CINEMATICA

Moto: *concetto relativo*.

Serve qualcosa cui fare riferimento.

Sistema di riferimento:

corpi, osservatori, regoli e orologi, tutti *fissi* fra loro.

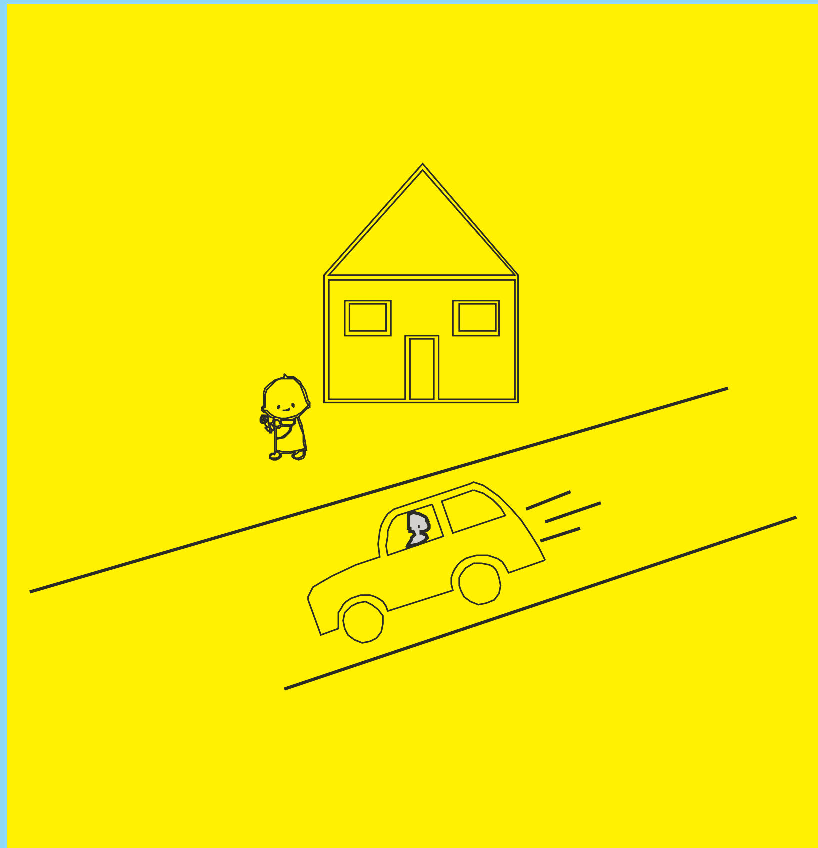
Punto materiale.

Equazione vettoriale del moto :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

(equivale a tre equazioni scalari)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \equiv \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad \ldots$$



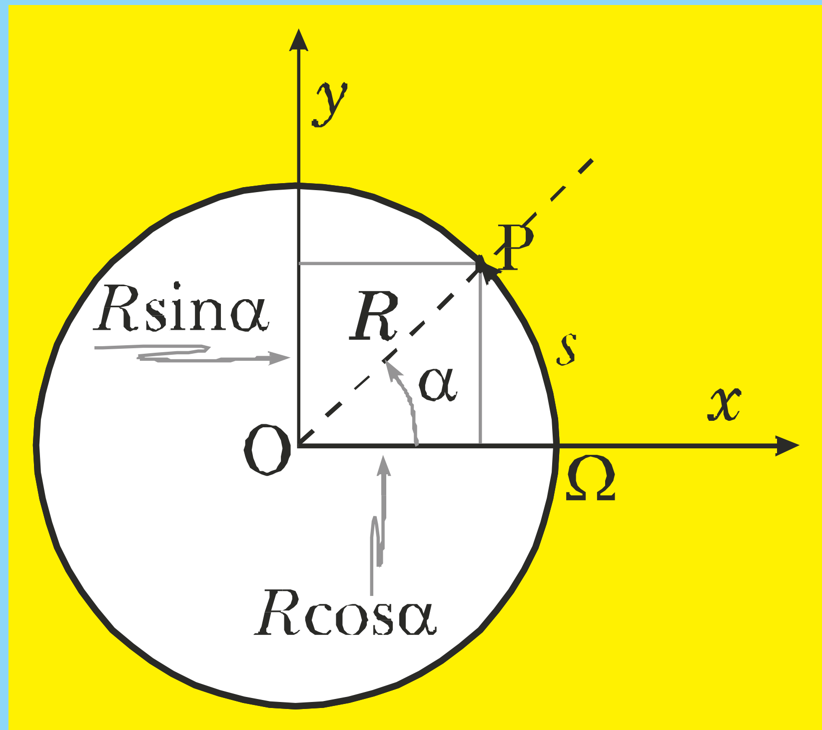
Traiettoria in forma parametrica.

Curve nel piano $[x, y]$.

Curva $\quad y = f(x)$; $f(x, y) = 0$; forme esplicite!

circonferenza: $x^2 + y^2 = R^2$

parabola: $y = ax^2 + bx + c$



Oppure con un *parametro a* $(0 \div 2\pi)$

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{cases}$$

Possiamo cambiare parametro: $s = R\alpha$

$$\begin{cases} x = R\cos s/R \\ y = R\sin s/R \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

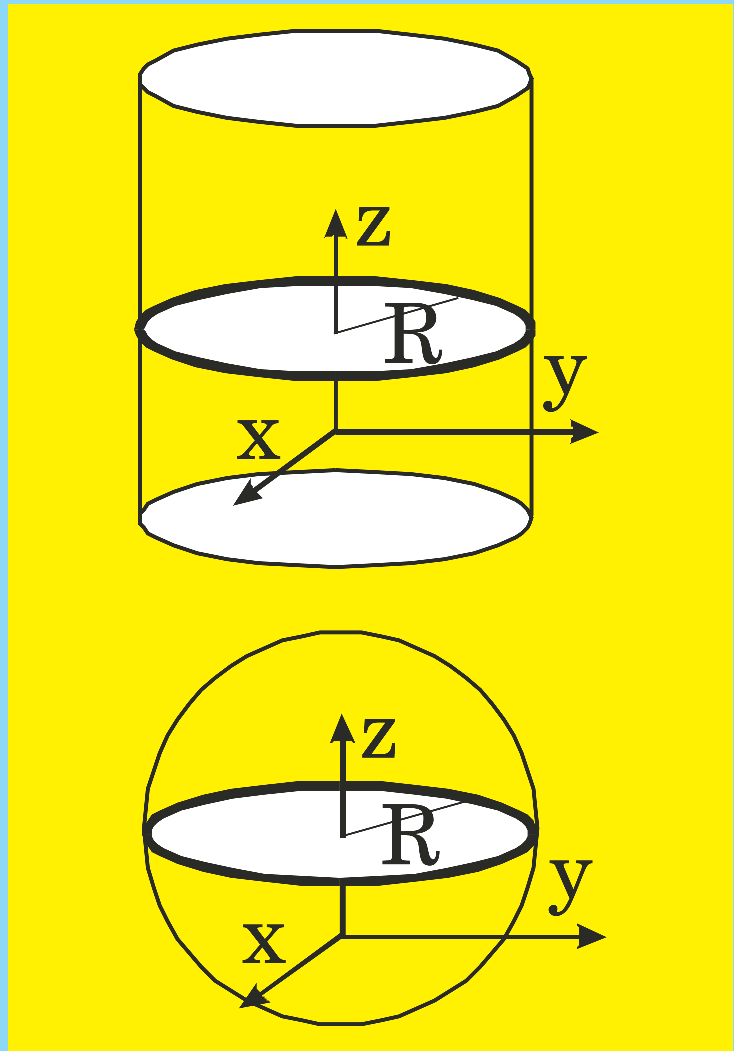
Nello spazio, il sistema $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$ rappresenta una curva.

