FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Introduzione alla Relatività Ristretta
V parte

http://www.fondazioneocchialini.it

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 4 Maggio 2009

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Quantità di Moto ed Energia

Richiami di dinamica classica.

Quantità di Moto

- Si definisce **quantità di moto** $\vec{Q}$ di un **punto materiale** il prodotto:

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

- Per un **sistema materiale qualsiasi** (costituito da n punti materiali) è invece la somma vettoriale:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

- In particolare, per 2 punti:

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Il Secondo Principio

- Un punto materiale, sottoposto a una o più forze, si muove con **accelerazione** $\vec{a}$, **vettorialmente proporzionale alla risultante** $\vec{F}$ di tali forze:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (m \text{ costante})$$

- dove m è un coefficiente scalare di proporzionalità (detto **massa inerziale**) **caratteristico del punto materiale considerato** e indipendente dalla sua posizione e dalla sua velocità.
- Poiché sperimentalmente $\vec{F}$ e $\vec{a}$ risultano avere sempre lo stesso verso, segue che $m > 0$.
- Se m non fosse costante l'espressione $\vec{F} = m\vec{a}$ non sarebbe corretta.

Il Secondo Principio (II)

- Se la massa m è costante, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{Q}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{v}\right)=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}=m\vec{a}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}=m\vec{a}$$

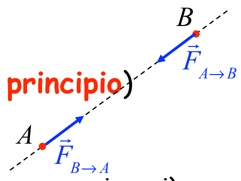
- Per cui il secondo principio della dinamica si può scrivere:

$$\boxed{\vec{F}=\dot{\vec{Q}}}$$ (**II principio** – **Legge di Newton**)

- In realtà questa espressione è **più generale** dell'espressione $\vec{F}=m\vec{a}$ e **vale anche nel caso in cui m varia nel tempo**:
  - m potrebbe cambiare in seguito a **reazioni chimiche** (razzo) o **nucleari** o a causa di **effetti relativistici** (velocità molto elevata).

Il Terzo Principio

- **Ogni volta che il corpo A esercita una forza sul corpo B, il corpo B esercita una forza sul corpo A**
  - **vettorialmente opposta**;
  - con la **stessa retta di azione**.



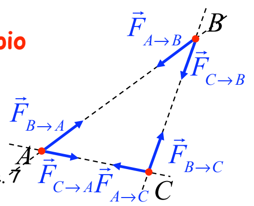
- (**principio di azione e reazione** o **terzo principio**)
- Esempi:
  - rinculo di una pistola.
  - barca a remi (si muove spingendo indietro l'acqua con i remi).
  - autoveicoli (si muovono spingendo indietro la strada mediante la forza di attrito).
  - aerei (si muovono spingendo indietro l'aria).
- N.B.: <u>azione e reazione si esercitano sempre su **corpi diversi**</u>.
- N.B.: Il III principio **non vale per le forze inerziali**.

Forze Interne

- **Forze interne**: forze di interazione esercitate da una parte del sistema meccanico in studio su di un'altra parte dello stesso sistema.
- Per il **III principio** esse sono a due a due opposte, con la medesima retta d'azione.
- Costituiscono, a due a due, **coppie di braccio nullo**. Segue per la risultante e il momento risultante delle forze interne:

$$\begin{cases}\vec{\mathscr{R}}^{(i)}=\vec{0}\\ \vec{\mathscr{M}}^{(i)}_{(O)}=\vec{0} & \forall O\end{cases}$$

(equivalente al **III principio della dinamica**)



Forze Esterne

- Quanto detto **non vale per le forze esterne**.
  - Alcune forze esterne possono essere di origine inerziale.
  - Si considerano le forze che corpi esterni esercitano sul nostro sistema ma non le forze che il nostro sistema esercita sui corpi esterni.
- Se la risultante e il momento risultante delle forze esterne sono entrambi nulli, si dice che il **sistema** è **isolato**.

$$\begin{cases}\vec{\mathscr{R}}^{(e)}=\vec{0}\\ \vec{\mathscr{M}}^{(e)}_{(O)}=\vec{0} & \forall O\end{cases}$$

(**sistema isolato**)

- Non sempre, tuttavia, i sistemi sono isolati.

