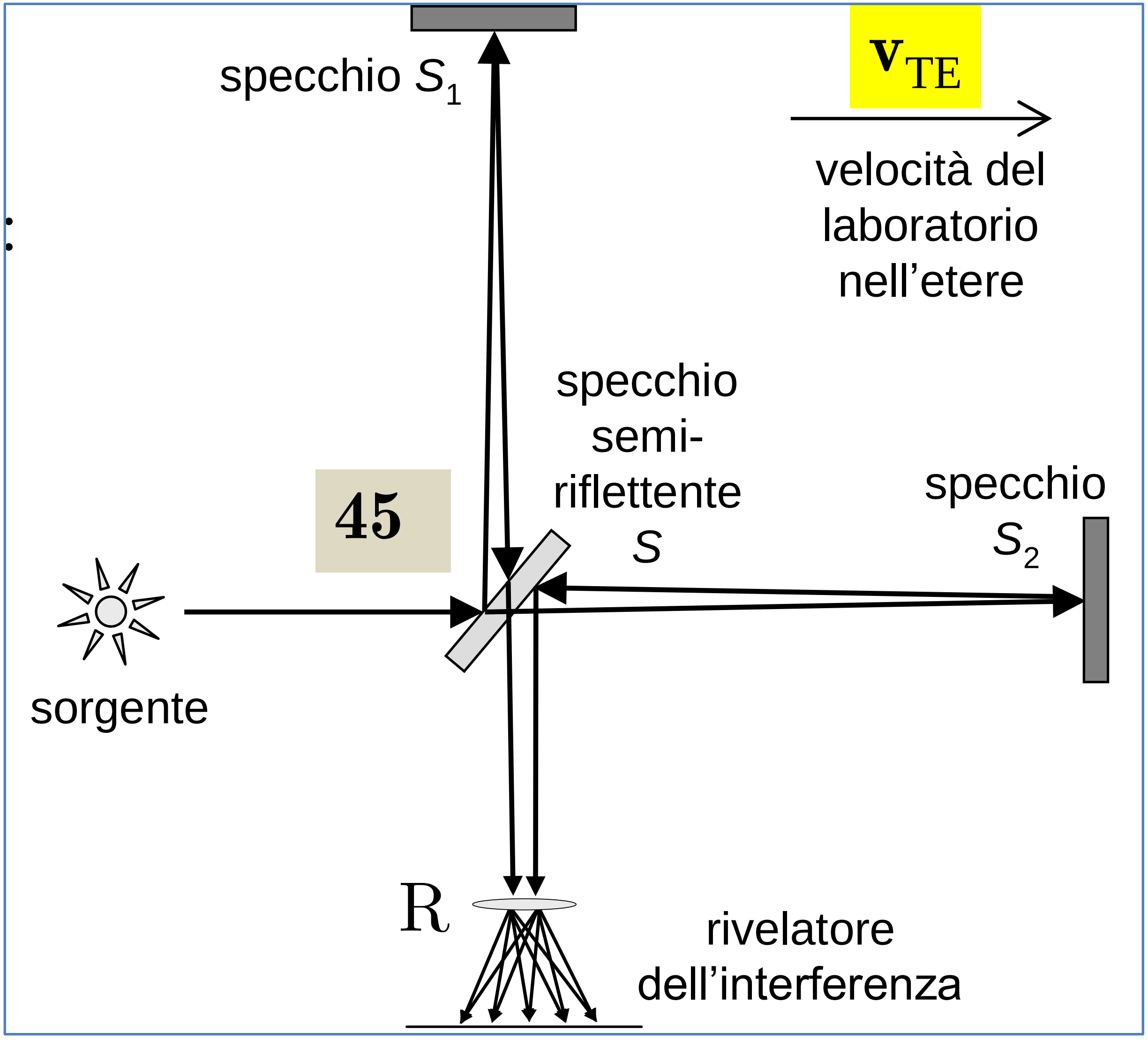


Se l'apparato si muove con velocità $\mathbf{v}_{\mathrm{TE}}$ rispetto all'etere:

$v = c \mp v_{TE}$

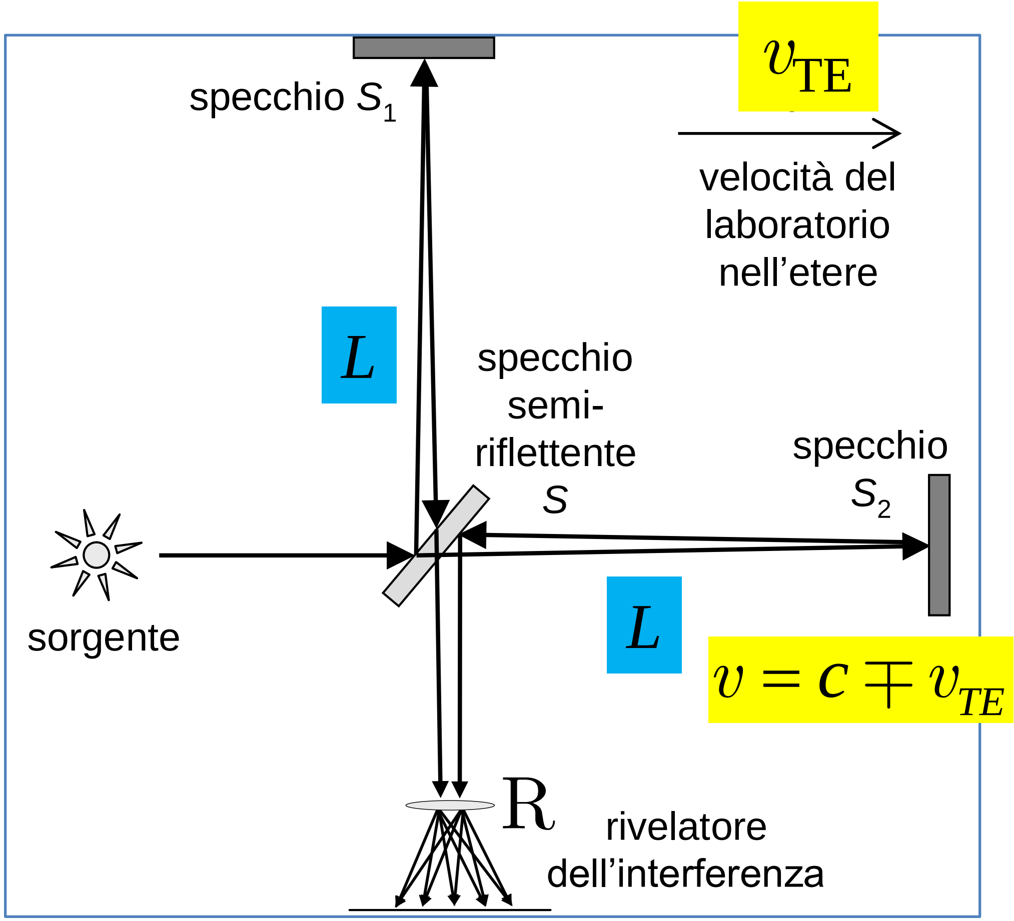
I tempi di percorrenza sono diversi:

$$\Delta t_{S-S_1-S} \neq \Delta t_{S-S_2-S}$$



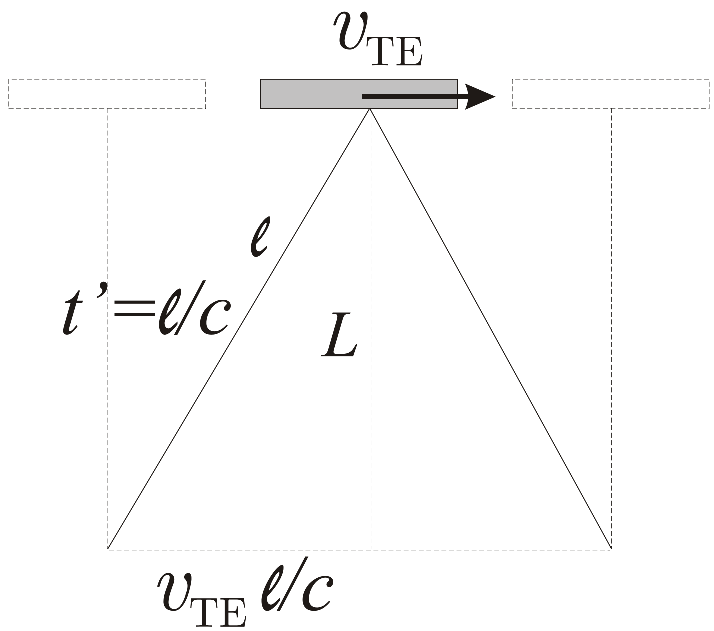
$$\Delta t_{S-S_2-S} = \frac{L}{c - v_{TE}} + \frac{L}{c + v_{TE}} =$$