In forma compatta (*vettoriale*), la ***rappresentazione parametrica*** di una curva è dunque:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \ .$$

Eliminando il parametro, nello spazio restano due equazioni *esplicite* (curva):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = R/2 \end{cases}$$

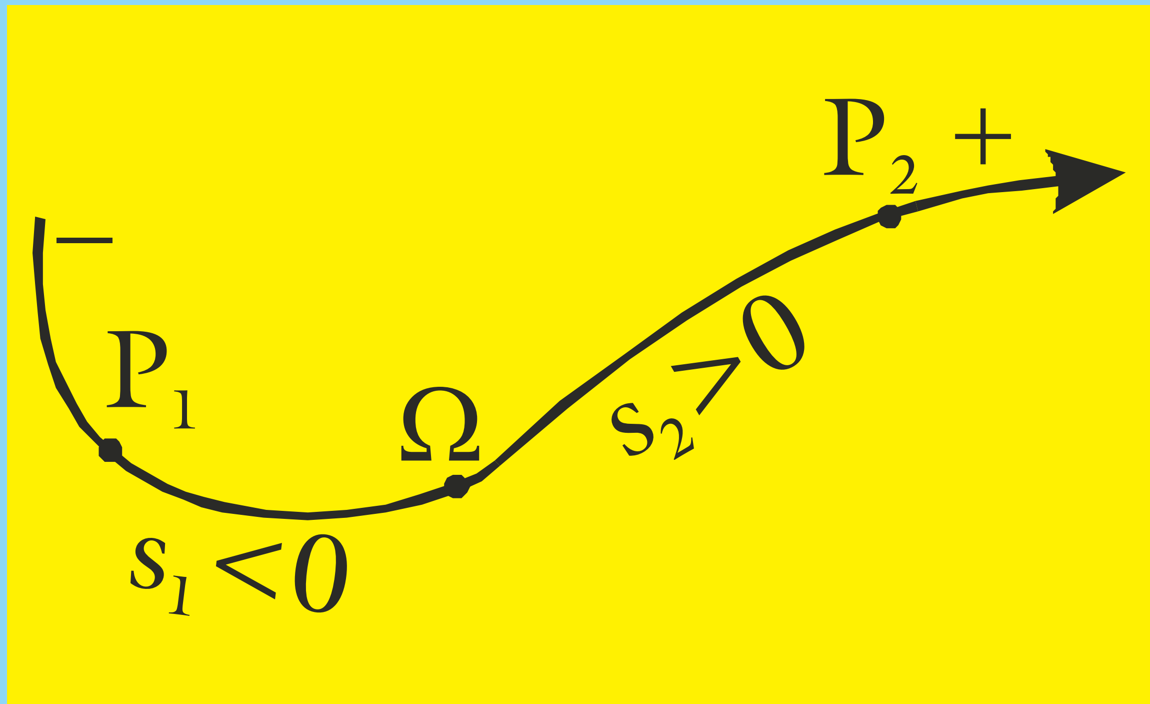


Dunque $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

è la rappresentazione parametrica di una curva nello spazio (traiettoria), con un parametro speciale: il tempo!

Possiamo separare esplicitamente la parte geometrica da quella fisica: ***ascissa curvilinea*** s

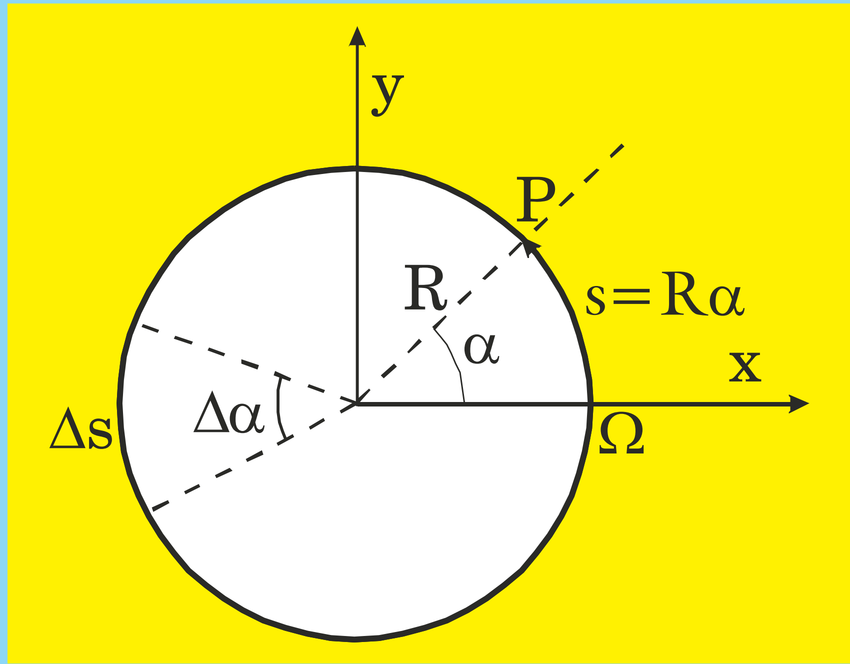
$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \\ s = s(t) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases}$$



$s = s(t)$ ***equazione oraria*** (o *legge oraria*).

Archi uguali percorsi in tempi uguali: $s = kt$

Caratteristica fisica, e non geometrica: va bene con qualsiasi traiettoria.



Se la traiettoria è la circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = R/2 \end{cases} : \begin{cases} x = R\cos s/R \\ y = R\sin s/R \\ z = R/2 \\ s = kt \end{cases}$$

oppure, con un altro parametro:

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{kt}{R} = \omega_0 t \quad : \quad \begin{cases} x = R\cos(\omega_0 t) \\ y = R\sin(\omega_0 t) \\ z = R/2 \end{cases}$$

(k e ω_0 costanti)

Ricapitolando: nella ***equazione vettoriale*** del moto c'è contenuto sia *geometrico* sia *fisico*.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = R\cos(\omega_0 t) \\ y = R\sin(\omega_0 t) \\ z = R/2 \end{cases}$$

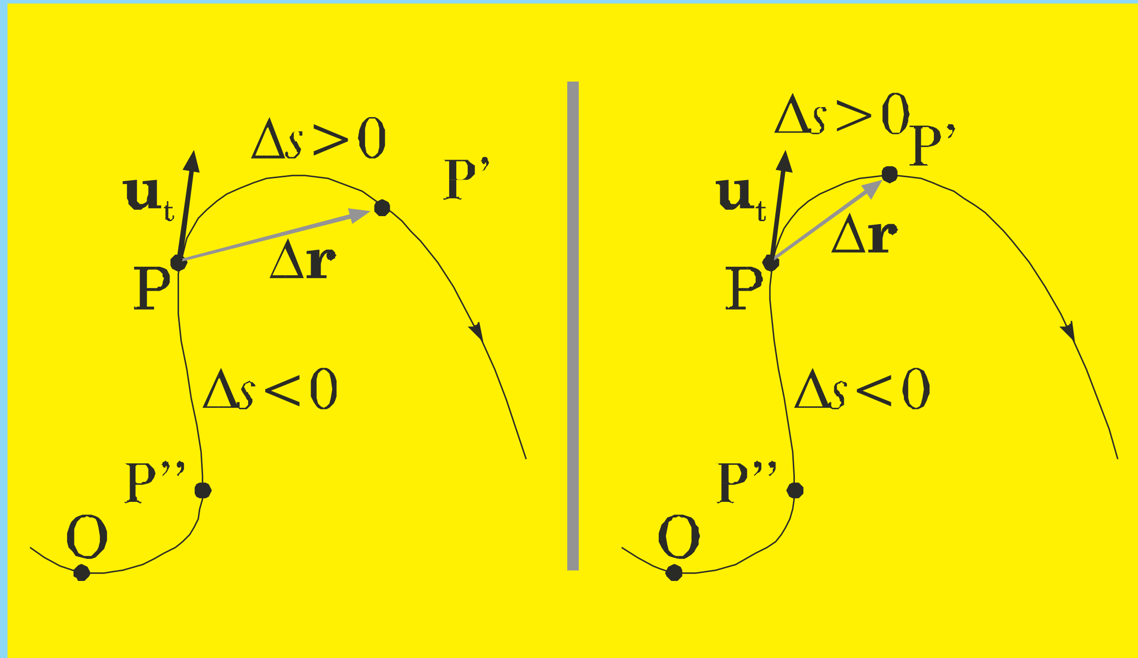
Possiamo separare la parte geometrica, utilizzando come parametro l'ascissa curvilinea:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = R\cos s/R \\ y = R\sin s/R \\ z = R/2 \\ s = (\omega_0 R)t \end{cases} , \quad \text{cioè anche} \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = R/2 \\ s = (\omega_0 R)t \end{cases}$$

(traiettoria esplicita e legge oraria).

Geometria in due dimensioni.

