



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Introduzione alla Relatività Ristretta IV parte

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 27 Aprile 2009



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

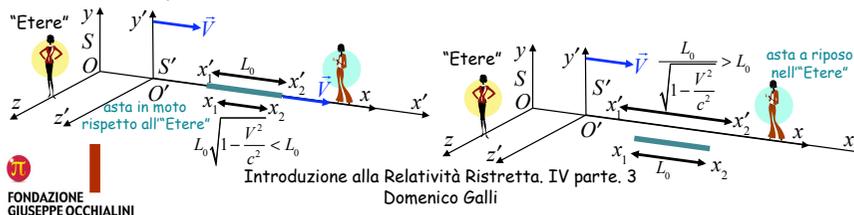
Conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi.

Introduzione alla Relatività
Ristretta. III parte. 2
Domenico Galli

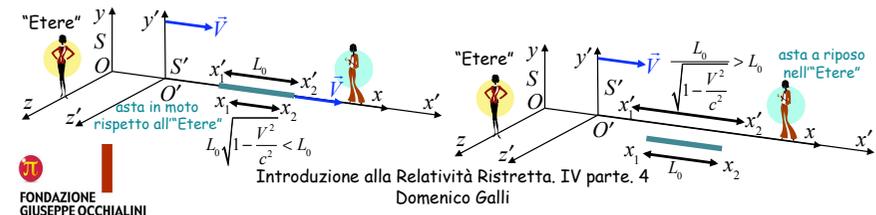
La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz

- L'idea di una contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto nasce per spiegare il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley (**contrazione di Fitzgerald-Lorentz**).
- L'idea era quella di una contrazione degli oggetti in **moto rispetto all'"Etere Luminifero"**.
- Si pensava a una effettiva **deformazione** dei corpi.
- La ragione della contrazione era attribuita a **effetti elettromagnetici** dovuti a una sorta di **interazione** tra il materiale del corpo in movimento e quello dell'"Etere Luminifero".



La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz (II)

- La **massima lunghezza** si sarebbe osservata nel **SdR** dell'"Etere Luminifero".
- L'**osservatore** dell'"Etere Luminifero" sarebbe stato l'**unico** osservatore che ha il "privilegio" di **vedere contratti tutti gli oggetti** che si muovono rispetto a lui.
 - Gli altri osservatori avrebbero dovuto vedere **allungati** gli **oggetti** che si trovano nell'**etere** (perché si accorcia il metro con cui misurano, tarato nel SdR dell'etere).



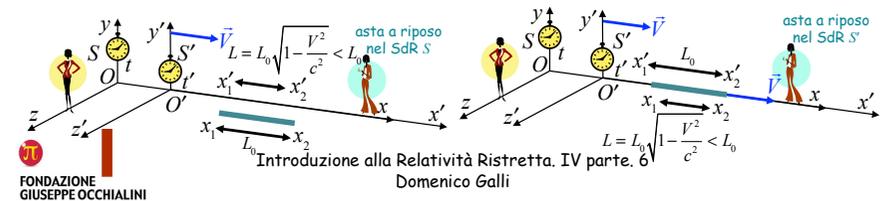
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze

- Vedremo ora, sulla base delle Trasformazioni di Lorentz, che una **contrazione delle lunghezze**, nella direzione del moto relativo dei 2 SdR, si può osservare effettivamente:
- Si tratta tuttavia di una contrazione dovuta alla **natura dello spazio-tempo**:
 - in particolare, alle sue **proprietà di trasformazione** nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
 - la **distanza tra due punti nello spazio dipende dal SdR**.



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (II)

- **Non** ci sono **SdR privilegiati**:
 - I SdR inerziali sono tutti tra loro **equivalenti**.
 - Se un osservatore nel SdR S vede un'asta nel SdR S' accorciata, parimenti un osservatore nel SdR S' vede un'asta nel SdR S accorciata (**reciprocità**).
- La **massima lunghezza** si osserva nel SdR in cui l'asta è a **riposo**.