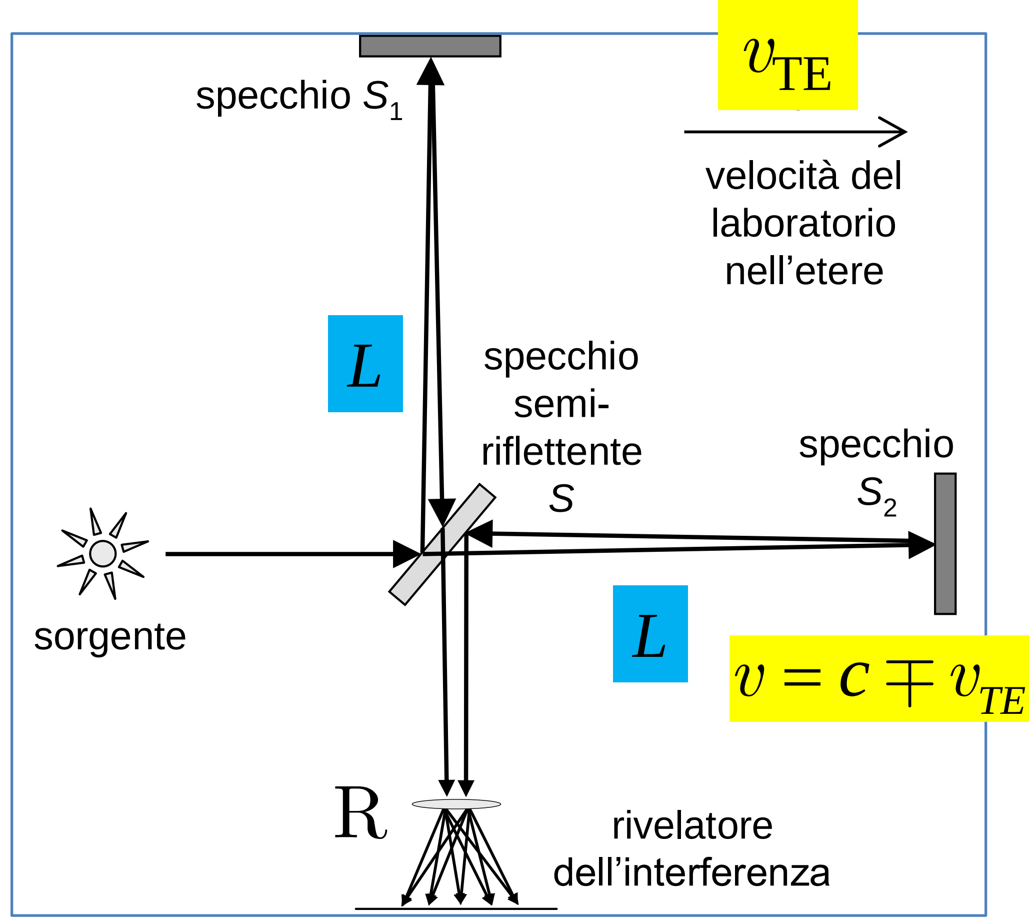
$$= 2L\frac{c}{c^2 - v_{TE}^2}$$



$$\Rightarrow \Delta s_2 \quad assoluto \quad = c\,2L\frac{c}{c^2 - v_{TE}^2} = 2L\frac{c^2}{c^2 - v_{TE}^2} = 2L\left(1 - \frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Calcoliamo ΔS_1





$$\ell^2 = L^2 + \left(v_{TE} \frac{\ell}{c} \right)^2$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v_{TE}^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta s_1 \ \ assoluto \ = 2L \left(1 - \frac{v_{TE}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \Delta \quad fra\, i\, due\, percorsi \; = 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-1} - 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong$$

$$\cong 2L\left(1+\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right) - 2L\left(1+\frac{v_{TE}^2}{2c^2}\right) = L\frac{v_{TE}^2}{c^2}$$

Se si ripete ruotando l'apparato di 90 :

$$\Delta' \quad fra\, i\, due\, percorsi \; = 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-1} \cong$$

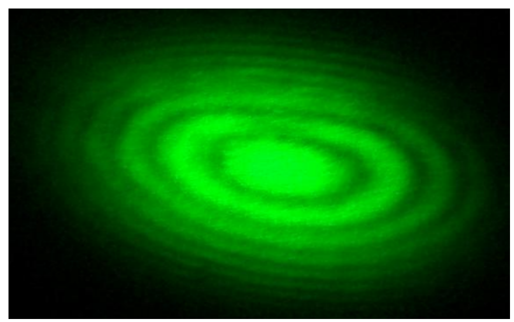
$$\cong 2L\left(1+\frac{v_{TE}^2}{2c^2}\right) - 2L\left(1+\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right) = -L\frac{v_{TE}^2}{c^2}$$

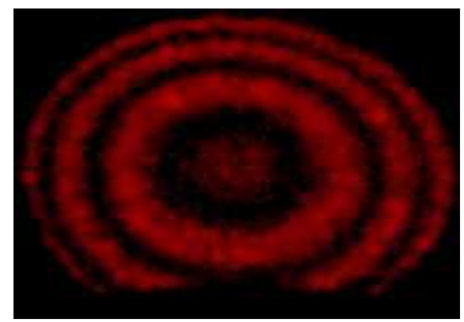
$$\Delta - \Delta' = L\frac{v_{TE}^2}{c^2} - \left(-L\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right) = 2L\frac{v_{TE}^2}{c^2}$$

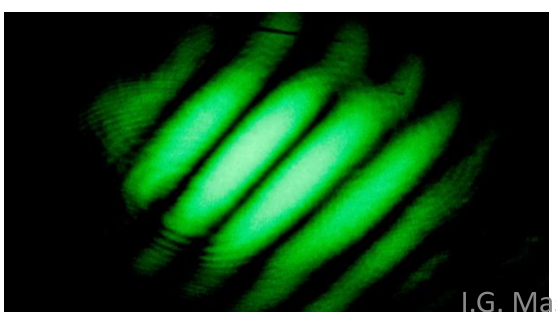
$$L = 10\text{ m} \Rightarrow \Delta = 2L\frac{v_{TE}^2}{c^2} \approx 20\left(\frac{30}{300000}\right)^2 \approx 20\cdot 10^{-8}$$

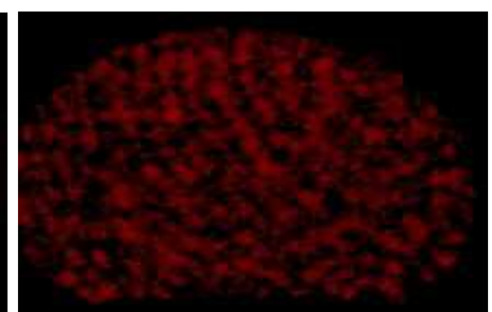
$$\lambda_{gialla} \approx 0{,}5\cdot 10^{-6}\text{ m} \Rightarrow n = \frac{\Delta}{\lambda} \approx \frac{20\cdot 10^{-8}}{0{,}5\cdot 10^{-6}} \approx 0{,}4\text{ frange}$$

Lo spostamento risultò nullo, a meno di una parte su 40. Ad oggi si è verificato che le velocità nei due sensi differiscono di meno di 1/1000 della velocità orbitale della Terra.









Gli autori conclusero di ritenere “ragionevolmente sicuro che se c’era moto relativo fra la Terra e l’etere, esso doveva essere piccolo”. Dopodiché si dedicarono ad altro!

Lo svuotamento del ruolo della concezione meccanicistica: forse non era pensabile (come invece aveva sostenuto Laplace) che, conoscendo in un qualsiasi istante velocità e posizione di tutte le particelle esistenti nel mondo, si potesse conoscere esattamente tutto il passato e tutto il futuro!

Verso la fine del XIX secolo, Ernst Mach riprendeva e rafforzava l’approccio di Berkeley sullo spazio assoluto (secchio). L’unica cosa che conta è il moto relativo rispetto alle stelle: gli effetti “inerziali” sono quindi un risultato dell’azione delle stelle lontane, e cioè effetti gravitazionali!

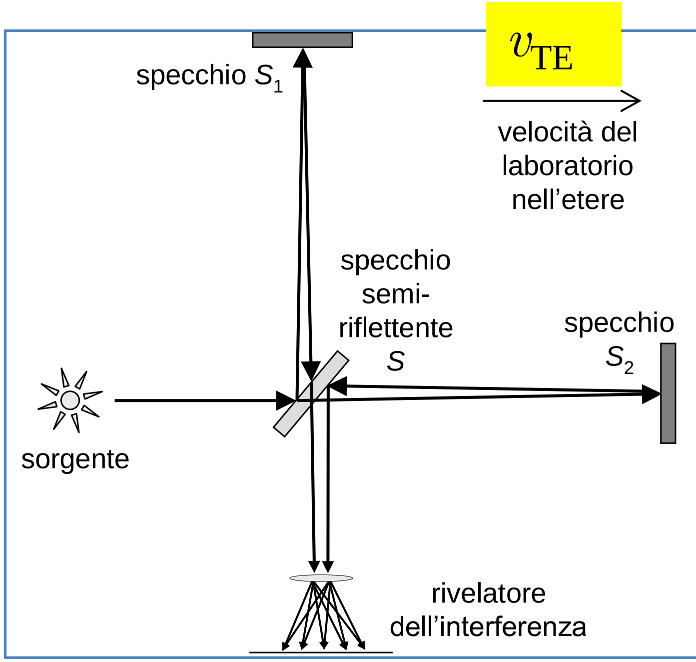
Le teorie prerelativistiche

Pur partendo dagli stessi dati sperimentali, autori diversi propongono ipotesi interpretative diverse.
Lorentz, in particolare, cerca di trovare una sintesi fra la natura "granulare" dell'elettrone (portatore della unità di carica elettrica) e la rappresentazione ondulatoria (equazioni di Maxwell).
Per Lorentz l'etere non ha la struttura della materia ordinaria: è soltanto la sede dei fenomeni elettromagnetici.
Per spiegare i risultati dell'esperimento di Michelson-Morley basta supporre che i corpi in moto rispetto all'etere subiscano una contrazione di un fattore

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta \quad fra\, i\, due\, percorsi \; = 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-1} - 2L\left(1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

diventa nulla se L diventa $L\sqrt{1-\frac{v_{TE}^2}{c^2}}$



Inoltre, Lorentz si trova in qualche modo costretto a superare le trasformazioni di Galileo e a definire un ***tempo locale***:
" … ma non pensai mai che questo avesse a che fare col tempo reale".
Le variabili (spaziali e temporali) delle trasformazioni di Lorentz erano variabili fittizie, atte a facilitare certi conti.

"Consideravo la mia trasformazione del tempo solo come un'ipotesi di lavoro euristica, di modo che la teoria della relatività è davvero solo opera di Einstein".

Einstein

La tendenza prerelativistica è dunque quella di accettare che la luce si comporti diversamente da quanto osservato nei fenomeni meccanici (in regola con le trasformazioni di Galileo e con l'esistenza di spazio e tempo ***assoluti***): la velocità della luce è sempre la stessa nei diversi sistemi inerziali.

Einstein cambia totalmente lo scenario, assumendo come punti di partenza (***Principi***) i risultati delle osservazioni sperimentali.

In particolare: non esiste prova sperimentale dell'esistenza dell'etere; dunque, *non esiste un sistema di riferimento assoluto*.

Viene riaffermato, e anzi ampliato, il Principio di relatività galileiana:

1) i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti: **tutte** le leggi della Fisica hanno la stessa forma in ogni riferimento inerziale.

In altre parole: qualsiasi esperimento fornisce gli stessi risultati, quando venga eseguito in riferimenti ***inerziali*** diversi (non solo gli esperimenti di meccanica!).

Inoltre, come gli esperimenti mostrano:

2) il modulo della velocità della luce nel vuoto è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali e non dipende dalla direzione di propagazione.

Dunque $c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s è una costante fondamentale della natura.