Prima Equazione Cardinale della Dinamica

$$\boxed{\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$ Quantità di moto

- Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

- Infine sfruttando il II principio si ha:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{\mathscr{R}}$$

Prima Equazione Cardinale della Dinamica (II)

- Separando le forze esterne dalle forze interne:

$$\dot{\vec{Q}} = \cancel{\vec{\mathscr{R}}^{(i)}} + \vec{\mathscr{R}}^{(e)} = \vec{\mathscr{R}}^{(e)}$$

$$\boxed{\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathscr{R}}^{(e)}}$$ (**prima equazione cardinale della dinamica**)

- Se la **risultante delle forze esterne è nulla**, si **conserva** (cioè rimane costante nel tempo) la **quantità di moto**:

$$\boxed{\vec{\mathscr{R}}^{(e)} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{Q} \equiv \text{cost}}$$ (**principio di conservazione della quantità di moto**)

Lavoro ed Energia

- I **princìpi della dinamica** sono **sufficienti** per determinare il moto di un sistema meccanico.
- Tuttavia risulta conveniente l'introduzione di **nuove grandezze fisiche** (lavoro ed energia) in quanto:
  - semplificano la soluzione di molti problemi dinamici.
    - Spesso si può determinare lo stato finale di un sistema senza bisogno di risolvere equazioni del moto (p. es.: problemi d'urto).
  - consentono di estendere la nostra comprensione fisica ad ambiti più ampi (termodinamica, meccanica relativistica, ecc.).
- Intuitivamente si può dire che l'**energia** è la **capacità di produrre lavoro** e che il **lavoro** è il **processo attraverso il quale una certa quantità di energia si trasferisce da un corpo a un altro**.
  - (definizione intuitiva ma autoreferenziale).

Lavoro

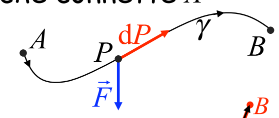
- Si definisce **lavoro infinitesimo** $\cancel{d}L$ compiuto da una forza $\vec{F}$ il **prodotto scalare**:

$$\boxed{\cancel{d}L = \vec{F} \bullet \mathrm{d}P = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z}$$

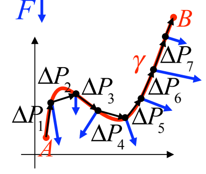
$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k} \\ \mathrm{d}P = \mathrm{d}x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}z\,\hat{k} \end{cases}$$

dove $\mathrm{d}P$ è lo **spostamento** infinitesimo del **punto di applicazione** della forza.

- Il **lavoro** $L_{\gamma(A,B)}$ di una forza $\vec{F}$ il cui punto di applicazione si sposta lungo la linea γ che connette A con B è l'integrale di linea:



$$\boxed{L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \bullet \mathrm{d}P}$$



Teorema delle Forze Vive

- Consideriamo un punto materiale P, di massa m, soggetto alla forza $\vec{F}$.

$$\not{d}L = \vec{F} \bullet \mathrm{d}P = m\vec{a} \bullet \mathrm{d}P = m\vec{a} \bullet \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t =$$
$$= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \bullet \vec{v}\,\mathrm{d}t = m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v} \bullet \vec{v}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

- Se le masse sono costanti (approssimazione non relativistica):

$$\not{d}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\mathrm{d}t$$

Teorema delle forze vive (II)

- Definita l'**energia cinetica**:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

si ha:

$$\not{d}L = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \not{d}L = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left[T(t)\right]_{t_A}^{t_B} = T(t_B) - T(t_A) = T_B - T_A$$

$$L_{\gamma(A,B)} = T_B - T_A$$ (**teorema delle forze vive**)

- Il **lavoro** compiuto da **tutte le forze** che agiscono su di un sistema meccanico, nel passaggio da una configurazione A a una configurazione B è **uguale** alla corrispondente **variazione dell'energia cinetica** di tale sistema.