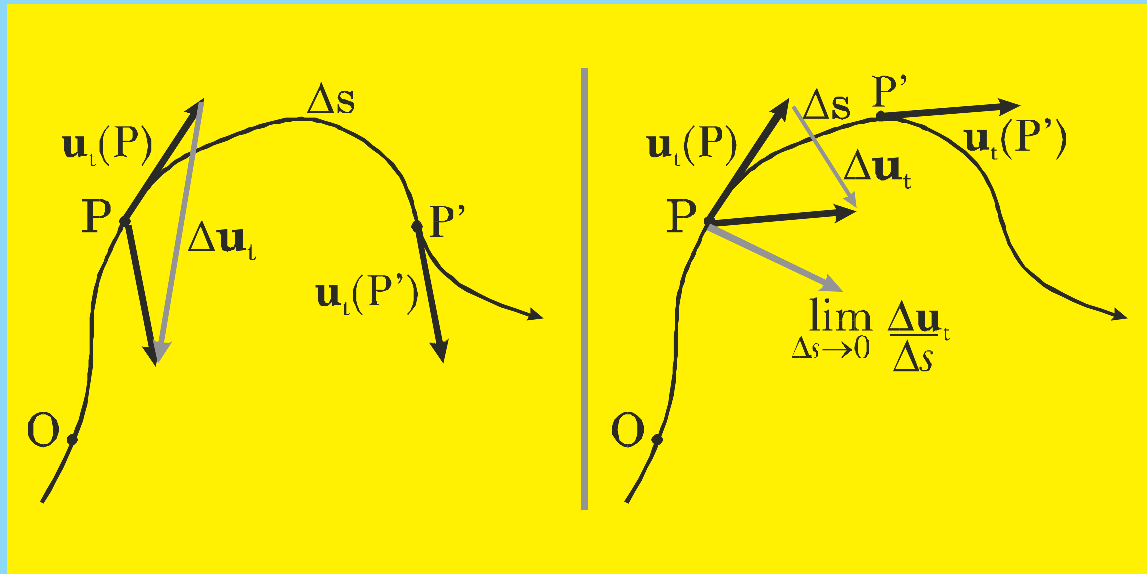
versore tangente a una curva (con origine e verso per le ascisse curvilinee), in P:



$$\mathbf{u}_t = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)_P ;$$

il verso è *concorde* con archi crescenti.

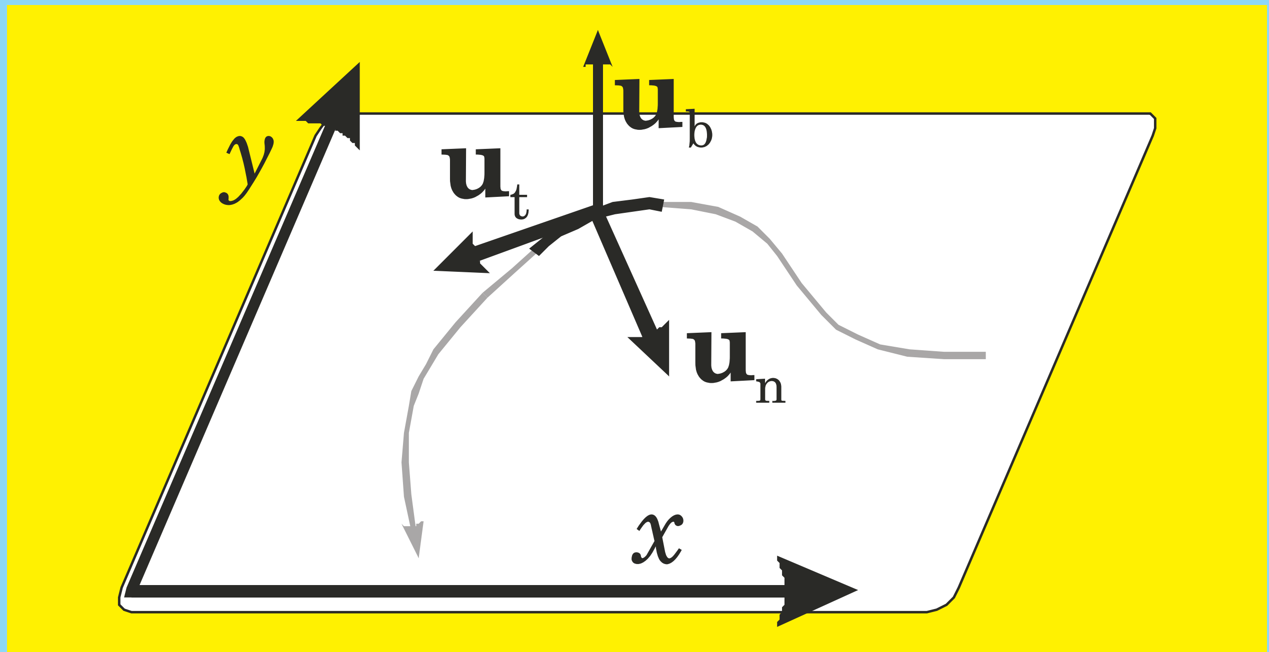
Versore normale ($\mathbf{u}_n$), in P: ha direzione perpendicolare a $\mathbf{u}_t$(P) e punta verso l'interno (concavità) della curva.



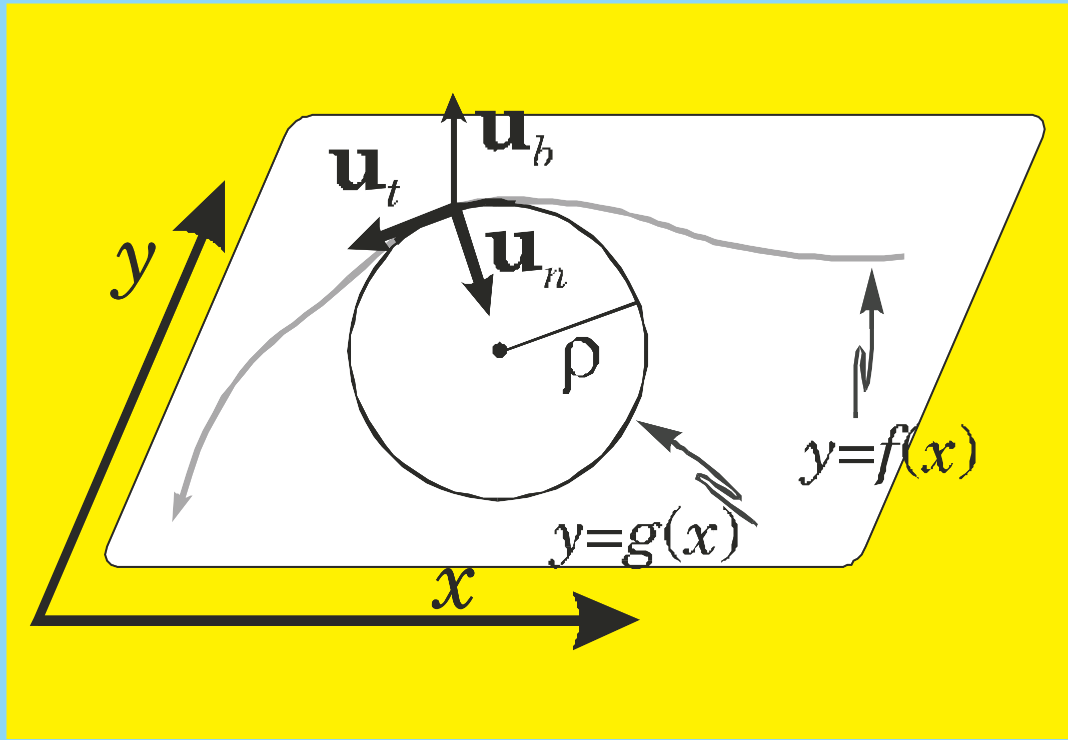
$$\mathbf{u}_n \propto \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{u}_t}{\Delta s} = \left(\frac{d\mathbf{u}_t}{ds}\right)_P$$

$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$ è detto ***versore binormale*** alla curva, in P.

($\mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{u}_b$) :
terna ortogonale destra,
detta ***terna intrinseca***
(*locale*).