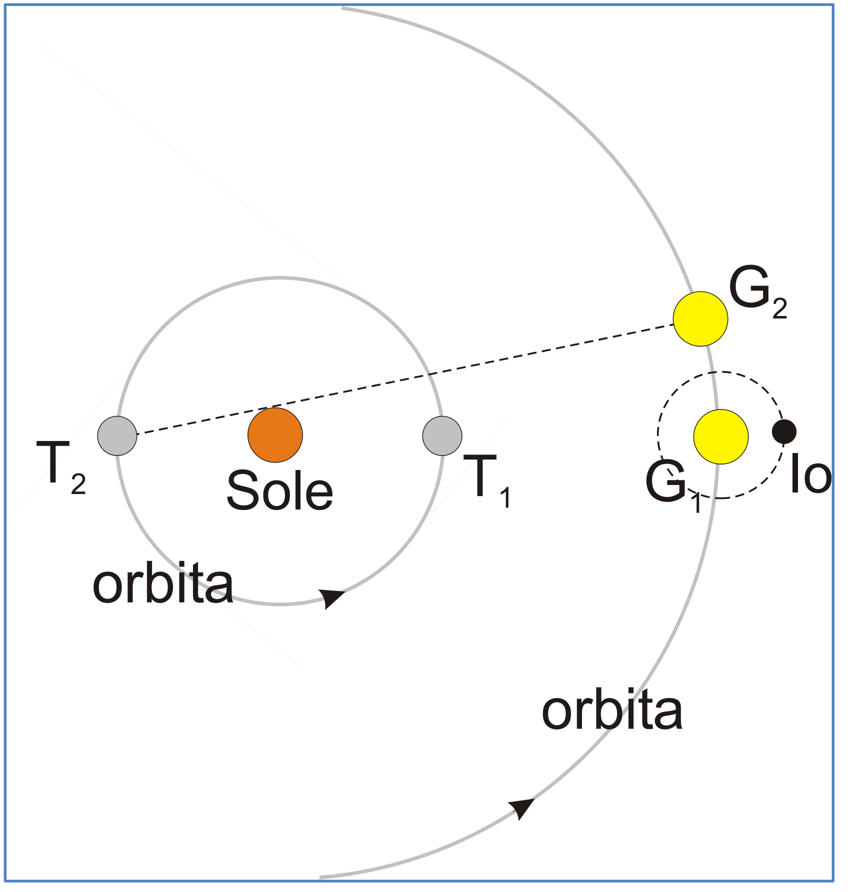
Si deve rinunciare così alla legge classica di composizione delle velocità **v** = **v**' + **v*** , e dunque alle trasformazioni di Galileo.
Ma, se è vero che nella vita di tutti i giorni le trasformazioni di Galileo funzionano benissimo, le nuove trasformazioni (di Lorentz) dovranno ricondursi a quelle come caso particolare.
Il terzo Principio della dinamica, invece, continuerà a valere.
Va osservato che tutte le analisi ampliate ai sistemi di R. non inerziali (relatività generale) suggeriscono che il modulo della velocità della luce nel vuoto sia ancora *c*.

Importante: la *definizione operativa* delle grandezze fisiche.

Velocità della luce: metodo astronomico (Römer)

Un satellite di Giove (Io) rivoluziona (circa) sullo stesso piano di Giove rispetto al Sole.

Il tempo che passa fra due eclissi successive è diverso se la Terra è più o meno lontana da Giove: e quindi dipende dalla velocità della luce.

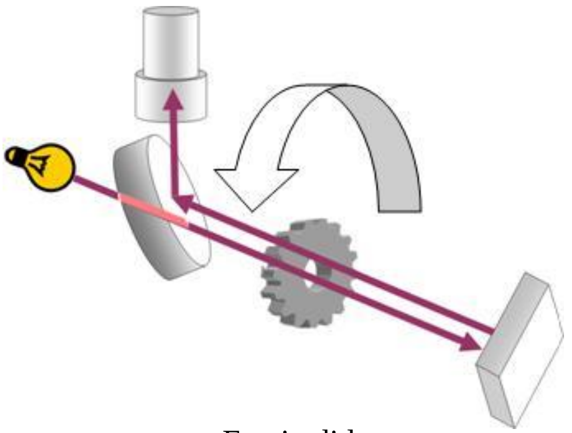


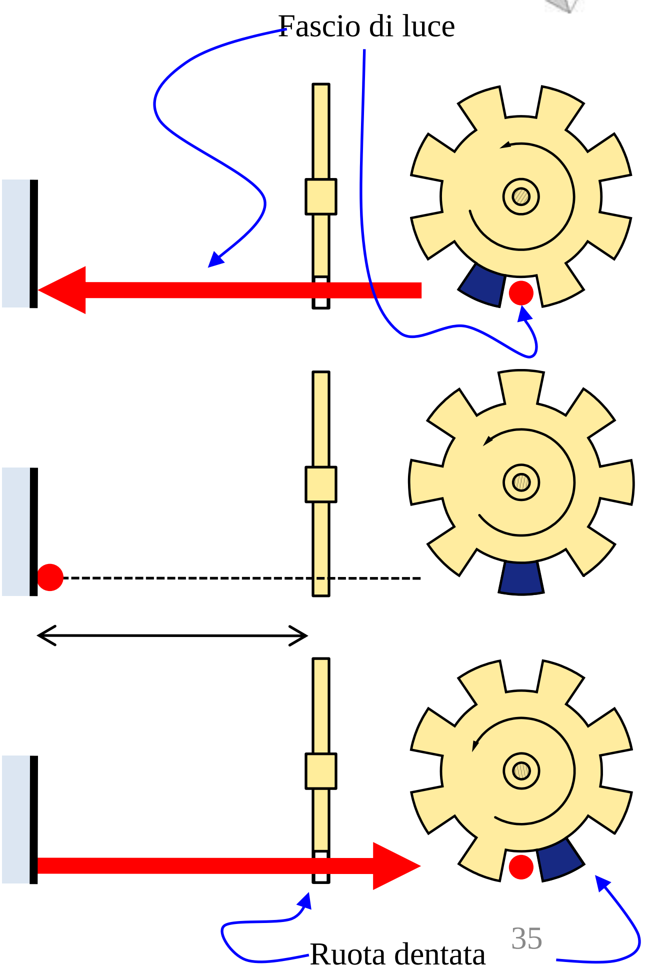
Dalle osservazioni: circa 11 minuti per percorrere un raggio dell'orbita terrestre ($\approx 1{,}5\ 10^8$ km), da cui ricavò $c = 2{,}8\ 10^8$ m/s.

L'esperimento di Fizeau

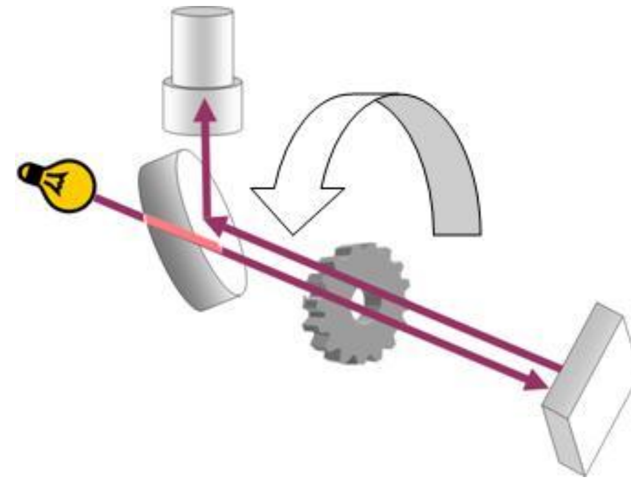
- Prima misura non astronomica della velocità della luce nell'aria:

  Fizeau nel **1849**.
- Ruota dentata rotante (con *n* denti e vani uguali ed equidistanti)
- La luce attraversa la **ruota dentata**, percorre una **distanza *L***, si riflette su di uno **specchio**, percorre nuovamente una **distanza *L*** e passa nuovamente attraverso la **ruota dentata**.
- Se la ruota non gira: luce (o buio) stabile.





- Facciamo ruotare, aumentando gradatamente la velocità angolare.



- Buio: $t_1 = \frac{1}{2n}T \Rightarrow v = \frac{2L}{t_1}$
- Luce successiva: $t_2 = \frac{2}{2n}T \Rightarrow v = \frac{2L}{t_2}$

E così via.

Ordini di grandezza: $\begin{cases} n = 500 \\ L = 15 \text{ km} \end{cases} \Rightarrow T \approx 0{,}1\text{s} \Rightarrow \nu \approx 10 \ \frac{\text{giri}}{\text{s}}$

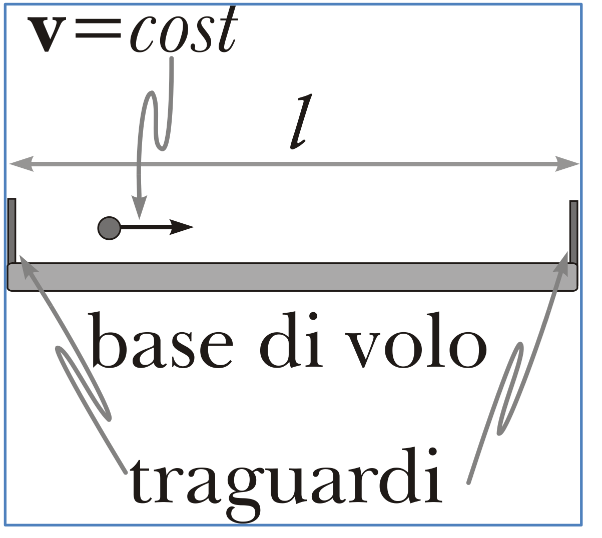
Fizeau misurò su una distanza L = 8633 m e ottenne:

$$c = \ 3{,}155 \pm 0{,}005 \ \times 10^8 \text{ m/s}$$

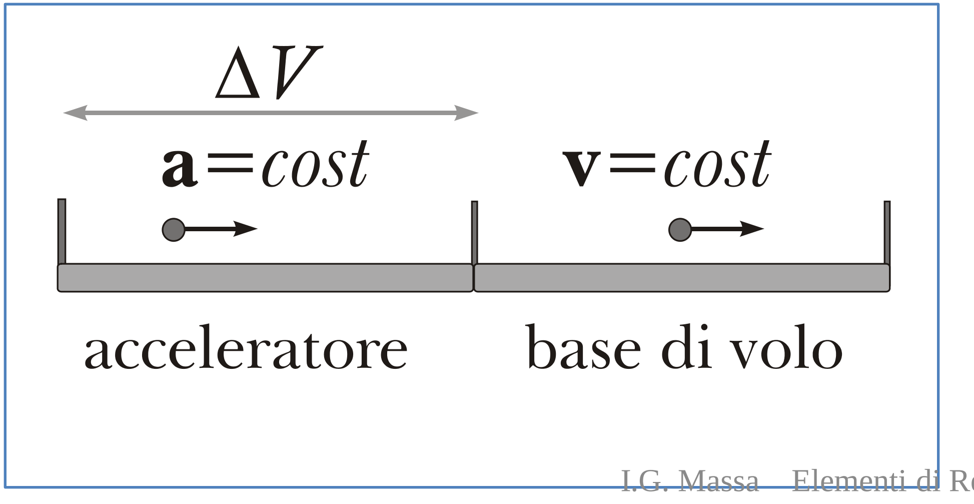
La velocità limite

È un fatto sperimentale che c è anche la velocità massima con cui si può inviare un segnale.