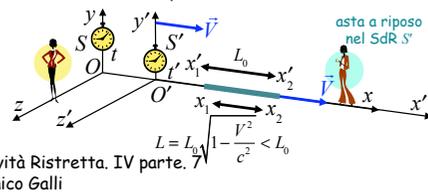


La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (III)

- Supponiamo che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0 , sia posta in **quiete** nel SdR S' , il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S .
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S' , abbiano coordinate x_1' e x_2' :
 - essendo l'asta in **quiete** nel SdR S' , la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

Dove coordinate x_1' e x_2' , essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (IV)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S .
- Poiché l'asta è in **moto** nel SdR S , la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t_m , segnato dagli **orologi del SdR S** .
 - Flash e pellicola in quiete nel SdR S .
 - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** nel SdR S .

$$L = x_2(t_m) - x_1(t_m) \text{ (misura simultanea degli estremi nel SdR } S \text{)}$$



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (V)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S** e non in S', per cui noi conosciamo t e non t' .

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VI)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma (x_1 - Vt_1) \\ x'_2 = \gamma (x_2 - Vt_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = \gamma [x_1(t_m) - Vt_m] \\ x'_2 = \gamma [x_2(t_m) - Vt_m] \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

da cui:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma [x_2(t_m) - Vt_m - x_1(t_m) + Vt_m] = \gamma [x_2(t_m) - x_1(t_m)]$$

$$L = x_2(t_m) - x_1(t_m) = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

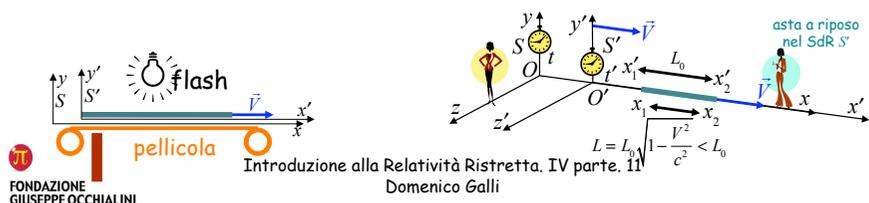


La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VII)

- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **più corta nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0 \quad (\text{contrazione relativistica delle lunghezze})$$

- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



Reciprocità

- Supponiamo ora che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0 , sia posta in **quiete** nel SdR S , mentre il SdR S' si muove con velocità V rispetto al SdR S .

- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S , abbiano coordinate x_1 e x_2 :

- essendo l'asta in **quiete** nel SdR S , la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.

- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2 - x_1$$

Dove coordinate x_1 e x_2 , essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.



Reciprocità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S' .
- Poiché l'asta è in **moto** rispetto al SdR S' , la posizione dei due estremi, $x'_1(t)$ e $x'_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t'_m , segnato dagli **orologi del SdR S'** .
 - Flash e pellicola in quiete in S' .
 - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** in S' .

$$L = x'_2(t'_m) - x'_1(t'_m) \text{ (misura simultanea degli estremi nel SdR } S')$$



Reciprocità (III)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S'** e non in S , per cui noi conosciamo t' e non t .



Reciprocità (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma (x'_1 + Vt'_1) \\ x_2 = \gamma (x'_2 + Vt'_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma [x'_1(t'_m) + Vt'_m] \\ x_2 = \gamma [x'_2(t'_m) + Vt'_m] \end{cases} \quad \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$x_2 - x_1 = \gamma [x'_2(t'_m) + Vt'_m - x'_1(t'_m) - Vt'_m] = \gamma [x'_2(t'_m) - x'_1(t'_m)]$$

$$L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$



Reciprocità (V)

- L'asta è **più corta nel SdR S'** .
 - Dunque, non ostante noi abbiamo invertito le parti, (asta a riposo nel SdR S , invece che asta a riposo nel SdR S') per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **sempre più corta nel SdR**, nel quale l'asta è in **moto**.
- $$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$
- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità

- Supponiamo, come nel primo caso esaminato, che l'asta, di lunghezza a riposo L_0 , sia posta in quiete nel SdR S' , il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S .
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S' , abbiano coordinate x'_1 e x'_2 :
 - essendo l'asta in quiete nel SdR S' , la posizione dei suoi due estremi nel SdR S non cambia nel tempo, per cui non è necessario misurare simultaneamente la loro posizione.

Si ha dunque:

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

Dove coordinate x'_1 e x'_2 , essendo costanti, si riferiscono a un istante arbitrario.