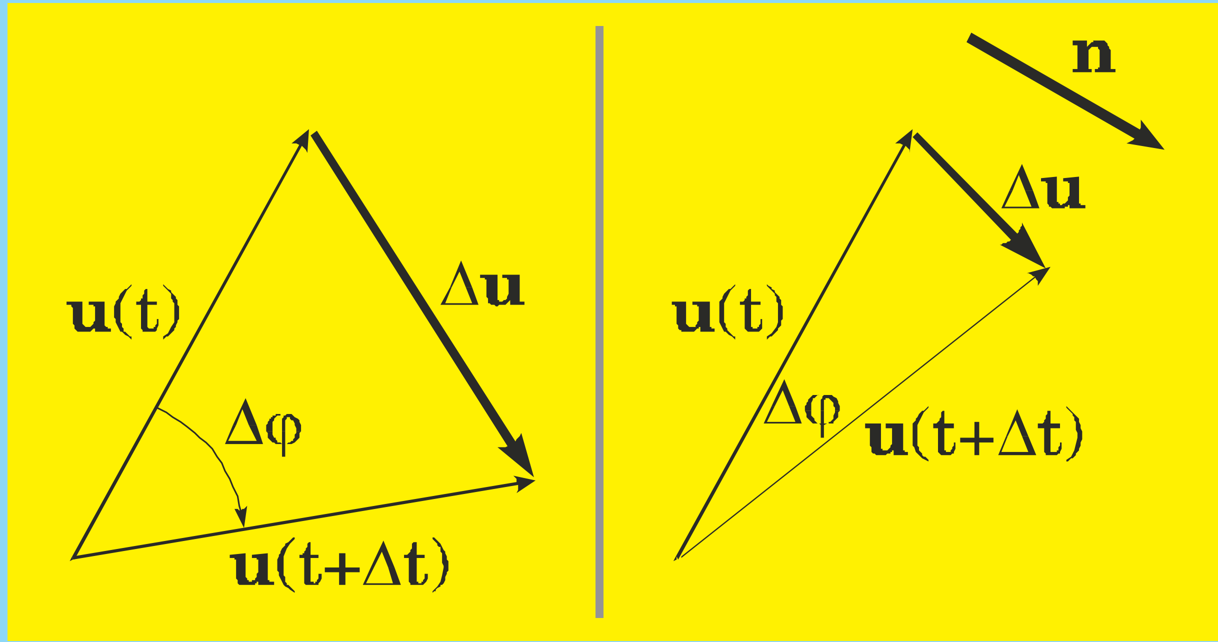


Circonferenza, che si confonde con la curva in un intorno di P, in seconda approssimazione.



cerchio osculatore (dalla parte concava della curva, in P).

Centro del cerchio osculatore: ***centro di curvatura*** (C);
raggio del cerchio osculatore: ***raggio di curvatura*** ρ



Dunque: $$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n} \quad \left(\Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\mathbf{n} \right)$$

nella quale **n** è il versore che :

i) giace sul piano contenente $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{u}(t+dt)$;

ii) è perpendicolare a **u**, dalla parte di $\mathbf{u}(t+dt)$.

Attenzione: la derivata di **u** non è un versore!

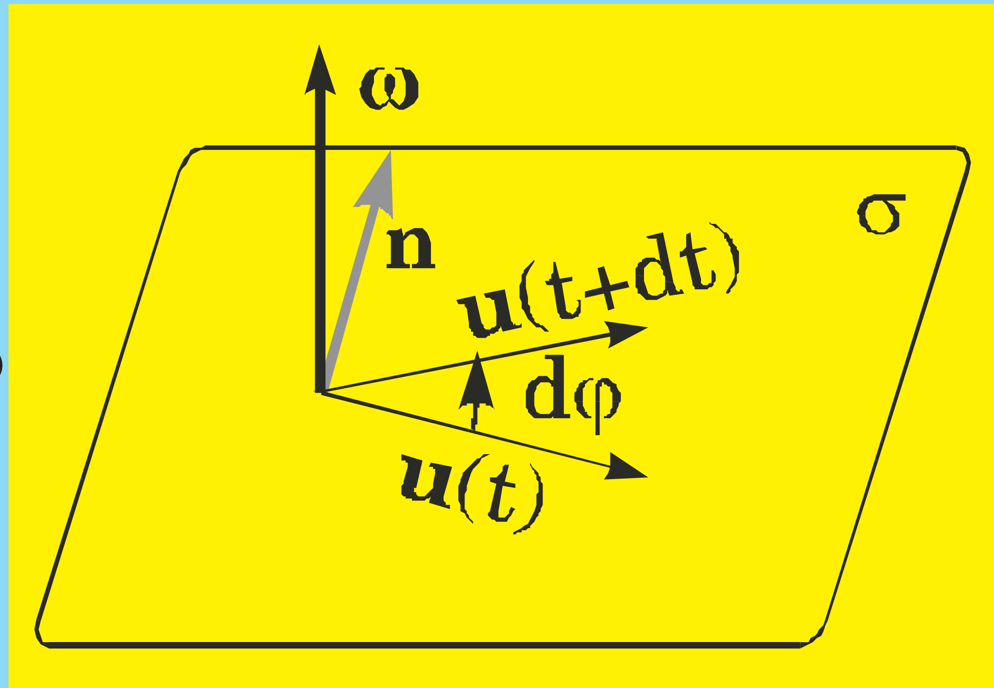
Espressione equivalente di $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$.

Definiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$:

i) ha modulo $\dfrac{d\varphi}{dt}$;

ii) direzione perpendicolare a

iii) verso tale da *vedere* la rotazione infinitesima di $\mathbf{u}(t)$ verso $\mathbf{u}(t+dt)$ come antioraria.



$\Rightarrow$ il versore di $\boldsymbol{\omega}$ è uguale al prodotto vettoriale di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{n}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad .$$

Derivata di un generico vettore $\mathbf{w}(t) = w\,\mathbf{u}_w$

anche il modulo può dipendere da t.

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(\,w\,\mathbf{u}_w\,) = \frac{dw}{dt}\mathbf{u}_w + w\,\frac{d\mathbf{u}_w}{dt} = \frac{dw}{dt}\mathbf{u}_w + w\,\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n}$$

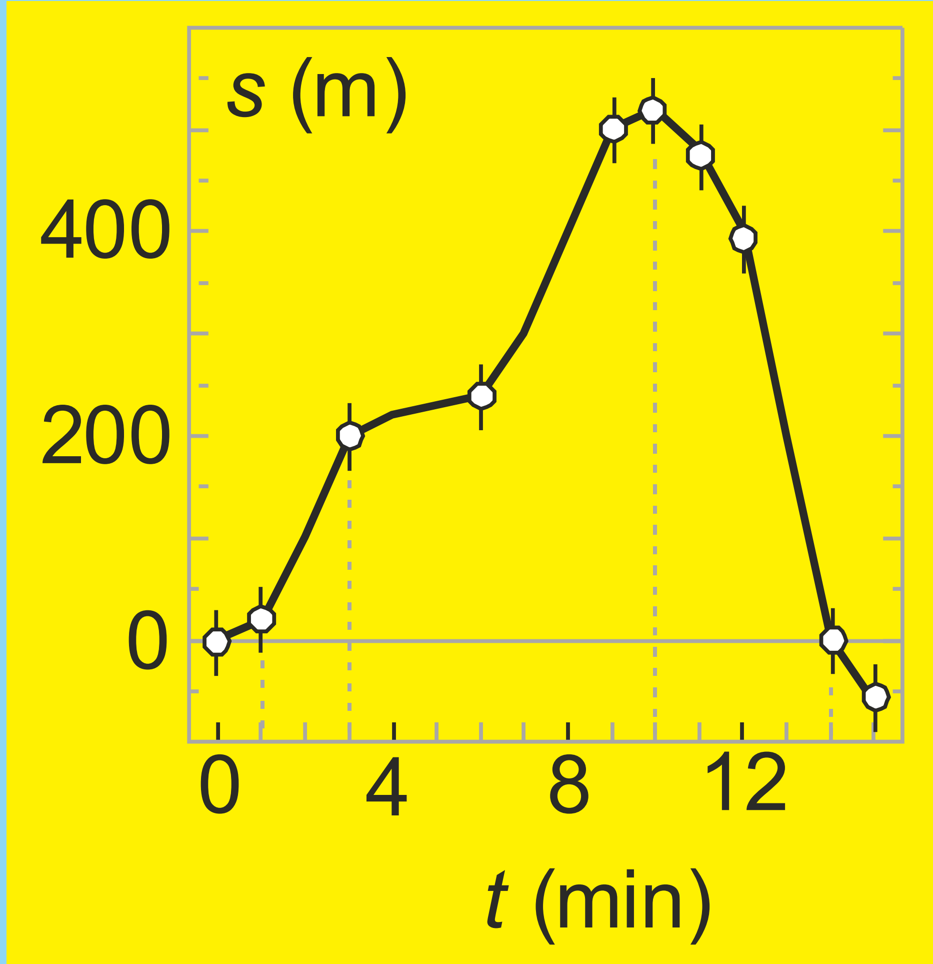
nella quale $\mathbf{n}$ è perpendicolare a $\mathbf{u}_w$; e quindi:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw}{dt}\mathbf{u}_w + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w} \qquad .$$

Il ***primo addendo*** riflette la (eventuale) variazione del modulo di $\mathbf{w}$;

il ***secondo*** è presente solo se $\mathbf{w}$ cambia direzione e/o verso (ed è quindi collegato con la *rotazione* del versore di $\mathbf{w}$).