Consideriamo una misura di tempo di volo: essa sfrutta la definizione stessa di velocità.



Per raggiungere velocità molto alte: particelle elementari (elettroni).



$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

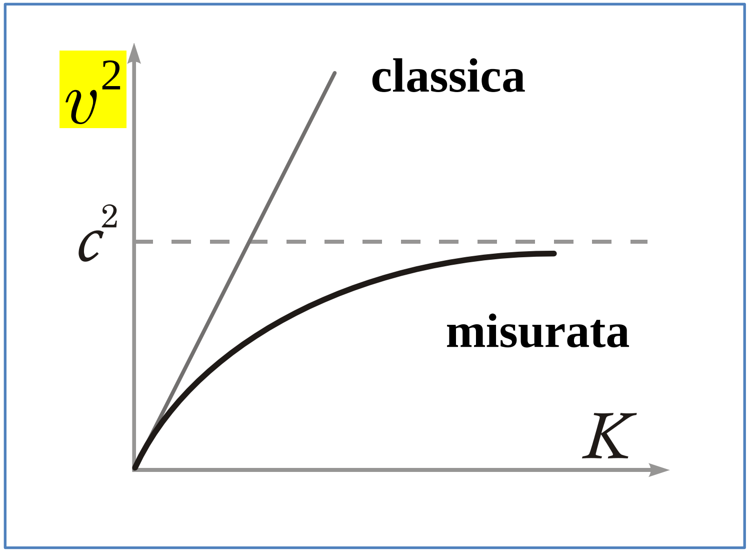
$$\begin{cases} q \\ \Delta V \end{cases} \Rightarrow K = q\,\Delta V = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \equiv \sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}}$$

Dunque ottengo v in due modi:

- utilizzando la definizione di velocità (media)
- dalla relazione classica dell'energia cinetica.

Un esperimento del 1963 (elettroni)

K	Δt	$v_1 = \sqrt{2K/m}$	$v_2 = l/\Delta t$	v_2/c
(MeV)	(10^{-9} s)	(10^8 m/s)	(10^8 m/s)	
0,5	32,3	4,19	2,60	0,87
1,0	30,8	5,94	2,73	0,91
1,5	29,2	7,28	2,88	0,96
4,5	28,4	12,60	2,96	0,99
15,0	28,0	23,00	$\approx$ 3,00	$\approx$ 1,00



classicamente $v^2 = \dfrac{2K}{m} \propto K$

Si può misurare K, che è corretta (si trasforma in calore, frenando gli elettroni alla fine del percorso).

Quindi:

- o la relazione fra v e K non è valida a velocità elevate

  cioè $K \neq \dfrac{1}{2} m v^2$

- oppure $K = \dfrac{1}{2} m v^2$, ma la massa cambia valore con la velocità.

- in ogni caso, c è la ***massima velocità*** per un segnale (proprietà che permane anche nei sistemi di riferimento non inerziali).

L'esistenza di una velocità limite contrasta con il senso comune?

E il secondo Principio, che non va d'accordo con l'esperienza quotidiana della composizione delle velocità?

E invece, la prima proprietà implica la seconda.

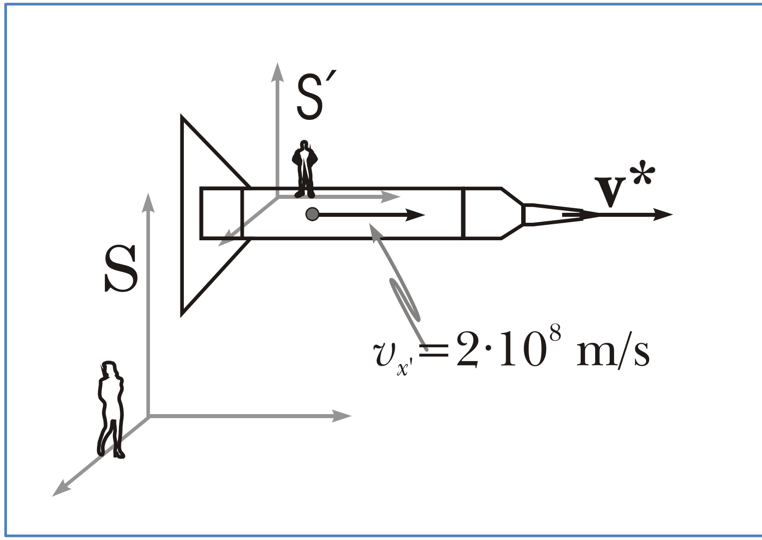
Ripetiamo l'esperimento con gli elettroni entro un razzo.

Ci aspettiamo una velocità limite?

Se sì, la stessa che a Terra (c)?

$$\begin{cases} v^* = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ v' = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v_{Terra} = 4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

maggiore della velocità limite sulla Terra.



Se ne viene fuori solo assumendo che le velocità si compongono in modo diverso.

Per esempio, la relazione $v = \dfrac{v^* + v'}{1 + \dfrac{v^* v'}{c^2}}$ funziona.

Infatti, se almeno una delle due è *c*: $v = \dfrac{v^* + c}{1 + \dfrac{v^* c}{c^2}} = \dfrac{v^* + c}{1 + \dfrac{v^*}{c}} = c$

Utilizziamo come riferimento un treno che si muove a $v^* = 100\,\mathrm{km/h}$; dentro il treno, un viaggiatore corre a $v' = 50\,\mathrm{km/h}$ nello stesso verso.

In questo caso, il termine correttivo è

$$\frac{v' v^*}{c^2} \approx \frac{50 \cdot 100}{{10^9}^{\;2}} = 5 \cdot 10^{-15} << 1 \qquad \Longrightarrow \; v = v^* + v'$$

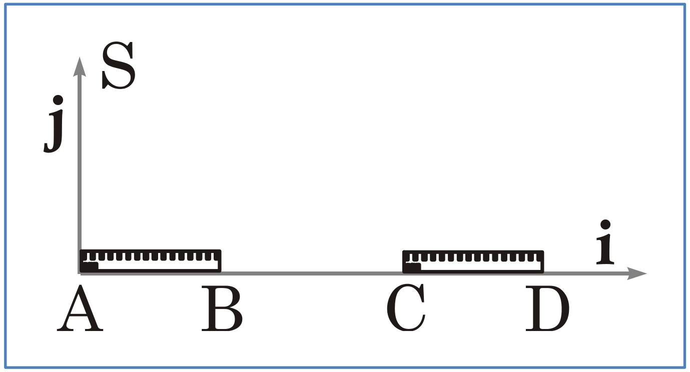
Cioè: se la velocità limite è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, allora essa vale *c*.

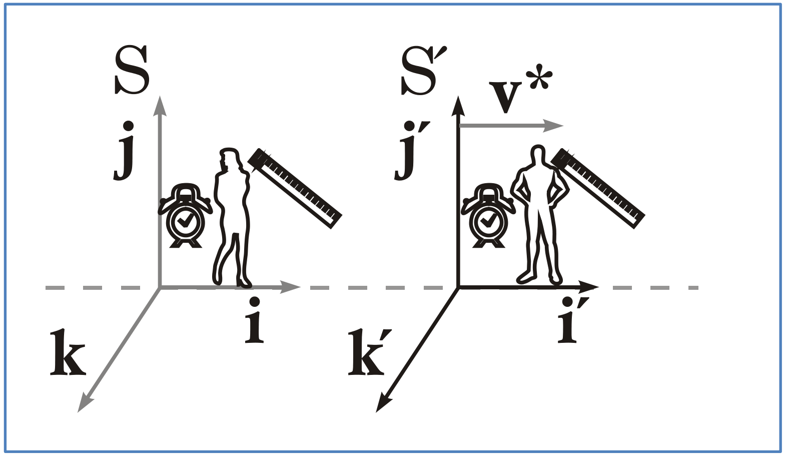
In qualche modo, il fatto rivoluzionario della relatività sta proprio nell'esistenza di una velocità limite.

È da questo che dipendono gli effetti non comuni su intervalli di spazio e di tempo.

Revisione dei concetti di spazio e di tempo

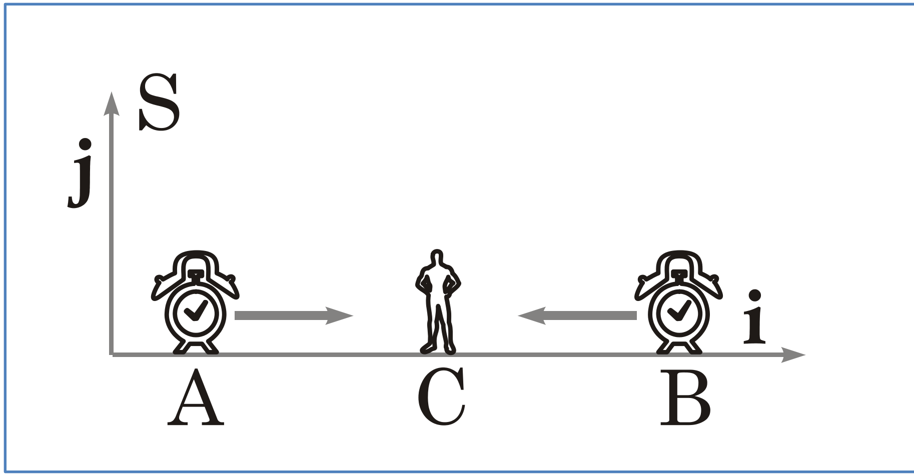
Osservatore, orologi, regoli ***propri***.





Due regoli uguali, restano tali se spostati?

Possiamo utilizzare la costanza di *c*: misurare i tempi impiegati ad andare da A(C) a B(D).