Forze Conservative

- Alcune forze **posizionali** (cioè che dipendono soltanto dalla posizione) hanno la caratteristica di essere **conservative**.
- Il **lavoro di una forza conservativa <u>non</u> dipende dal percorso**, ma soltanto dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale B.
- Per ogni forza conservativa è definita una funzione delle coordinate, detta **Energia Potenziale** $V(x, y, z)$, tale che il lavoro di una forza conservativa è dato da:

$$L_{\gamma(A,B)} = V_A - V_B$$

Forze Conservative (II)

- In un sistema meccanico sottoposto a **vincoli ideali** e a **forze attive conservative**, l'**energia meccanica totale E si conserva**:

$$E = T + V \equiv \mathrm{cost}$$

(**principio di conservazione dell'energia meccanica**)

Quantità di Moto ed Energia

Dinamica relativistica.

La Generalizzazione Relativistica delle Leggi della Meccanica

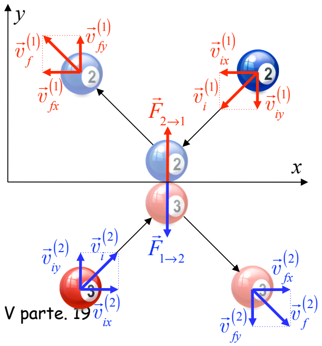
- **Principio d'inerzia** ereditato dalla meccanica classica:
  - Definisce la classe dei SdR inerziali e ne postula l'esistenza.
- **Covarianza** rispetto alle **trasformazioni di Lorentz**:
  - La nuova legge così soddisferà, automaticamente, il principio di relatività ed il postulato dell'invarianza della velocità della luce.
- Validità del **principio di corrispondenza**:
  - Grandezze e le leggi fisiche, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel limite di velocità piccole rispetto a quella della luce.

Conservazione della Quantità di Moto

- Consideriamo l'urto elastico in figura tra due sfere di uguale massa m.
- Consideriamo un SdR S in cui le due sfere abbiano inizialmente velocità opposte:

$$\vec{v}_i^{(1)} = -\vec{v}_i^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

- Quando le due sfere urtano, per i loro centri passa una retta parallela all'asse y.
- La forza d'urto F è perciò parallela all'asse y.
- Nell'urto si invertono perciò le componenti y delle velocità, mentre le componenti x restano invariate.



Conservazione della Quantità di Moto (II)

- In termini matematici:

$$\begin{cases} \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_f^{(1)} = -a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_f^{(2)} = a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

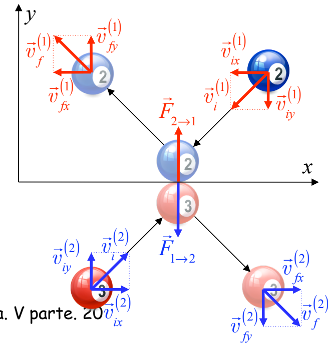
- La quantità di moto totale prima dell'urto è:

$$\vec{Q}_i = m\vec{v}_i^{(1)} + m\vec{v}_i^{(2)} = \\ = m\left[-a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

- Mentre dopo l'urto è:

$$\vec{Q}_f = m\vec{v}_f^{(1)} + m\vec{v}_f^{(2)} = \\ = m\left[-a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

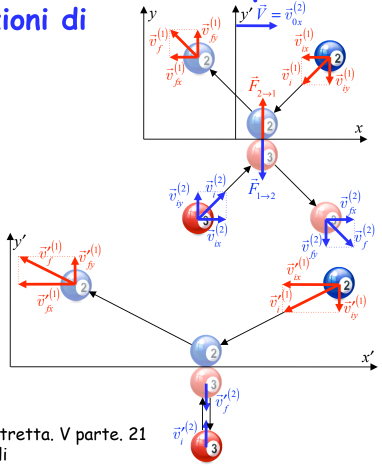
- Dunque la quantità di moto **si conserva** nell'urto.