Introduzione al concetto di velocità.



$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

definizione!!

Rappresentazione intrinseca: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\,\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\mathbf{u}_t$.

$v_s = \dfrac{ds}{dt}$ ***velocità scalare*** (si ottiene dalla legge oraria)

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{u}_t \equiv v_s \mathbf{u}_t \equiv \dot{s}\,\mathbf{u}_t \quad .$$

Rappresentazione cartesiana: $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}$.

Cioè $\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$

Accelerazione

accelerazione media : $\quad \mathbf{a}_m = \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

accelerazione *(istantanea)* : $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}$$

. *Unità di misura SI è il* $\dfrac{\mathrm{m}}{s^2}$.

Espressione *cartesiana*:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

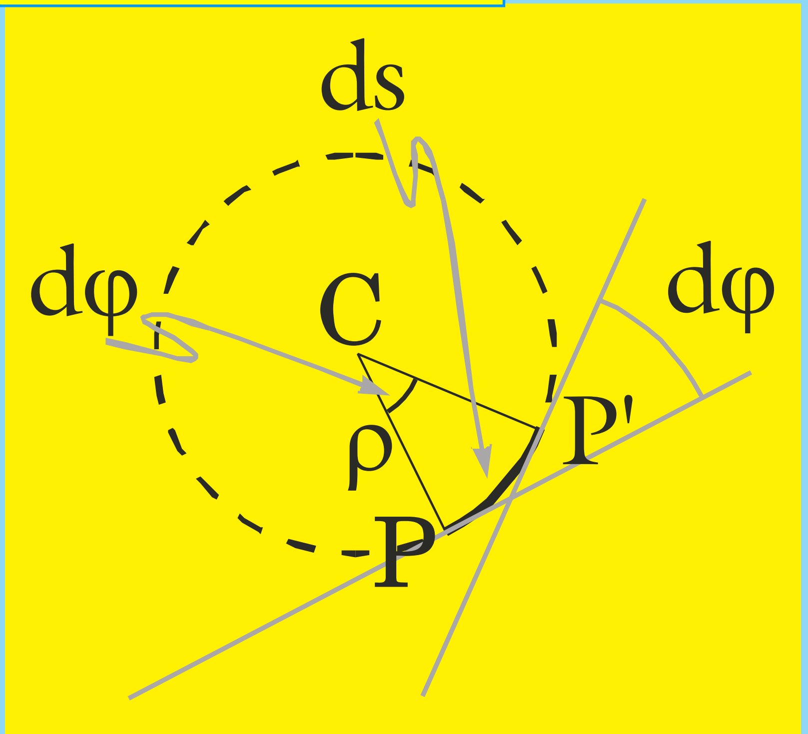
e cioè $\quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} \quad .$

Espressione *intrinseca*:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \mathbf{u}_t) = \frac{dv_s}{dt}\mathbf{u}_t + v_s \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$$

$v_s = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow$ primo termine: $\mathbf{a}_t = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\mathbf{u}_t \equiv \ddot{s}\,\mathbf{u}_t$ ***accel. tangenziale***

Secondo termine:



$\mathbf{a}_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{u}_n$ ***acc. normale*** o ***centripeta***.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \ddot{s}\,\mathbf{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$

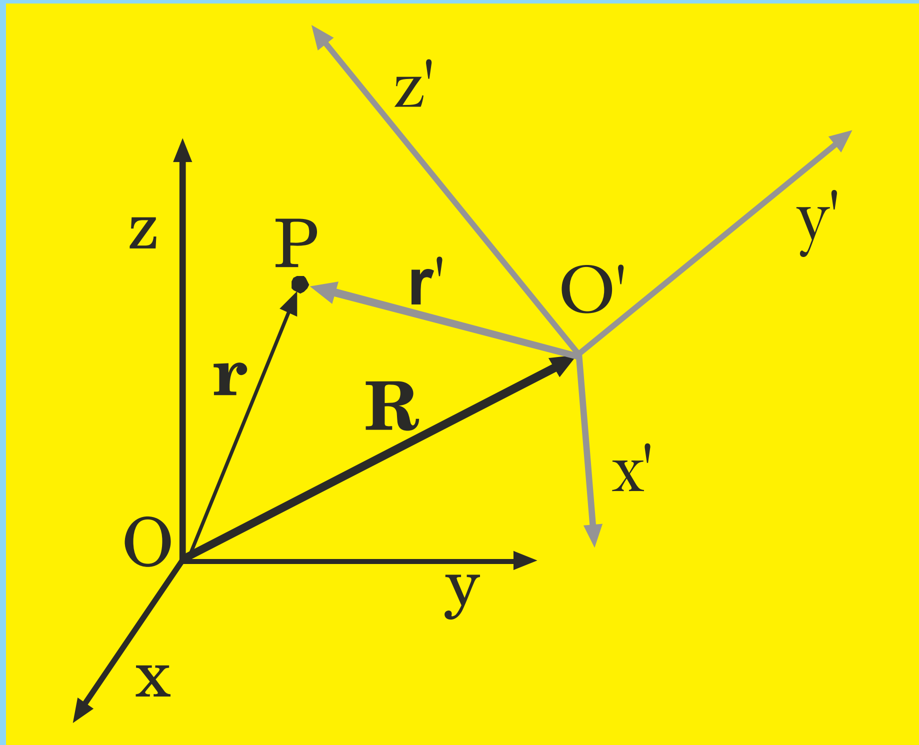
Riassumendo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{cases} \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \dot{s}\mathbf{u}_t \end{cases}. \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{cases} \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \\ \ddot{s}\mathbf{u}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{u}_n \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\,dt \\ \Delta\mathbf{v} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}\,dt \end{aligned}.$$

Cinematica dei moti relativi.

Trasformazione ***classiche*** di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ *di uno stesso corpo* fra due diversi sistemi di riferimento, in moto relativo l'uno rispetto all'altro. $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$



Ipotesi: lo ***spazio*** e il ***tempo*** sono *assoluti*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_\tau \quad \text{ove}$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_S \text{ in S ; } \quad \mathbf{v}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{S'} \text{ in S'}$$

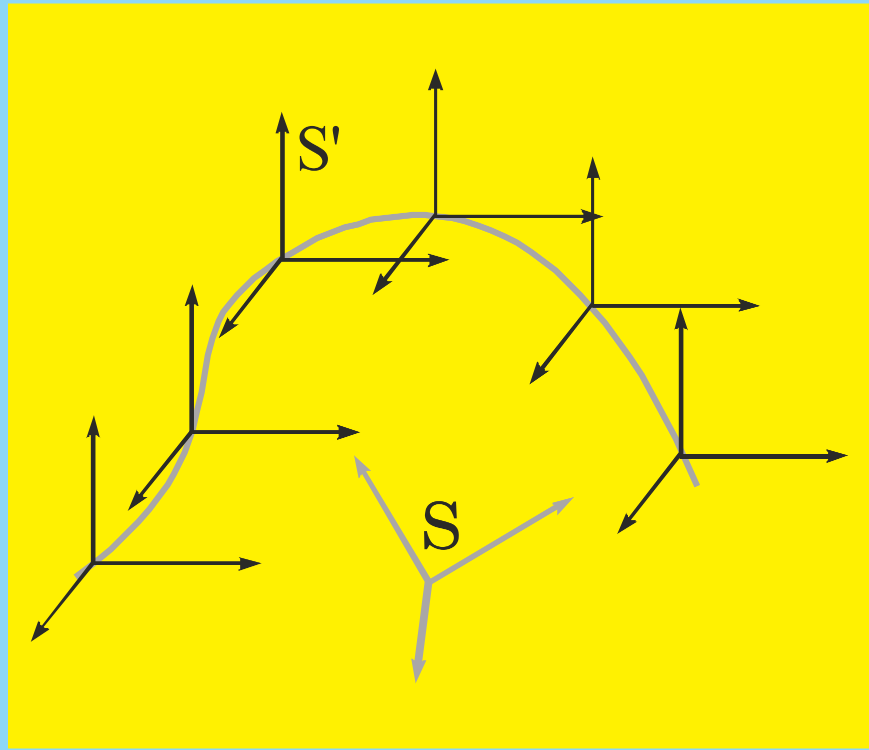
$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'(t) \quad \text{ove} \quad \mathbf{V} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_S$$

velocità di trascinamento:
dipende dal moto relativo dei due sistemi e *inoltre* dalla particolare posizione occupata dal punto.