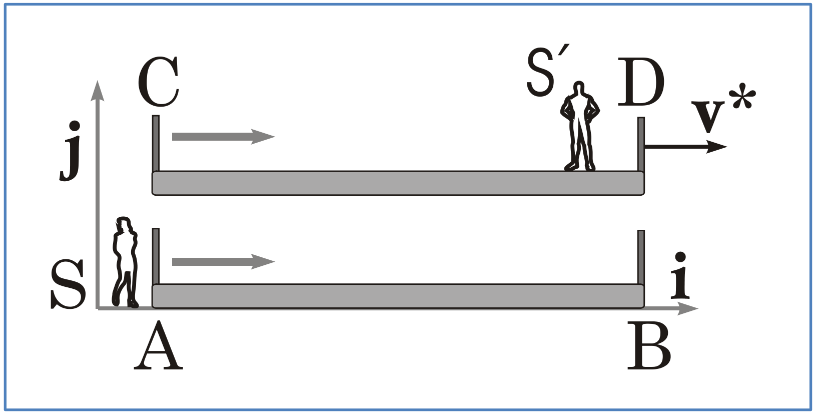
Ma gli orologi in A, B, C, D sono sincronizzati?

Di nuovo, utilizziamo *c*.

E poi ancora, per confrontare AB con CD.

E se il regolo non è fermo?

Le posizioni degli estremi vanno determinate ***simultaneamente***.



Separatamente, due basi di volo uguali da ferme mantengono le stesse lunghezze (proprie) anche in traslazione uniforme (Principio di relatività):

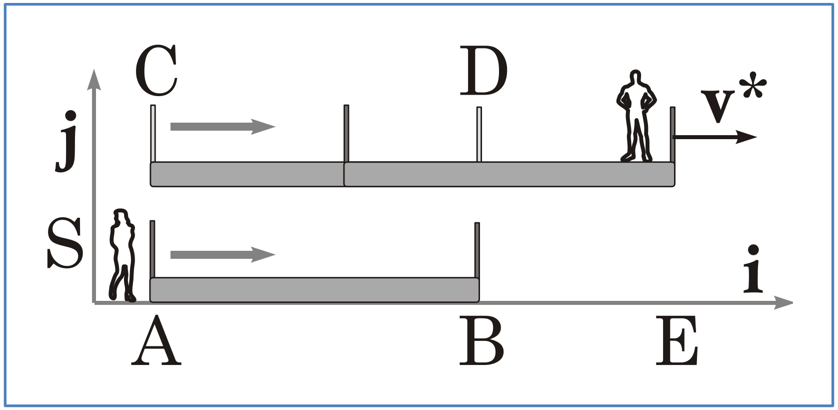
$$\begin{cases} \Delta t = \dfrac{AB}{c} \\ \Delta t' = \dfrac{CD}{c} \end{cases}$$

$$AB = CD \Rightarrow \Delta t = \Delta t'$$

Ma nel sistema non proprio?

$AE > AB$

$\Rightarrow$ deve essere $\Delta t' > \Delta t$



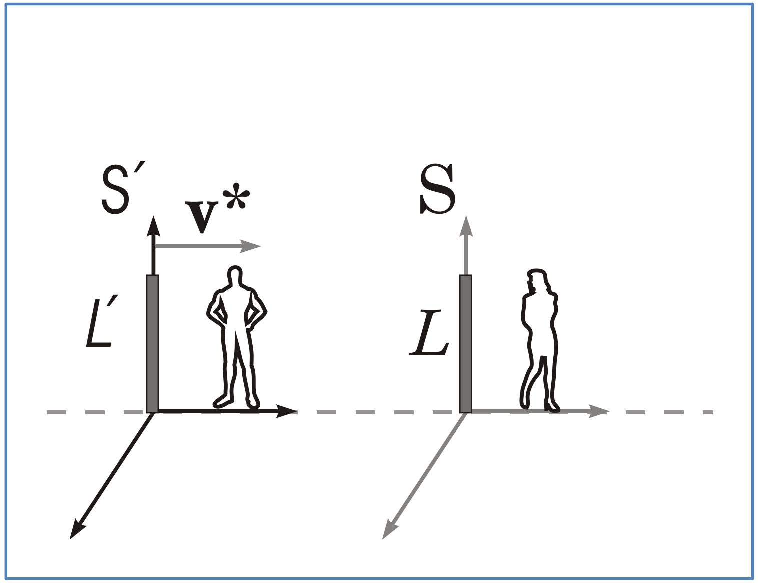
Dunque: le misurazioni dello stesso intervallo temporale, fatte nei diversi sistemi di riferimento (ambedue inerziali), ***danno risultati diversi***.

Per ora ***ammettiamo*** che i risultati di misurazioni di questo tipo ***possano*** essere diversi.

Ricaviamone le conseguenze, mantenendo fermi i due principi di Einstein e le proprietà di c.

Lunghezze trasversali

Se $L = L'$ quando sono fermi, saranno tali anche in moto relativo?



Semplice verifica sperimentale:

con due pennine, il regolo più corto lascerà un segno.

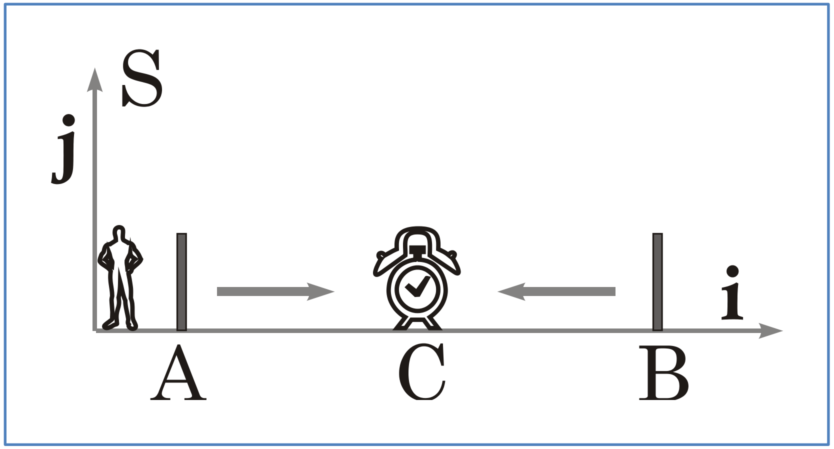
Dunque: le due lunghezze continuano a essere uguali, anche se osservate da un osservatore non proprio!

Simultaneità

Sincronizzazione di due orologi: richiede la misurazione di due ***intervalli*** di tempo.

Se i due orologi non sono vicini:

Definizione di simultaneità.



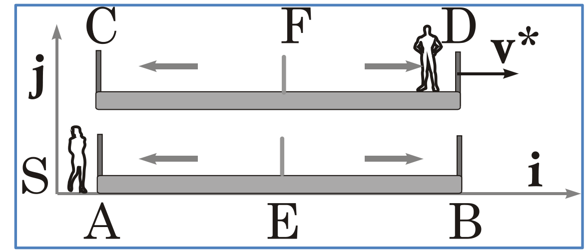
È il sistema utilizzato con gli

orologi atomici: hanno precisione relativa di una parte su 10^{16}.

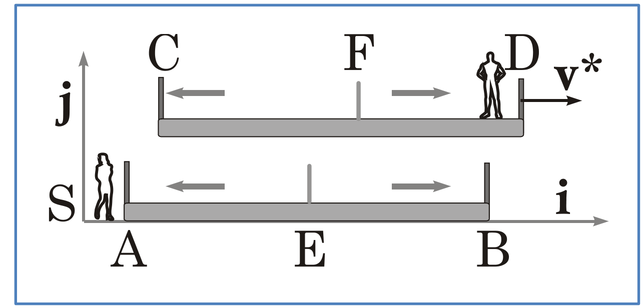
Ma già con un orologio elettronico:

la luce impiega 10^{-9} s, cioè 1 ns, per percorrere la distanza fra due orologi a 30 cm.

Per ciascuno dei due osservatori, separatamente, gli eventi sono simultanei.



Se invece l'osservatore S osserva quel che avviene in S'…



l'arrivo in C anticipa l'arrivo in D.

La simultaneità di due eventi non è assoluta: è relativa.

Evento: ciò che accade in un determinato punto, in un determinato istante di tempo.

Se l'osservatore di S calcola quando (t_1) e dove (x_1) si ha l'evento in C, e analogamente (t_2, x_2) in D, ottiene:

$$\Delta t = \frac{v^*}{c^2}\Delta x \quad \text{con} \quad \Delta x' \neq 0; \Delta t' = 0$$

Per S': in luoghi diversi, contemporaneamente.

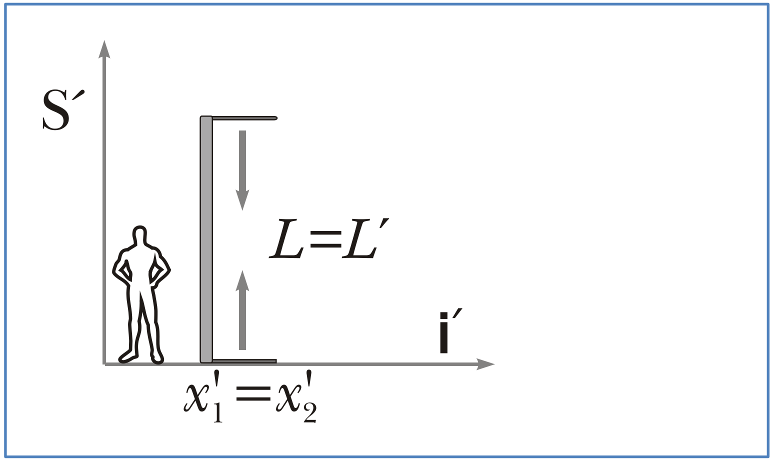
E anche $\quad \Delta t' = -\frac{v^*}{c^2}\Delta x' \quad \text{con} \quad \Delta x \neq 0; \Delta t = 0$

Si vedrà che la legge di trasformazione dei tempi cambia rispetto a Galileo, e coinvolge anche le coordinate spaziali;

di conseguenza, ne saranno coinvolte anche le lunghezze.