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S .
- Poiché l'asta è in moto nel SdR S , la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, cambia nel tempo.
- Occorre stabilire in quali istanti se ne misurano gli estremi.
- A differenza del caso precedente, supponiamo di mettere sull'asta (solidale a essa) un dispositivo lampeggiatore (orologio), collegato con 2 fili di ugual lunghezza a due lampade poste alle 2 estremità dell'asta e con il lampo delle due lampade impressioniamo una pellicola in quiete nel SdR del laboratorio:
 - Il lampo si ha nell'istante t'_m , segnato dall'orologio (sulla sbarra) del SdR S' .
 - Pellicola in quiete in S .
 - Cioè misura degli estremi in S simultaneamente in S' .



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (III)

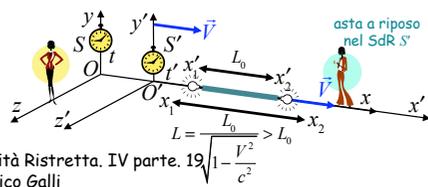
- Misura degli estremi dell'asta nel SdR S , simultaneamente nel SdR S (caso precedente):

$$L = x_2(t_m) - x_1(t_m)$$



- Misura degli estremi dell'asta nel SdR S' , simultaneamente nel SdR S' (presente caso):

$$L = x'_2(t'_m) - x'_1(t'_m)$$



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (IV)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (dirette o inverse):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono simultanee in S' e non in S , per cui noi conosciamo t' e non t .



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (V)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1) \\ x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t'_m) = \gamma[x'_1 + Vt'_m] \\ x_2(t'_m) = \gamma[x'_2 + Vt'_m] \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$x_2(t'_m) - x_1(t'_m) = \gamma[x'_2 + Vt'_m - x'_1 - Vt'_m] = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

$$L = x_2(t'_m) - x_1(t'_m) = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (VI)

- Dunque, questa volta, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, e a causa della **differente scelta di simultaneità**, l'asta è **più lunga nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

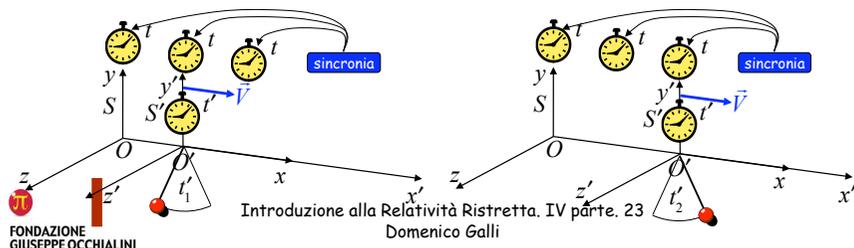
$$L = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



La Dilatazione Relativistica dei Tempi

- Consideriamo la misura della **durata di un evento** che ha luogo in una **posizione x' fissa** nel **SdR S'** (per esempio il **sempierodo dell'oscillazione di un pendolo**).
- L'orologio posto in x' (fermo rispetto a S') misura il tempo t'_1 quando l'evento ha inizio e t'_2 quando l'evento termina.
- La durata dell'evento misurata da S' è quindi

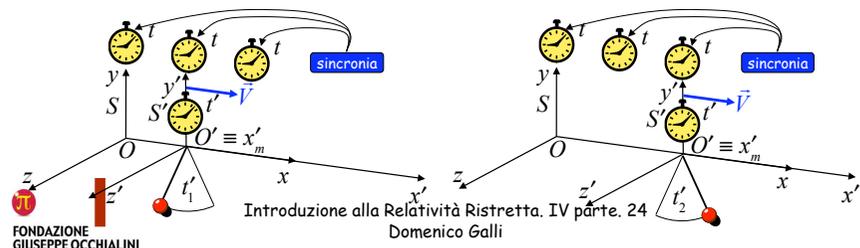
$$T_0 = t'_2 - t'_1$$



La Dilatazione Relativistica dei Tempi (II)

- Vogliamo ora determinare il semiperiodo del pendolo nel SdR S, rispetto al quale il SdR S' si muove con velocità V.
- Poiché il pendolo è in **moto** nel **SdR S**, la **posizione del pendolo** nei due istanti t_1 e t_2, è **diversa**: x_1 = x(t_1) e x_2 = x(t_2).
- Occorre stabilire **in quali posizioni** si **misurano i 2 tempi**. Supponiamo di misurare i 2 tempi, nella **posizione x'_m**, fissa **nel SdR S'**, a cui però corrisponderanno 2 posizioni diverse nel SdR S:

$$T = t_2(x'_m) - t_1(x'_m) \quad (\text{misure nella stessa posizione nel SdR S'})$$