Trasformazioni di Galileo

- Consideriamo ora lo stesso urto, visto in un **SdR S'** che si muove lungo l'asse x, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} v_{ix}'^{(1)} = v_{ix}^{(1)} - V = -a - a = -2a \\ v_{iy}'^{(1)} = v_{iy}^{(1)} = -b \\ v_{ix}'^{(2)} = v_{ix}^{(2)} - V = a - a = 0 \\ v_{iy}'^{(2)} = v_{iy}^{(2)} = b \\ v_{fx}'^{(1)} = v_{fx}^{(1)} - V = -a - a = -2a \\ v_{fy}'^{(1)} = v_{fy}^{(1)} = b \\ v_{fx}'^{(2)} = v_{fx}^{(2)} - V = a - a = 0 \\ v_{fy}'^{(2)} = v_{fy}^{(2)} = -b \end{cases}$$



Trasformazioni di Galileo (II)

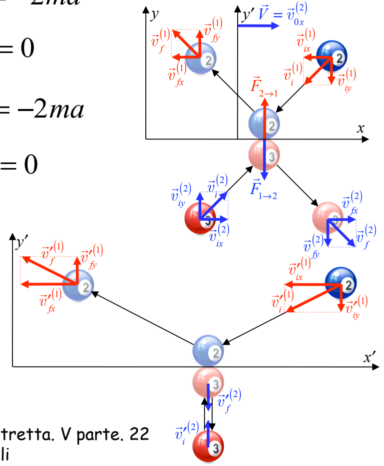
- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} Q_{ix}' = mv_{ix}'^{(1)} + mv_{ix}'^{(2)} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q_{iy}' = mv_{iy}'^{(1)} + mv_{iy}'^{(2)} = -mb + mb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{fx}' = mv_{fx}'^{(1)} + mv_{fx}'^{(2)} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q_{fy}' = mv_{fy}'^{(1)} + mv_{fy}'^{(2)} = +mb - mb = 0 \end{cases}$$

- Confrontando:

$$\left.\begin{matrix} Q_{ix}' = Q_{fx}' \\ Q_{iy}' = Q_{fy}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{Q}_i' = \vec{Q}_f'$$

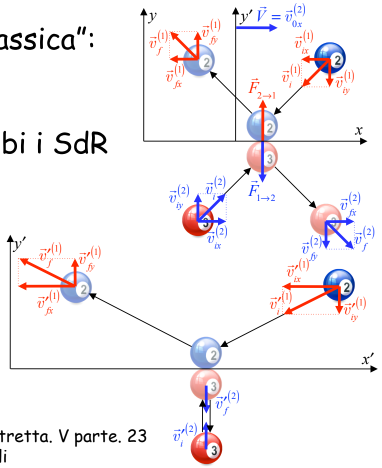


Trasformazioni di Galileo (III)

- La quantità di moto **si conserva** nell'urto anche nel **SdR S'**.
- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

si conserva nell'urto in entrambi i SdR considerati.

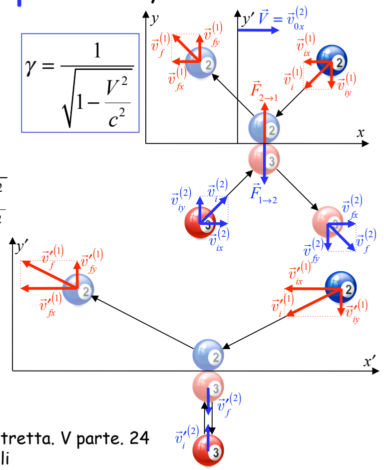


Trasformazioni di Lorentz

- Consideriamo ora lo stesso urto, visto nel **SdR S'** che si muove, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}$$

$$\begin{cases} v_{ix}'^{(1)} = \dfrac{v_{ix}^{(1)} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}^{(1)}} = \dfrac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \\ v_{iy}'^{(1)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v_{iy}^{(1)}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}^{(1)}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v_{ix}'^{(2)} = \dfrac{v_{ix}^{(2)} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}^{(2)}} = \dfrac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2} a} = 0 \\ v_{iy}'^{(2)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v_{iy}^{(2)}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}^{(2)}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a}{c^2} a} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$