Orologi e dilatazione del tempo

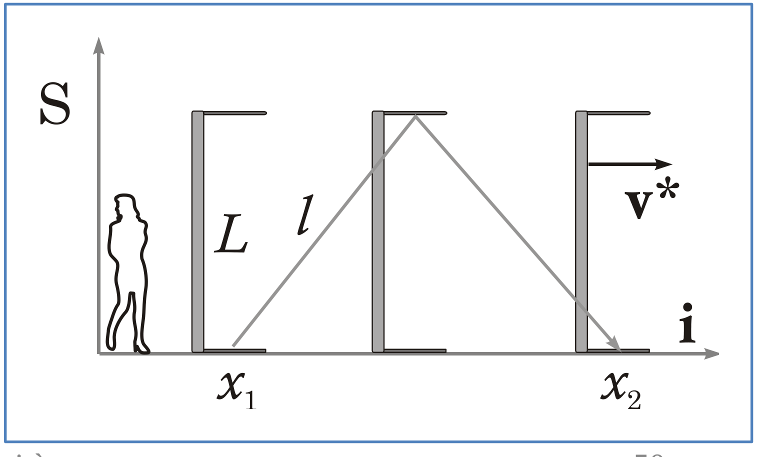
Un orologio che sfrutta le proprietà di *c*: un raggio luminoso oscilla fra due specchi.



Se il moto relativo è lungo *x*, la lunghezza trasversale è uguale per ambedue gli osservatori.

$$L = 15 \text{ cm} \;\Rightarrow\; T \approx 1 \text{ ns.}$$

$$\Delta t_p = \frac{2L'}{c} = \frac{2L}{c} \qquad \Delta x' = 0$$ basta 1 orologio

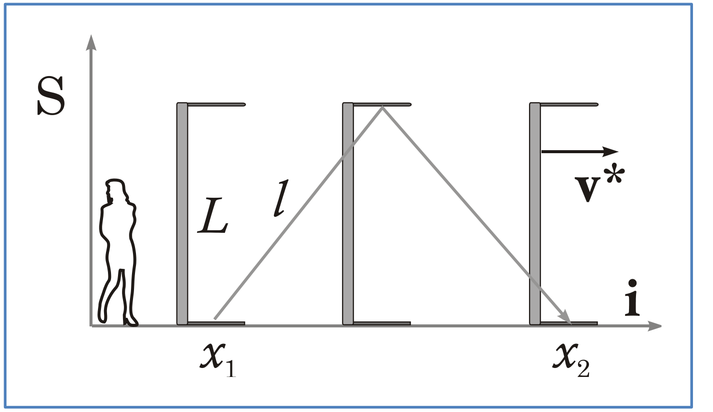


Per S gli eventi sono in punti diversi:

$$x_2 - x_1 = v^* \Delta t$$

Servono 2 orologi!

$$l = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + L^2} = \sqrt{\left(\frac{v^* \Delta t}{2}\right)^2 + L^2}$$

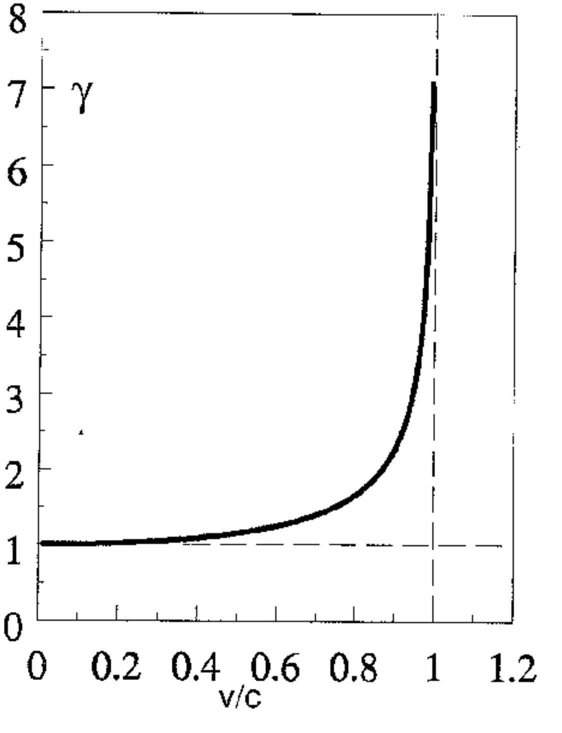


$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{v^* \Delta t}{2}\right)^2 + L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t^{\;2} = \frac{4L^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}} = \Delta t_p^{\;2} \frac{1}{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}$$

$$\text{con} \begin{cases} \beta = \dfrac{v^*}{c} & 0 \le \beta \le 1 \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \gamma \ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \, \Delta t_p$$



In pratica: l'orologio in moto ha l'unità (ns) dilatata, per cui ritarda rispetto agli orologi a riposo.

Per S, in S' il tempo scorre più lentamente (e viceversa!).

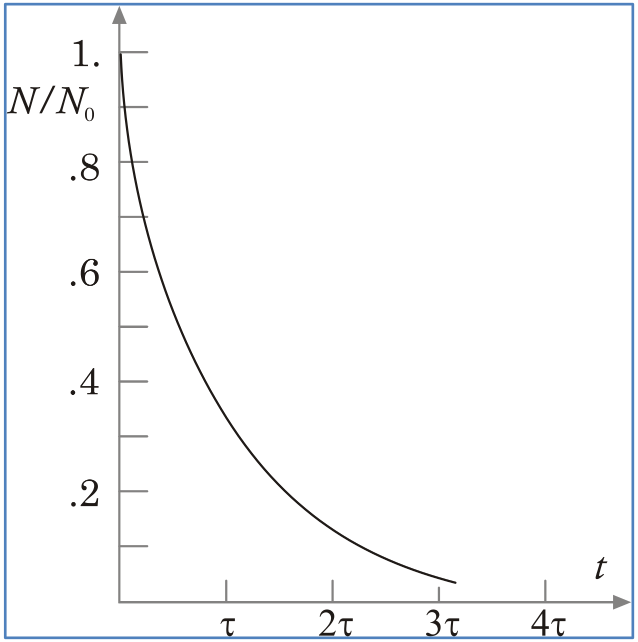
La legge che funziona per ambedue è:

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma\, \Delta t' \quad \text{per } \Delta x' = 0 \\ \Delta t' = \gamma\, \Delta t \quad \text{per } \Delta x = 0 \end{cases}$$

Ciò riguarda qualsiasi fenomeno naturale: il battito del polso, la velocità dei processi del pensiero, la crescita delle piante, l'invecchiamento, l'avanzare di una malattia …

Verifiche sperimentali

Si può utilizzare la legge del decadimento, verificata con altissima precisione:



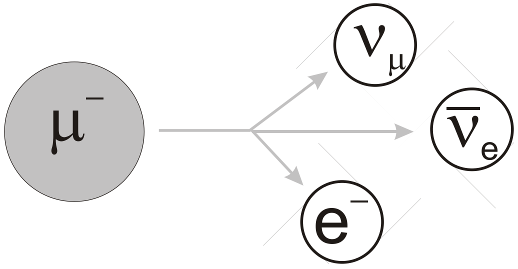
$$N(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$ τ è la vita media

Dopo τ il numero iniziale (N_0) diventa $N_0/2{,}72$;

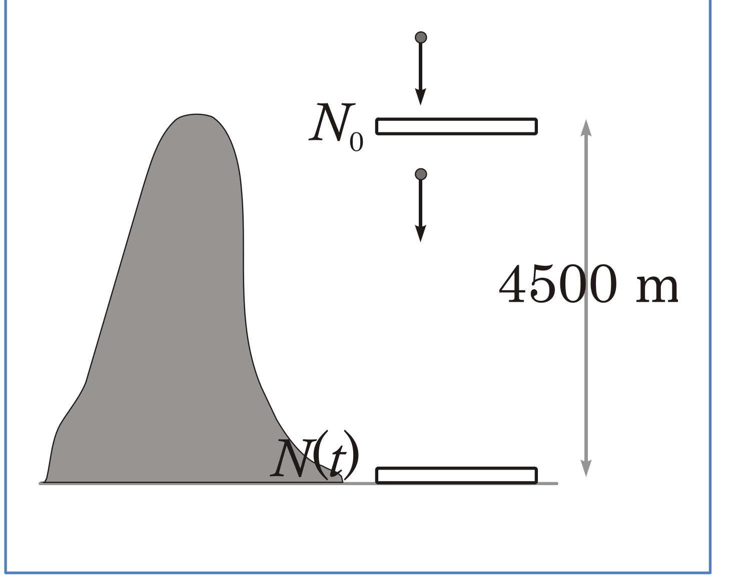
dopo 2τ diventa $N_0/2{,}72^2 = N_0/7{,}4$ …

Nel caso dei muoni (prodotti nella interazione fra raggi cosmici e atmosfera)

$$\tau_p \approx 2{,}2\ \mu\text{s}$$



Supponiamo 1000 muoni all'ora, a 4500 m di quota.



$$\Rightarrow \Delta t = \frac{4500}{0{,}995 \cdot c} \cong 15\ \mu s$$

$$\Rightarrow N_{classico}\ \Delta t\ = N_0\, e^{-\frac{15}{2{,}2}} \approx 10^{-3} N_0 = 1 \text{ all'ora}$$

Ma, rispetto all'osservatore a terra, l'intervallo temporale τ è dilatato di

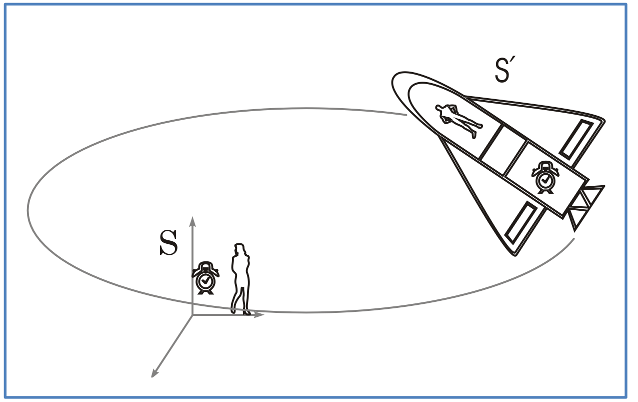
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0{,}995^2 c^2}{c^2}}} \approx 10$$

$$\Rightarrow N_{relativistico}\ \Delta t\ = N_0\, e^{-\frac{15}{22}} \approx 0{,}5 N_0 = 500 \text{ all'ora}$$

I risultati sperimentali corrispondono a questa previsione.

È interessante che la dilatazione del tempo si abbia anche con traiettorie curve, ma con modulo costante; oppure con accelerazioni molto limitate nel tempo. Ciò consente di utilizzare acceleratori circolari.

Paradosso dei gemelli



Come si può fare in modo di utilizzare un solo orologio anche in S?

Bisogna tornare indietro.

I due gemelli hanno 20 anni.

Uno si mette in viaggio a velocità (irrealistica!) $v^* = \frac{12}{13}c$

Quando torna, sulla Terra sono passati 52 anni:
lei ha ora 72 anni; e il fratello?