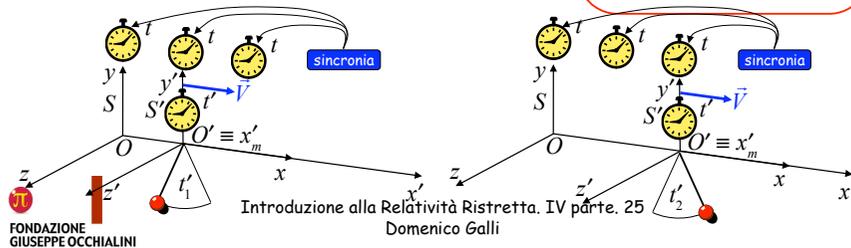


La Dilatazione Relativistica dei Tempi (III)

- Le relazioni tra i tempi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure dei tempi sono **nello stessa posizione in S'** e non in S, per cui noi conosciamo x' e non x .



La Dilatazione Relativistica dei Tempi (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 istanti:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1 \right) \\ t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(x'_m) = \gamma \left(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_m \right) \\ t_2(x'_m) = \gamma \left(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_m \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$t_2(x'_m) - t_1(x'_m) = \gamma \left[t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_m - t'_1 - \frac{V}{c^2} x'_m \right] = \gamma (t'_2 - t'_1)$$

$$T = t_2(x'_m) - t_1(x'_m) = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > T_0$$



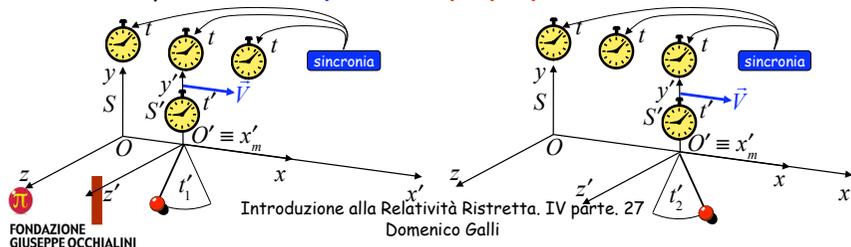
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (V)

- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo è **più lungo nel SdR S**, nel quale il pendolo è in **moto**:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > T_0$$

(dilatazione relativistica dei tempi)

- Il SdR in cui la **il periodo del pendolo è minimo** è il SdR in cui il pendolo è **a riposo (tempo proprio)**.



Reciprocità

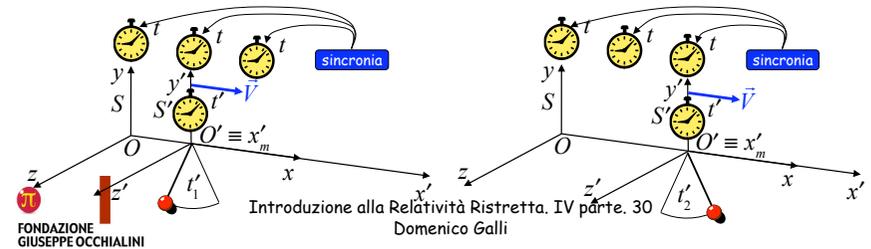
- L'effetto di dilatazione dei tempi deve essere completamente **reciproco** e **non** determinare il **privilegio** di nessun SdR rispetto agli altri.
- Cosideriamo un SdR S' in moto relativo rispetto al SdR S.
- Un **orologio fisso in S'** è visto in moto da un osservatore in S il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Tuttavia è vero anche che un **orologio fisso in S** è visto in moto da un osservatore in S' il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Come si possono **conciliare** queste due affermazioni?
 - Qual è l'orologio che veramente rimane indietro rispetto all'altro?
 - Qual è l'orologio che invece va avanti rispetto all'altro?