Casi particolari:

$a)\ \boldsymbol{\omega} = 0\ :\quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{V}(t)\quad .$

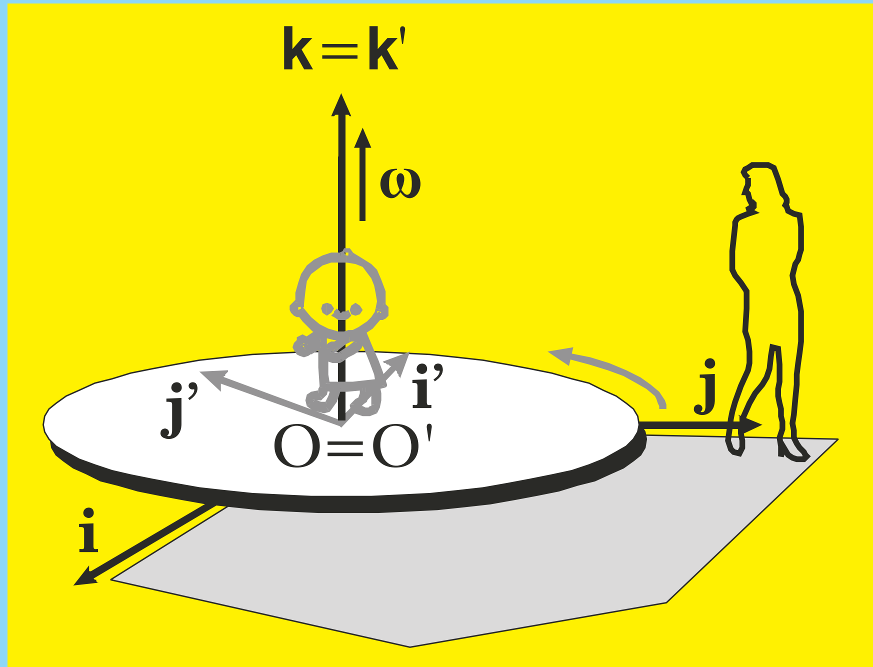
S' effettua un moto di ***traslazione*** rispetto a S, con velocità $\mathbf{V}(t)$.



$b)\ \mathbf{V}(t)=0\ :\ \mathbf{v}_\tau = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\ .$

Velocità di un punto materiale che si muove in S di moto circolare, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$, sulla circonferenza di asse (variabile nel tempo) parallelo a $\boldsymbol{\omega}(t)$ e passante per O':

moto di ***rotazione*** .



Caso generale:

moto di ***rototraslazione***.

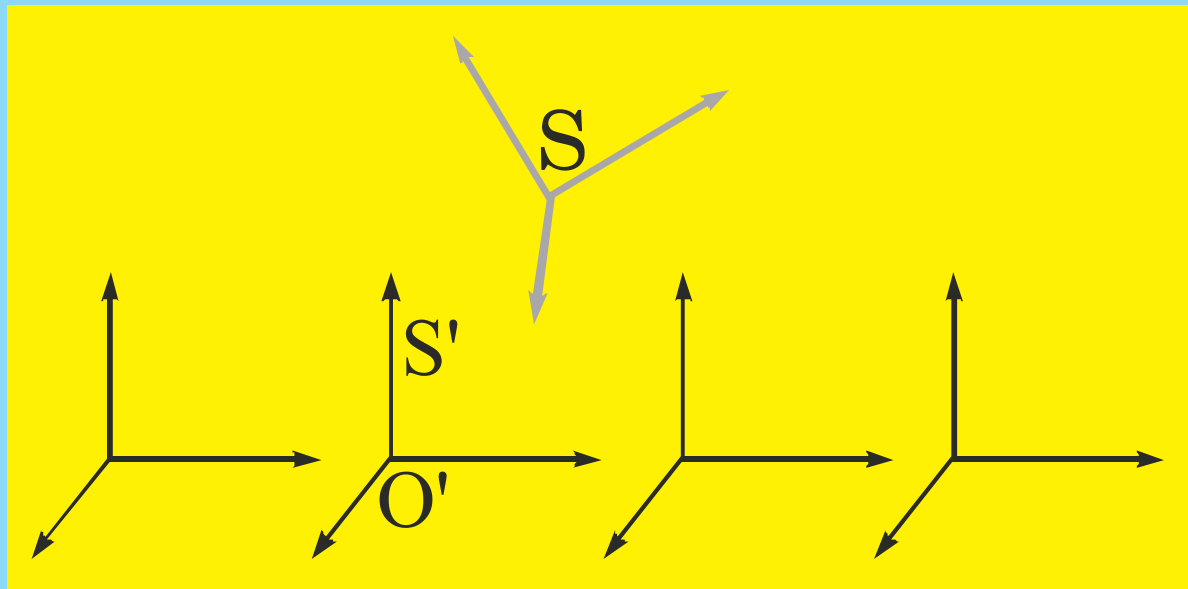
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_{co} \qquad \text{ove}$$

$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$ ***accelerazione di trascinamento***,

$\mathbf{a}_{co} = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ***accelerazione di Coriolis*** (o *complementare*)

Moto relativo di traslazione rettilinea:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad ; \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}$$



Trasformazioni di Galileo

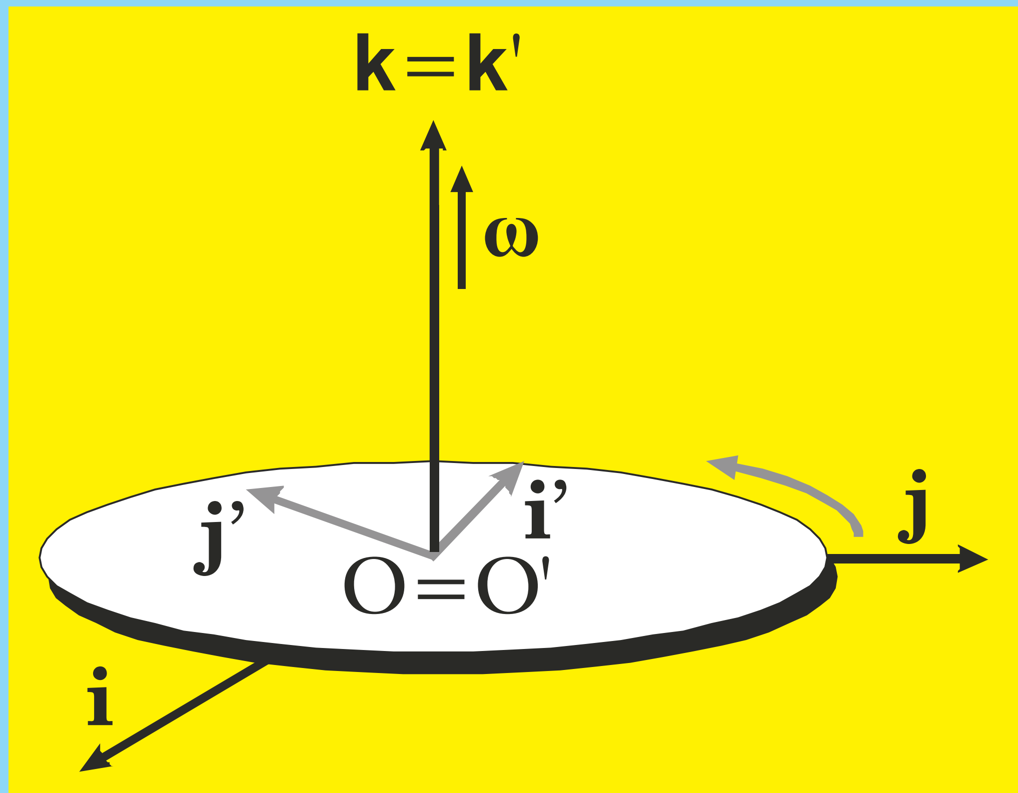
Caso particolarmente semplice: **V**=cost $\Rightarrow$ S' ha, rispetto a S, un moto di traslazione *rettilinea e uniforme*.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}\,t \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}\,t' \\ t = t' \end{cases} .$$

Legge di composizione classica delle velocità: ***la velocità*** *in generale* ***non è invariante*** *per trasformazioni di Galileo.*

*L'****accelerazione è invariante*** *per le trasformazioni di Galileo.*

Se invece c'è una rotazione, una traiettoria rettilinea diventa curva.