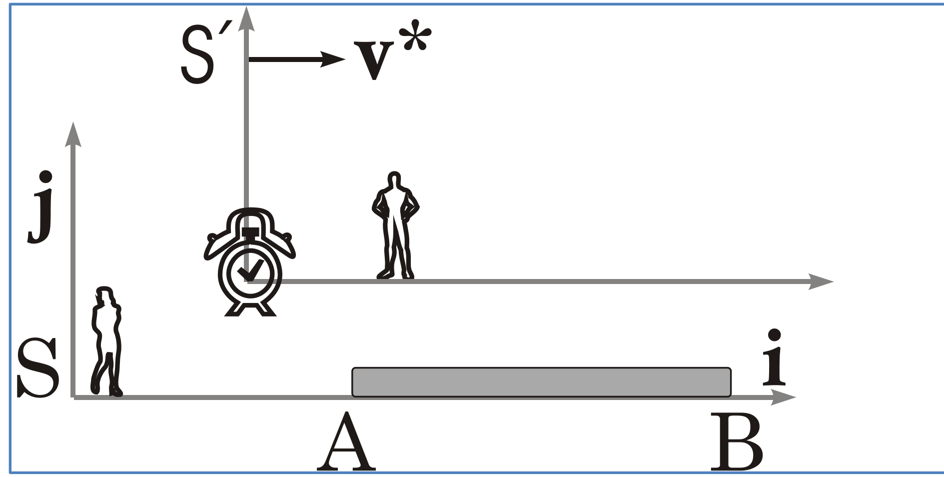
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} = 2,6$$

Il fratello ha $20 + \frac{52}{2,6} = 40$ anni

Cosa c'è di paradossale?

Contrazione delle lunghezze (longitudinali)

Si è già visto che lunghezze e intervalli di tempo sono strettamente correlati.



Misuriamo la lunghezza tramite il tempo impiegato dall'orologio a percorrere AB, fermo in S.

In S: l'orologio (fermo in S') impiega il tempo Δt_{np} (non proprio) per transitare fra A e B. $\Rightarrow\ L_p = v^* \Delta t_{np}$

In S' la lunghezza (non propria) è misurata con l'orologio (proprio). $\Rightarrow\ L_{np} = v^* \Delta t_p$

$$\begin{cases} L_{np} = v * \Delta t_p \\ L_p = v * \Delta t_{np} \end{cases} \Rightarrow \frac{L_{np}}{L_p} = \frac{\Delta t_p}{\Delta t_{np}} \qquad \boxed{\Rightarrow L_{np} = \frac{1}{\gamma} L_p = \sqrt{1-\beta^2}\; L_p}$$

Di conseguenza, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\gamma} & \text{per } \Delta t = 0 \\ \Delta x' = \dfrac{\Delta x}{\gamma} & \text{per } \Delta t' = 0 \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz

È necessario superare le trasformazioni di Galileo con relazioni compatibili con i Principi di Einstein:

queste dovranno ricondursi alle prime quando γ ≈ 1, cioè per velocità piccole rispetto a *c*.

Tali relazioni si ricavano dai Principi di relatività, assumendo che lo spazio sia omogeneo e isotropo.

Nel caso di assi paralleli, hanno la forma:

$$\begin{cases} x = \gamma \quad x' + v^{*} t' \\ t = \gamma \left(t' + \dfrac{v^{*}}{c^2} x' \right) \\ y = y' \,;\, z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \gamma \quad x - v^{*} t \\ t' = \gamma \left(t - \dfrac{v^{*}}{c^2} x \right) \\ y' = y \,;\, z' = z \end{cases}$$

Come si vede, variabili spaziali e temporali sono strettamente dipendenti.

$$\begin{cases} x = \gamma \quad x' + v^{*} t' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{v^{*}}{c^2} x' \right) \\ y = y' \,;\, z = z' \end{cases}$$

Inoltre, entrano in modo perfettamente simmetrico. Infatti, se le rendiamo equi-dimensionali

$$\begin{cases} x = \gamma \quad x' + \beta \;\, ct' \\ ct \;\, = \gamma \quad ct' \;\, + \beta x' \\ y = y' \,;\, z = z' \end{cases}$$

Le trasformazioni di Galileo si ottengono per

$$\begin{cases} \gamma \to 1 \\ \beta \to 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \gamma \quad x' + v^{*} t' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{v^{*}}{c^2} x' \right) \\ y = y' \,;\, z = z' \end{cases} \to \begin{cases} x = x' + v^{*} t' \\ t = t' \\ y = y' \,;\, z = z' \end{cases}$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si ottengono facilmente le relazioni della dilatazione del tempo e della contrazione delle lunghezze

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\gamma} \quad \text{per } \Delta t = 0 \\ \\ \Delta t = \gamma\, \Delta t' \quad \text{per } \Delta x' = 0 \end{cases}$$

Derivando le trasformazioni di Lorentz, si ottengono le corrispondenti per velocità e accelerazione.

$$v'_x = \frac{v_x - v^*}{1 - v_x \dfrac{v^*}{c^2}} \; ; \; v'_y = \frac{v_y / \gamma}{1 - v_x \dfrac{v^*}{c^2}} \; ; \; v'_z = \frac{v_z / \gamma}{1 - v_x \dfrac{v^*}{c^2}}$$

Come si poteva sospettare, l’accelerazione non è più invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Introduzione alla dinamica relativistica

Dobbiamo dunque aspettarci che:

- si debbano cambiare le leggi della meccanica, in modo che diventino covarianti per trasformazioni di Lorentz
- le nuove leggi si riconducano a quelle classiche, quando la velocità è molto minore di c.

Come già detto, è ragionevole continuare ad assumere la validità del terzo Principio della dinamica, seppure in una forma generalizzata.

Definiamo la grandezza ***quantità di moto***: $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$

In ambito classico, il secondo Principio della dinamica può essere espresso in termini di **q**: $\boxed{\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}}$

Infatti:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ \ m\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \cancel{\mathbf{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} = m\,\mathbf{a}$$

È possibile così esprimere il terzo Principio della dinamica nella forma:

nei sistemi di riferimento inerziali, la quantità di moto totale di un insieme ***isolato*** di punti materiali è costante.

Isolato vuol dire che i punti materiali considerati interagiscono solo fra loro (inoltre, è costante anche un altro vettore, detto momento della quantità di moto).

Per quanto ci interessa qui: $\mathbf{Q} \equiv \sum_i \mathbf{q}_i = \text{costante}$

Utilizzando tale definizione di quantità di moto, il terzo Principio non mantiene validità in ambito relativistico, a meno di ridefinire **q** opportunamente: $\mathbf{q} = \gamma m \mathbf{v}$

(che si riconduce alla definizione classica per $\gamma \to 1$) .

In tal modo, è possibile continuare a utilizzare $\mathbf{f} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}$

Non si può invece utilizzare la $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ in quanto (in generale) forza e accelerazione non risultano più parallele.

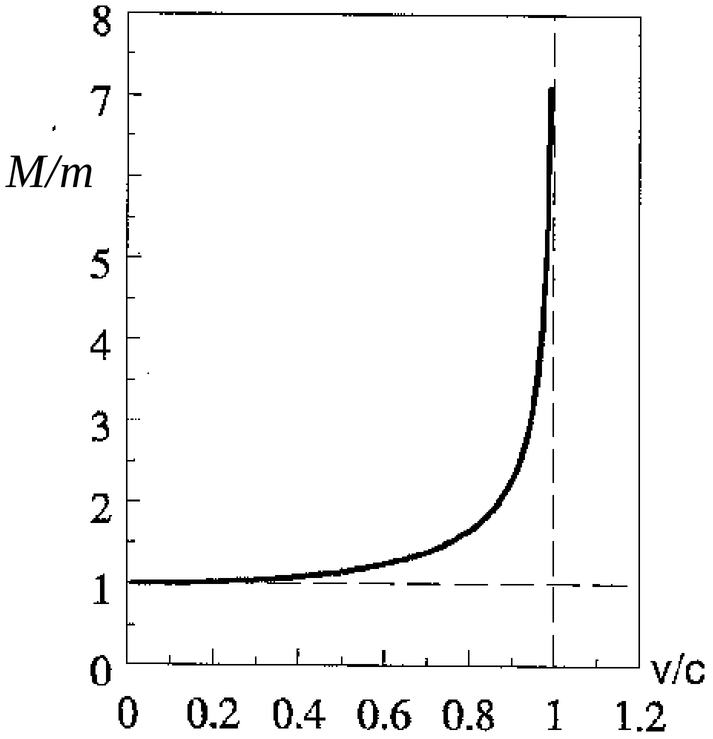
A volte si dice che ***tutto va come se*** la massa dipendesse dalla velocità attraverso la relazione $M = \gamma m$, nella quale *m* è detta *massa a riposo*.

Si vedrà che per questa via si spiegano anche i risultati problematici ottenuti per l'energia cinetica (classica).

Una verifica sperimentale è quella con particelle (per es. elettroni) immesse in un acceleratore circolare di raggio *R*.

La forza centripeta necessaria a tenerli sulla traiettoria risulta γ volte maggiore di quella classica

$$\left(m\frac{v^2}{R} \right)$$



Energia (ed equivalenza con la massa)

Può essere utile sviluppare in serie l'espressione γm :

$$\gamma m = m\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^*}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v^*}{c}\right)^4+\ldots\right]=$$

$$= m+\left[\frac{K_c}{c^2}+\frac{3}{8}m\left(\frac{v^*}{c}\right)^4+\ldots\right]\equiv m+\frac{K_R}{c^2}$$

Ottengo una relazione fra energie moltiplicando per c^2:

$$\gamma mc^2 = mc^2 + K_R$$

che posso interpretare come $\quad E = E_{riposo} + E\ \ v^*$

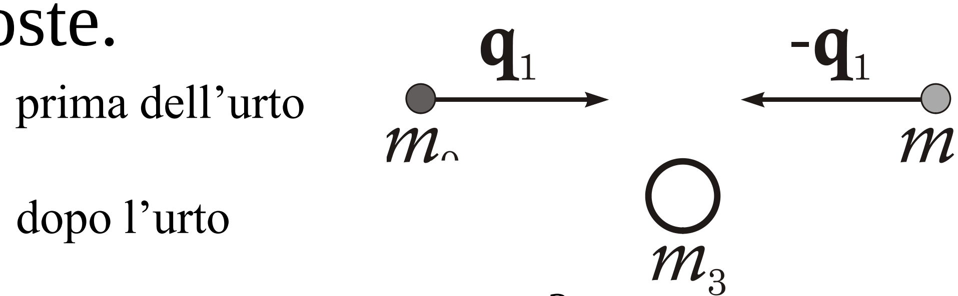
Si ha anche

$$K_R = mc^2\ \ \gamma - 1\ \ = \left[K_c+\frac{3}{8}mc^2\left(\frac{v^*}{c}\right)^4+\ldots\right]\xrightarrow[v^*\ll c]{} K_c$$

È interessante il fatto che il corpo, anche se fermo possiede energia: $E = E_{riposo} + E\ \ v^* \ = mc^2 + K_R$

Energia (di massa) a riposo.