Reciprocità (II)

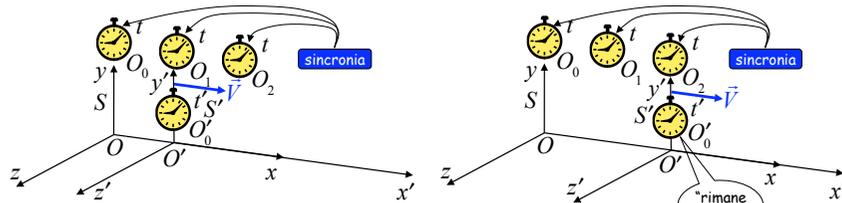
- La chiave della risposta sta nel **procedimento di confronto degli orologi**.
- Per confrontare i tempi in un certo istante, occorre poter disporre di **due orologi che in quell'istante si trovano nella stessa posizione**:
 - Altrimenti non è possibile definire **univocamente la simultaneità** della misura del tempo da parte dei 2 orologi.
- Occorre dunque poter disporre, almeno in uno dei 2 SdR, di una **successione di orologi sincronizzati** tra loro.
 - P. es. mediante un dispositivo di sincronismo che comanda tutti gli orologi della successione mediante cavi elettrici della stessa lunghezza.
- Nell'altro SdR è sufficiente un **orologio singolo**.

Reciprocità (III)

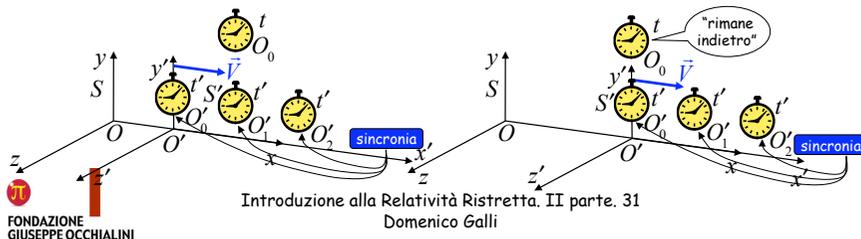
- Nel **nostro calcolo** abbiamo supposto di misurare sia il tempo t_1 , sia il tempo t_2 nel punto alla coordinata x'_m , che è **fisso nel SdR S'** ma che **si muove nel SdR S** .
- Questo significa che abbiamo bisogno di **un solo orologio** nel SdR S' ma di **almeno 2 orologi** nel SdR S .
- L'orologio che rimane **indietro** è quello nel SdR S' cioè **l'orologio singolo** che viene confrontato con 2 orologi.



Reciprocità (IV)

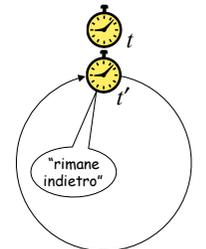


- In generale rimane **indietro l'orologio singolo** che viene confrontato con la successione di orologi.



Reciprocità (V)

- Che cosa succede se si prendono 2 orologi:
 - Uno fisso in un certo SdR inerziale;
 - Uno che, partendo dallo stesso punto, descrive una **traiettoria chiusa** e ritorna al punto di partenza?
- In questo caso il calcolo è più complicato perché l'orologio in moto si trova in un **SdR non-inerziale** (non è in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto a un SdR inerziale).
- Tuttavia si può dimostrare che **rimane indietro l'orologio in moto**.
- La **reciprocità non vale** perché uno dei due SdR non è inerziale.



Paradosso dei Gemelli

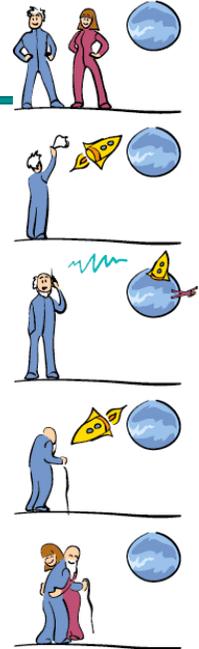
- Uno dei due gemelli parte a bordo di una **navicella spaziale** e compie un lungo viaggio con velocità costante e prossima a quella della luce, lasciando l'altro gemello sulla **Terra**.
- Dopo alcuni anni egli ritorna sulla Terra e si ricongiunge al fratello. Per tutto il tempo in cui è stato sulla navicella, il gemello viaggiatore ha vissuto in un mondo in cui lo **scorrere del tempo** e tutti i fenomeni, compresi i **processi biologici** dell'**invecchiamento**, erano **rallentati**.
- Al suo ritorno sulla Terra egli sarà quindi rimasto **più giovane del fratello**.