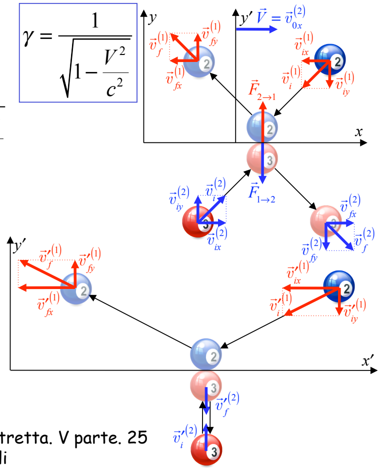
Trasformazioni di Lorentz (II)

- Analogamente, per le velocità finali:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{v^{(1)}_{fx} - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{-a-a}{1 - \dfrac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v^{(1)}_{fy}}{1 - \dfrac{V}{c^2} v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 - \dfrac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = \dfrac{v^{(2)}_{fx} - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{a-a}{1 - \dfrac{a}{c^2} a} = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v^{(2)}_{fy}}{1 - \dfrac{V}{c^2} v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \dfrac{a}{c^2} a} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}}$$



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

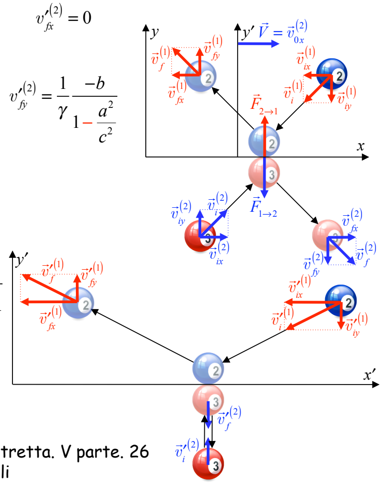
Trasformazioni di Lorentz (III)

- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = \dfrac{-2a}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{ix} = 0 \\ v'^{(1)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{-2a}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fx} = 0 \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{b}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-b}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = \dfrac{-2ma}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-mb}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{mb}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = \dfrac{-2ma}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{fy} = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{mb}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{-mb}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}}$$



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Trasformazioni di Lorentz (IV)

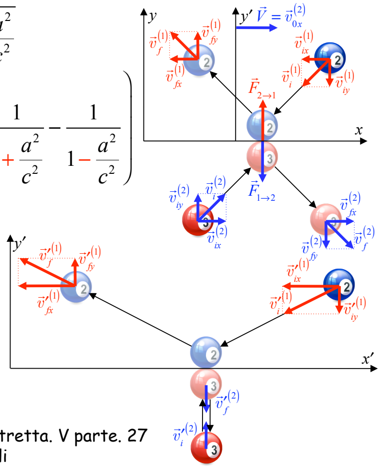
- Da cui:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\dfrac{2ma}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \dfrac{mb}{\gamma} \left(-\dfrac{1}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = -\dfrac{2ma}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{fy} = \dfrac{mb}{\gamma} \left(\dfrac{1}{1 + \dfrac{a^2}{c^2}} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases}$$

- Perciò:

$$\left.\begin{matrix} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} \neq Q'_{fy} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{Q}'_i \neq \vec{Q}'_f$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}}$$



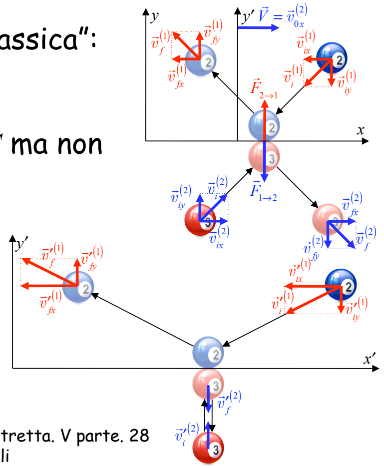
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Trasformazioni di Lorentz (V)

- La quantità di moto **non si conserva** nell'urto nel **SdR S'**.
- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

si conserva nell'urto nel SdR S ma non nel SdR S'.