Riassunto:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ equazione vettoriale del moto

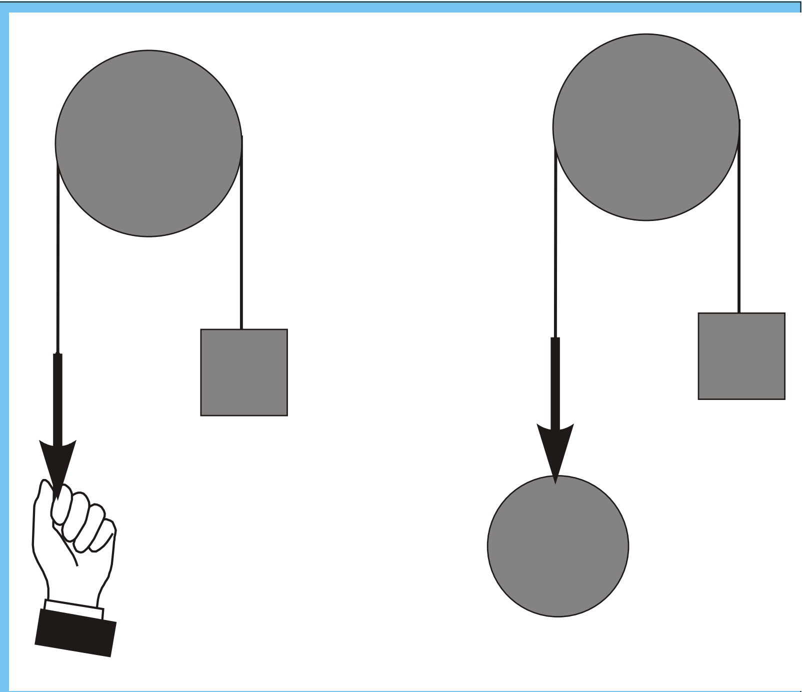
$s = s(t)$ legge oraria

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{cases} \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} \\ \dot{s}\,\mathbf{u}_t \\ \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt + \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_\tau \quad ; \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_{co}$$

LAVORO E ENERGIA

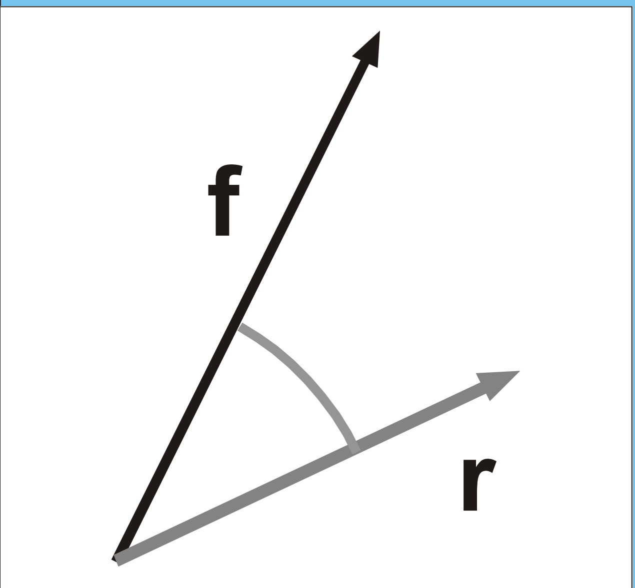


Lavoro: con uno sforzo muscolare spostiamo un corpo.

Siamo noi a fare lavoro (applichiamo una forza); oppure lo fa un’altra forza (peso).

Lavoro di una forza uniforme:

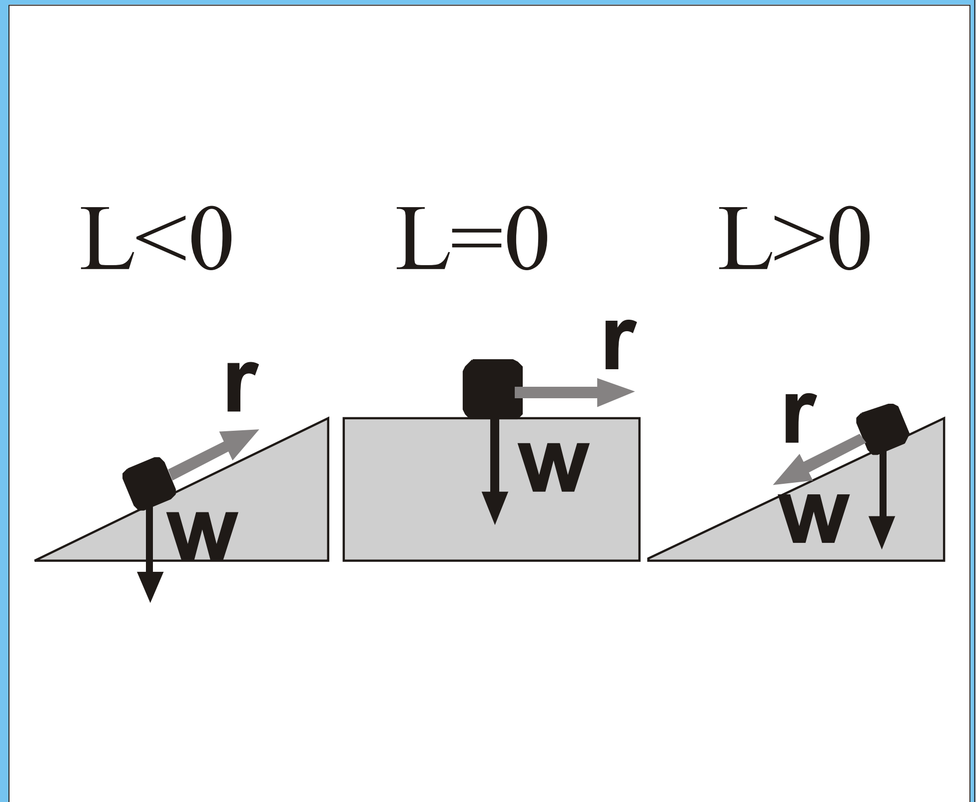
$$L_{AB} \quad \mathbf{f} \;\; \mathbf{AB} \quad \mathbf{f} \;\; (\mathbf{r}_B \quad \mathbf{r}_A) \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{r}$$



Lavoro negativo (resistente), nullo o positivo (motore)

Caso generale:

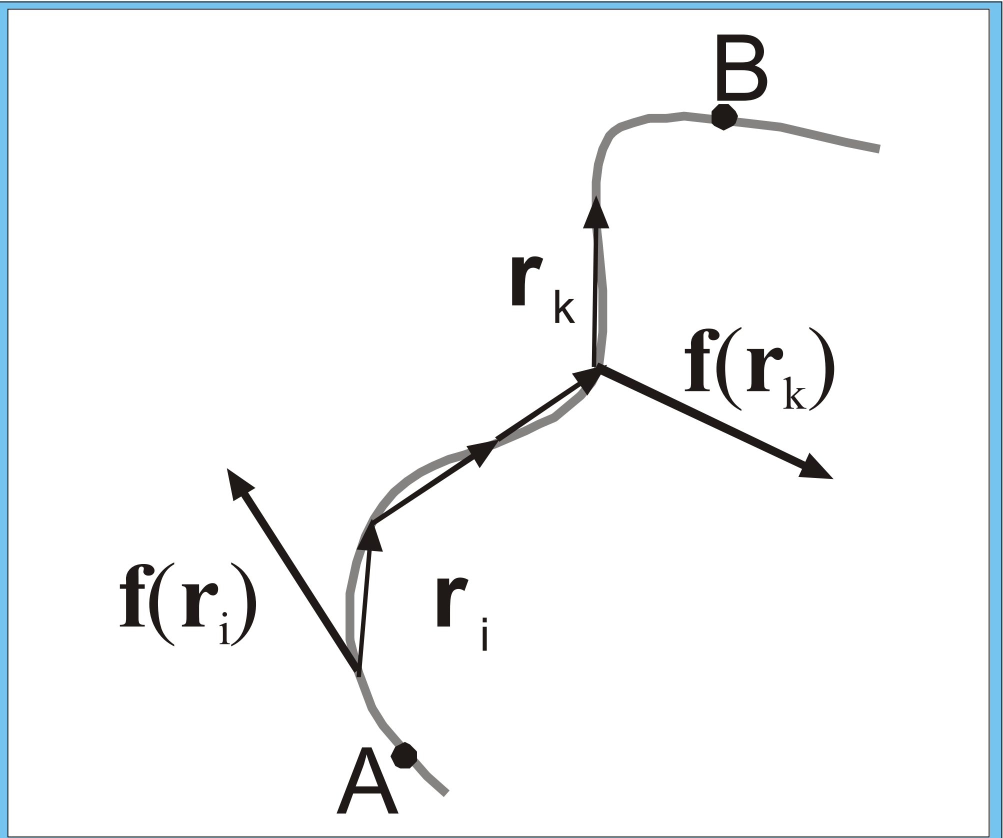
$$L_{AB} \quad \underset{i}{} \; \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) \quad \mathbf{r}_i$$



$$L \quad \mathbf{f} \quad d\mathbf{r}$$

Non è un differenziale esatto

$$L_{AB} \quad {}_{A}^{B} \mathbf{f} \quad d\mathbf{r}$$



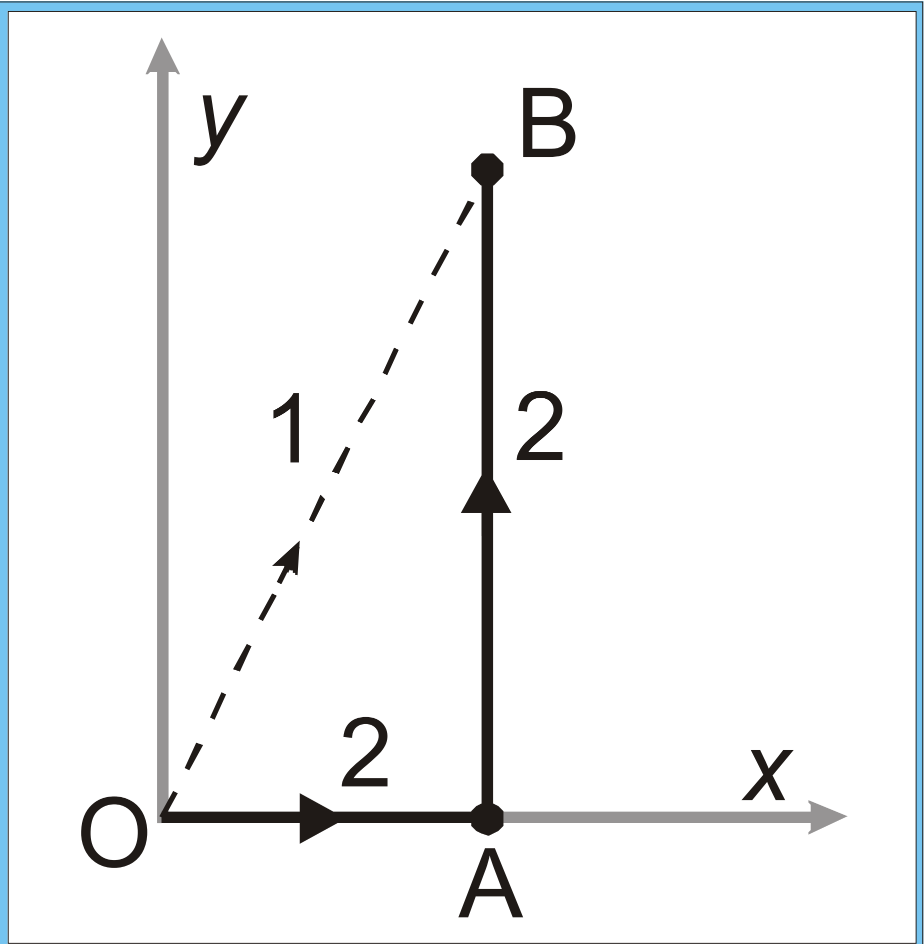
Se ci sono più forze:

$$L_{AB} \quad {}_{A}^{B} \mathbf{f} \quad d\mathbf{r} \qquad {}_{A}^{B} \; {}_{i} \; \mathbf{f}_i \quad d\mathbf{r} \qquad {}_{i} \; {}_{A}^{B} \mathbf{f}_i \quad d\mathbf{r} \qquad {}_{i} \; L_{AB}^{i}$$

Dimensioni: [L^2 M T^{-2}] ; Unità SI: *joule* (abbreviato J).

Il lavoro non è funzione di stato

$\mathbf{f} \quad a\,x\,y\,\mathbf{i} \quad 3\,b\,\mathbf{j}$



$$L_1 \quad {}_1\,{}_O^{B}\,\mathbf{f} \;\; d\mathbf{r} \quad {}_1\,{}_0^{3}\,axy\,dx \quad {}_1\,{}_0^{6}\,3b\,dy$$

$$\quad {}_1\,{}_0^{3}\,ax(2x)\,dx \quad {}_1\,{}_0^{6}\,3b\,dy$$

$$\quad 2a \;{}_0^{3}\,x^2\,dx \quad 3b \;{}_0^{6}\,dy \quad 2a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \quad 3b\,[y]_0^6$$

$$\quad 18a \quad 18b \quad 18(a \quad b)$$

$$L_2 \quad L_{OA} \quad L_{AB} \quad {}_2\,{}_O^{A}\,\mathbf{f} \;\; d\mathbf{r} \quad {}_2\,{}_A^{B}\,\mathbf{f} \;\; d\mathbf{r}$$

$$\quad {}_2\,{}_0^{3}\,axy\,dx \quad {}_2\,{}_0^{0}\,3b\,dy \quad {}_2\,{}_3^{3}\,axy\,dx \quad {}_2\,{}_0^{6}\,3b\,dy \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3b\,[y]_0^6 \quad 18b$$

Applicando una forza cambia la velocità.

Se **f** è il risultante: $L \quad \mathbf{f} \; d\mathbf{r} \quad m\mathbf{a} \; d\mathbf{r} \quad m\mathbf{a} \; \mathbf{v}dt$

$$L \quad m(\ddot{s}\,\mathbf{u}_t \quad \frac{\dot{s}^2}{\;}\mathbf{u}_n)\;(\dot{s}\,\mathbf{u}_t)dt \quad m\ddot{s}\dot{s}\,dt \quad d\;\frac{1}{2}mv^2$$

Dunque $L \quad dK$ con $K \quad \frac{1}{2}mv^2 \quad \frac{q^2}{2m}$

energia cinetica $(K \quad 0)$

$L_{AB} \quad K_B \quad K_A$ *teorema delle forze vive*

Lavoro variazione di energia.

Non è sempre vero che il lavoro dipende dal percorso.

Campo uniforme (indipendente da **r**):

$L_{AB} \quad {}_A^B\mathbf{f}\; d\mathbf{r} \quad \mathbf{f} \quad {}_A^B d\mathbf{r} \quad \mathbf{f} \quad \mathbf{r}$ dipende solo dagli estremi.

Quando avviene questo il ***campo di forze*** è ***conservativo***.

Ciò accade quando esiste $V(\mathbf{r})$ tale che $L \quad dV$.

Infatti $L_{AB} \quad {}_{A}^{B}dL \qquad {}_{A}^{B}dV \quad V_A \quad V_B \qquad V$

V : ***energia potenziale*** (posizionale)

Su un percorso chiuso: $L_{AB} \quad V_A \quad V_A \quad 0$

cioè $\circ\mathbf{f} \;\; d\mathbf{r} \quad 0$ (*circuitazione*).

Se il campo è conservativo (esiste V):

$$f_x dx \quad f_y dy \quad f_z dz \qquad (\frac{V}{x}dx \quad \frac{V}{y}dy \quad \frac{V}{z}dz)$$

(differenziale *esatto*).