Paradosso dei Gemelli (II)

- Se il **gemello viaggiatore** ha viaggiato per 10 anni (secondo quanto indicato dall'orologio della navicella) a una velocità $v = 0.9 c$, per il **gemello sulla Terra** sono passati:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10 \text{ anni}}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = 22.94 \text{ anni}$$



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Quadrivettori

Lo spazio-tempo a 4 dimensioni.

Trasformazioni di Lorentz e Rotazioni

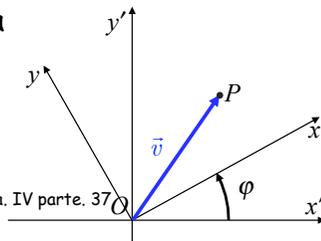
- Consideriamo ora le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- Esse descrivono la trasformazione delle 4 coordinate ct, x, y e z conseguenti al **cambiamento di SdR**, da un SdR inerziale a un altro.
- **Confrontiamo** queste relazioni con quelle relative a una **rotazione nello spazio ordinario**.

Rotazioni nello Spazio Ordinario

- Supponiamo che nello **spazio ordinario** a 3 dimensioni siano **ruotati gli assi cartesiani** di un **angolo φ** , p. es. attorno all'**asse z** .
- Scriviamo ora le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione delle coordinate di un punto** conseguente a tale rotazione.
- Oppure, il che è equivalente, le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione delle componenti di un vettore** conseguente a tale rotazione.

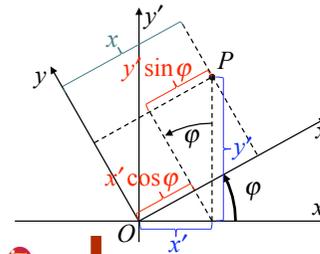


Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 37
Domenico Galli

Rotazioni nello Spazio Ordinario (II)

- Come si vede dalle figure si ha:

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ z = z' \end{cases} \quad (\text{trasformazioni inverse})$$



Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 38
Domenico Galli

Rotazioni nello Spazio Ordinario (III)

- Per ottenere le **trasformazioni dirette** è sufficiente sostituire le variabili con gli apici a quelle senza apici e viceversa e sostituire all'angolo φ l'angolo $-\varphi$:

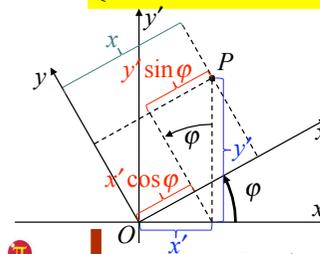
$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ z = z' \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi \rightarrow -\varphi \\ \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi \\ \sin \varphi \rightarrow -\sin \varphi \\ ct \rightarrow ct', ct' \rightarrow ct \\ x \rightarrow x', x' \rightarrow x \\ y \rightarrow y', y' \rightarrow y \\ z \rightarrow z', z' \rightarrow z \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 39
Domenico Galli

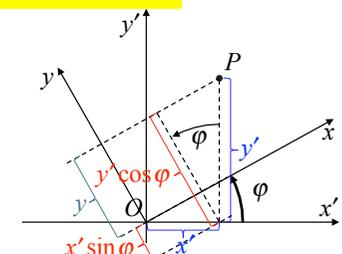
Rotazioni nello Spazio Ordinario (IV)

- Le trasformazioni dirette e inverse che descrivono una rotazione attorno all'asse z sono quindi:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} ct = ct' \\ x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ z = z' \end{cases}$$



Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 40
Domenico Galli



Rotazioni nello Spazio Ordinario (V)

- Osserviamo che le rotazioni non modificano la distanza d del punto P dall'origine O :

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2 + (x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi - 2xy \cos \varphi \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi + 2xy \sin \varphi \cos \varphi} = \\ &= \sqrt{x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + y^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{x^2 + y^2} = d \end{aligned}$$

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = d^2$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (VI)

- Questo risultato può essere generalizzato a una **generica rotazione nello spazio 3-dimensionale**:

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

- La **distanza di un punto P dall'origine O** è un **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.
- Il **modulo di un vettore** è **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.