Cerchiamo conferme a questa interpretazione: urto completamente anelastico fra due particelle identiche che hanno velocità opposte.



L'energia cinetica iniziale è $2K_R = 2mc^2\ \ \gamma - 1$

Quella finale è nulla; dove è finita la differenza?

Si calcola che la massa risultante è $m_3 = 2m\gamma > 2m$

L'energia cinetica iniziale va in aumento della massa a riposo: l'energia totale si conserva e la massa è energia!

Infatti $\Delta m = 2m\gamma - 2m = 2m\ \ \gamma - 1$ $\Rightarrow c^2 \Delta m = 2mc^2\ \ \gamma - 1\ \ = -\Delta K_R$

Un'altra relazione che si può ottenere lega l'energia di una particella alla sua quantità di moto:

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + \left(qc\right)^2 \equiv E_{riposo}^2 + \left(qc\right)^2$$

Quando la luce ha comportamenti "tipo particella" (effetto fotoelettrico, effetto Compton …), tale particella prende il nome di ***fotone***: ha enegia e quantità di moto, ma massa (a riposo) nulla. Quindi, in questo caso $E = qc$

Inoltre, essendo in generale

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 \\ q = \gamma mv \end{cases} \Rightarrow \frac{E}{q} = \frac{c^2}{v} \Rightarrow v = q\frac{c^2}{E}$$

per il fotone $E = qc \Rightarrow v = q\dfrac{c^2}{E} = c$

Le particelle con massa nulla si muovono sempre con velocità *c*!

Così si spiegano anche processi nei quali una particella che ha massa a riposo non nulla (per esempio e^-) interagisce (urta) con una sua antiparticella (e^+), e si ottiene:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma \ \ (fotoni)$$

Perché non si può produrre così un solo fotone?

Sistemi legati: un atomo esiste in quanto il nucleo interagisce con gli elettroni, e l'interazione è attrattiva (energia potenziale negativa).

Dunque, rispetto a quando nucleo ed elettroni non interagiscono (a distanza "infinita"), la somma di tutte le masse nel sistema legato è inferiore:

$$\Delta m \text{ difetto di massa ; } \quad \Delta m \ \ c^2 \text{ energia di legame}$$

particella	**massa (a.m.u.)**	**massa (MeV/c^2)**	**Δm (MeV/c^2)**	**$\Delta m/m$ %**
Elettrone	0,00055	0,51		
Protone	1,00759	938,1		
Neutrone	1,00898	939,4		
Deutone	2,01419	1875,2	2,3	0,12
Trizio	3,01553	2807,5	9,4	0,33
Elio 3	3,01589	2807,8	7,8	0,28
H (atomo)				$1{,}45\ 10^{-6}$

difetto di massa

legame dovuto all'interazione nucleare

legame dovuto all'interazione elettromagnetica (tutto va come se si conservasse la massa: chimica)

In realtà si conserva l'energia.

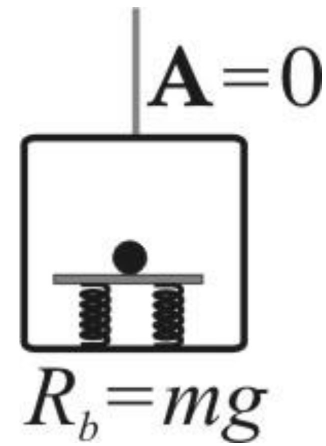
Cenni di relatività generale

Come misuriamo un peso in un riferimento inerziale?

Asse verticale

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \Rightarrow -w + R_{bilancia} = ma = 0$$

$$\Rightarrow R_{bilancia} = w$$



Lo stesso avviene dentro un ascensore che si muove uniformemente.

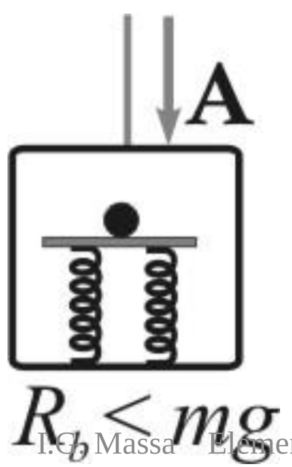
E se l'ascensore è accelerato?

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \Rightarrow -w + R_{bilancia} = mA$$

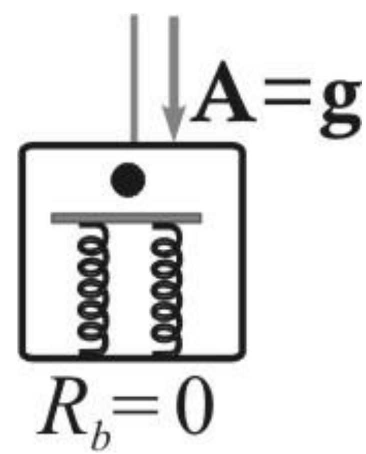
$$\Rightarrow R_{bilancia} = w + mA$$

Oppure

$$\Rightarrow R_{bilancia} = w - mA$$



O anche



Quindi, se l'ascensore è in caduta libera, il corpo appare libero (cioè soggetto a forze con risultante nulla).

Attenzione però alla relazione $R_{bilancia} = w - mA = 0$

In realtà dovremmo scrivere $m_g g - m_i g = 0$

Infatti: massa inerziale $\mathbf{f} = m_i \mathbf{a}$

massa gravitazionale $\mathbf{f}_{12} = G\dfrac{m_{g1}m_{g2}}{r^2}\mathbf{u}_{12} = m_{g1}\left(\overbrace{G\dfrac{m_{g2}}{r^2}\mathbf{u}_{12}}^{\mathbf{g}}\right)$

Fatti sperimentali: le due sono rigorosamente proporzionali.

Attualmente:

$$R = \frac{\left(\dfrac{m_i}{m_g}\right)_1 - \left(\dfrac{m_i}{m_g}\right)_2}{\left(\dfrac{m_i}{m_g}\right)_1} < 3\cdot 10^{-11}$$

Principio di equivalenza debole: il rapporto fra massa inerziale e massa gravitazionale non dipende dal materiale di cui è costituito il corpo.
Conseguenza: è impossibile determinare se siamo (riferimento inerziale) in un campo gravitazionale uniforme, oppure (senza campo) in un riferimento accelerato.

Un osservatore, per stare fermo sul pavimento (nel campo gravitazionale terrestre), deve essere soggetto alla (re)azione del pavimento: $F = m_g \cdot g$
allo stesso modo, un osservatore, nello spazio lontano (no campo), se si trova in un razzo che ha accelerazione g, è soggetto alla forza: $F = m_i \cdot g$
Se le due masse sono uguali, localmente non si può distinguere una situazione dall'altra.

Così si generalizza il concetto di *sistema di riferimento inerziale* a ***sistema di riferimento localmente inerziale***

Principio di equivalenza: la forma di ogni legge fisica deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento *localmente inerziali*.

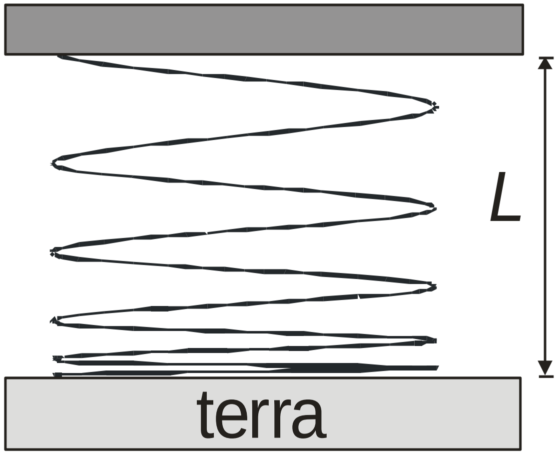
A rigore, il campo gravitazionale non è uniforme (è radiale), mentre la forza inerziale è uniforme. Per questo il principio riguarda osservazioni strettamente locali.

L'assenza di gravità in un satellite?

Il principio di equivalenza consente di riprodurre gli effetti di un campo gravitazionale (uniforme), anche senza disporre di una teoria della gravitazione.

Spostamento verso il rosso

Osservatore fermo (in alto) a distanza L



(osservatore inerziale)

Conservazione dell'energia:

gravitazionale

$$E_{basso} = E_{alto} + mgL$$

$$\Rightarrow \Delta E = mgL = \frac{E}{c^2} gL \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{gL}{c^2} \equiv \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

$E = \text{cost} \cdot \nu$?

inerziale

Quindi, la frequenza della luce diminuisce (e va verso il rosso), aumentando l'altezza.

Se in 1 secondo partono un certo numero di fronti d'onda, per arrivare all'***osservatore in quota*** impiegano di più: egli vede, a terra, il tempo scorrere più lentamente.

I ricevitori GPS utilizzano satelliti che viaggiano a circa 14 000 km/h e si trovano ad alta quota, ≈20 000 km.

- il primo effetto dà un ***rallentamento*** (rispetto a terra) di circa 6 μs al giorno
- il secondo effetto è causato da una interazione gravitazionale che è circa ¼ di quella terrestre; da cui un ***anticipo*** di circa 45 μs al giorno
- quindi, serve una correzione di 39 μs al giorno.

Senza correzione, nella localizzazione (che oggi ha errori di circa 1 m) si accumulerebbe una differenza di circa 12 km al giorno.

In realtà, oggi si diminuisce l'errore anche con ricevitori a terra, di posizioni note.

Inoltre: la gravitazione ha effetto sulla luce!

L'effetto è piccolo: nel caso del Sole ≈ 2 parti su 10^6.

Se la gravitazione è molto intensa, può impedire alla luce di allontanarsi a piacere (buco nero).

Ancora: l'attrazione gravitazionale fa deviare i raggi luminosi; così come un osservatore non inerziale può vedere curve le traiettorie rettilinee.

Nel caso del Sole, bisogna sfruttare una eclisse.