Rapidità

- Vediamo ora di scrivere le trasformazioni di Lorentz in una forma simile.
- Definiamo una nuova grandezza **adimensionale** (numero puro) chiamata **rapidità**:

$$\varphi = \ln[\gamma(1+\beta)]$$

- Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln[\gamma(1+\beta)] = \ln\left[\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] = \\ &= \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1-\beta)}\right] \end{aligned}$$

Rapidità (II)

- Dunque la **rapidità** si può anche scrivere come:

$$\varphi = \ln[\gamma(1+\beta)] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1-\beta)}\right]$$

- Inoltre si ha:

$$-\varphi = -\ln[\gamma(1+\beta)] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1+\beta)}\right] = \ln[\gamma(1-\beta)]$$

$$e^\varphi = \gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

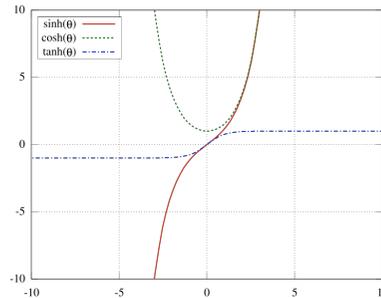
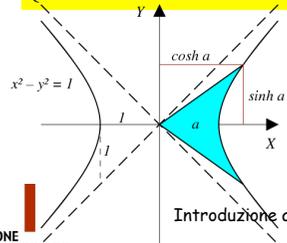
$$e^{-\varphi} = \gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Funzioni Iperboliche

- Introduciamo ora le **funzioni iperboliche**:

$$\begin{cases} \sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \\ \cosh \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \\ \tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} \end{cases}$$

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$



Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 45
Domenico Galli

Rapidità e Funzioni Iperboliche

- Utilizzando le funzioni iperboliche si ha:

$$e^\varphi = \gamma(1 + \beta)$$

$$e^{-\varphi} = \gamma(1 - \beta)$$

$$\sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma(\beta + 1) - \gamma(\beta - 1)}{2} = \gamma \beta$$

$$\cosh \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma(1 + \beta) + \gamma(1 - \beta)}{2} = \gamma$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 46
Domenico Galli

Trasformazioni di Lorentz

- Utilizzando le **funzioni iperboliche** e la **rapidità**, si possono scrivere le trasformazioni di Lorentz nella forma:

$$\begin{cases} \gamma \beta = \sinh \varphi \\ \gamma = \cosh \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct - \gamma \beta x = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x - \gamma \beta ct = x \cosh \varphi - ct \sinh \varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 47
Domenico Galli

Trasformazioni di Lorentz (II)

- Osserviamo che le trasformazioni di Lorentz non modificano la quantità $s^2 = c^2 t^2 - x^2$:

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s'^2 &= \sqrt{c^2 t'^2 - x'^2} = \sqrt{(ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi)^2 - (-ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{c^2 t^2 \cosh^2 \varphi + x^2 \sinh^2 \varphi - 2ctx \cosh \varphi \sinh \varphi - c^2 t^2 \sinh^2 \varphi - x^2 \cosh^2 \varphi + 2ctx \sinh \varphi \cosh \varphi} = \\ &= \sqrt{c^2 t^2 (\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) - x^2 (\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi)} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2} = s \end{aligned}$$

$$s'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2 = s^2$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. 48
Domenico Galli

Trasformazioni di Lorentz (III)

- Confrontiamo ora le **Trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \varphi = \ln[\gamma(1 + \beta)]$$

con le **rotazioni attorno all'asse z**:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (IV)

- Osserviamo che **rotazioni** e **trasformazioni di Lorentz** sono **analoghe nella forma**:

- Le **rotazioni** attorno all'asse z "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate x e y ;
- Le **trasformazioni di Lorentz** "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate ct e x .

- Le trasformazioni di Lorentz sono analoghe a **rotazioni tra lo spazio e il tempo**.

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (V)

- Le differenze stanno nell'uso delle **funzioni circolari** per le **rotazioni** e delle **funzioni iperboliche** per le **trasformazioni di Lorentz**.
- Inoltre (e conseguentemente) c'è un **segno** relativo diverso nella espressione dell'**invariante**:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 & (\text{rotazioni}) \\ s^2 = c^2 t^2 - x^2 & (\text{trasformazioni di Lorentz}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\ x' = -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Spazio-Tempo

- Possiamo quindi pensare di formare **punti** e **vettori** in uno spazio a **4 dimensioni** (Spazio-Tempo), con le componenti:

$$(ct, x, y, z)$$

- Un punto dello Spazio-tempo è detto **evento**.
- Potremo inoltre definire un **invariante** generale (l'**analogo del modulo** di un vettore in 3 dimensioni):
 $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
- Questo invariante non viene modificato né da una rotazione, né da una trasformazione di Lorentz.
 - Il fatto che questo invariante non si modifichi nelle trasformazioni di Lorentz è una espressione dell'**invarianza della velocità della luce** nel vuoto.

Spazio-Tempo (II)

- Una **rotazione ordinaria** modifica il nostro **punto di vista** spaziale:
 - può avvenire sui **piani xy , yz e zx** .
- Una **trasformazione di Lorentz** modifica il nostro **punto di vista** facendoci passare da un SdR inerziale a un altro SdR inerziale in moto rispetto al primo:
 - È una "rotazione" che può avvenire sui **piani tx , ty e tz** .
- L'idea di uno spazio-tempo 4-dimensionale è di **Hermann Minkowski** (1864-1909).
 - Questo particolare spazio è detto perciò **spazio di Minkowski**.

Spazio-Tempo (III)

- Un **punto materiale** è rappresentato da una **linea** nello **spazio-tempo**, denominata **linea d'universo**.
- Un oggetto che occupa spazio e che si estende per una certa durata di tempo occupa una specie di **"bolla"** nello spazio-tempo.
 - Quando ci muoviamo a **diverse velocità** vediamo questa bolla da un **diverso punto di vista**.

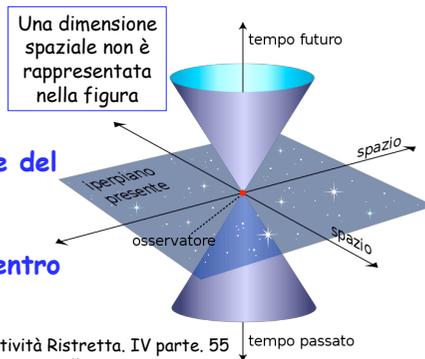
Spazio-Tempo (IV)

- Dato un evento (ct_0, x_0, y_0, z_0) , la **"iper-superficie"** conica nello spazio-tempo a 4 dimensioni di equazione:

$$c^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2 = 0$$
(cono di luce) divide lo spazio-tempo in 3 regioni distinte:

- Passato assoluto;**
- Futuro assoluto;**
- Separazione assoluta.**

- La **linea di universo di un fotone** sta **sulla superficie del cono di luce**.
- La **linea di universo di una particella con massa** sta **entro il cono di luce**.



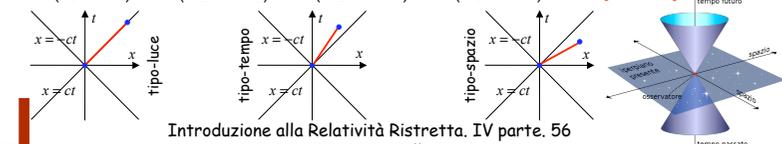
Spazio-Tempo (V)

- La **proprietà** di un evento, per esempio (ct_2, x_2, y_2, z_2) , di trovarsi **entro il cono di luce di un altro evento**, per esempio (ct_1, x_1, y_1, z_1) , **non dipende dal SdR**. (è invariante per trasformazioni di Lorentz).
- Gli **intervalli** dello **spazio-tempo** si classificano in:

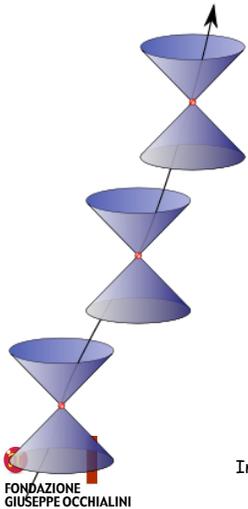
$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{tipo-luce}$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 > (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{tipo-tempo}$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 < (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{tipo-spazio}$$

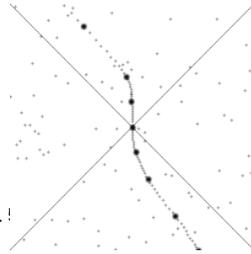


Spazio-Tempo (VI)



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-tempo** vi può essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-spazio non** vi può essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-luce** vi può essere un nesso con un segnale luminoso.
- L'intervallo tra due punti della **linea di universo** di un punto materiale è sempre di **tipo-tempo**.



Introduzione alla Relatività Ristretta. IV parte. !
Domenico Galli