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Quantità di Moto Relativistica

- Cerchiamo allora una **nuova definizione** di quantità di moto che:
  - Sia **invariante per trasformazioni di Lorentz**;
  - **Si riduca all'espressione classica** nel **limite** $v << c$ (principio di corrispondenza).
- Occorre che la componente y della quantità di moto sia **indipendente** dalla componente x della velocità del SdR in cui si osserva l'urto.

Quantità di Moto Relativistica (II)

- La componente y della quantità di moto classica si scrive, per un singolo punto materiale:

$$Q_y = mv_y = m\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

- Δy **non cambia** passando a un SdR in moto relativo lungo x, mentre **cambia** Δt.
- Potremmo allora prendere il **tempo proprio** τ invece del tempo t, perché $\Delta\tau$ **non cambia**.

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$Q_y = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = m\gamma\frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Quantità di Moto Relativistica (III)

- Definiamo allora la **quantità di moto relativistica**:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}}$$

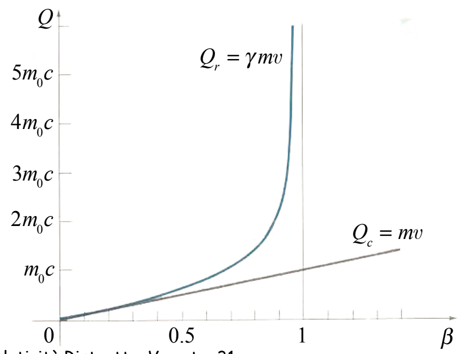
- Poiché

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow[v \ll c]{} 1$$

si ha:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} \xrightarrow[v \ll c]{} m\vec{v}$$

- Dunque il principio di **corrispondenza** è soddisfatto.

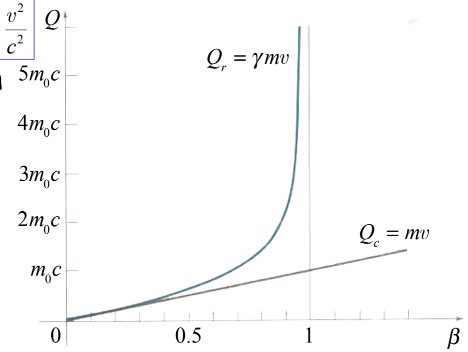


Quantità di Moto Relativistica (IV)

- La **quantità di moto relativistica** così definita:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

si conserva negli urti in tutti i SdR inerziali.



Massa Relativistica

- Possiamo anche esprimere la quantità di moto relativistica (detta m_0 la "massa classica"):

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

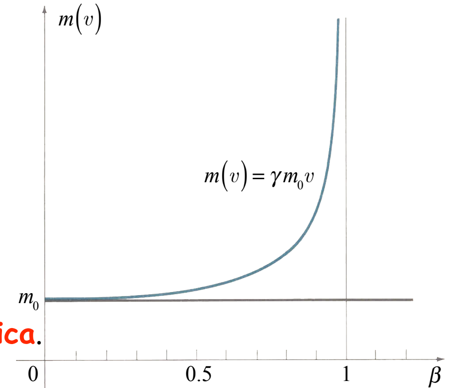
come:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v}$$

dove la quantità:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

è detta **massa relativistica**.

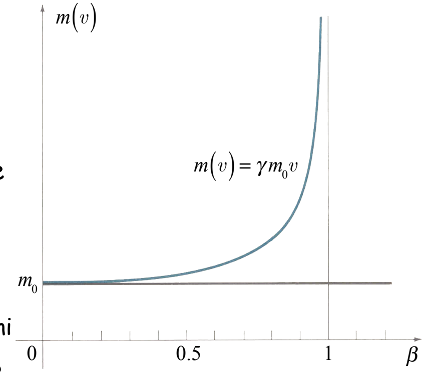


Massa Relativistica (II)

- Nell'espressione della **massa relativistica**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- la "massa classica" m_0 è anche la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.
- m_0 è perciò detta **massa a riposo** o **massa invariante**:
  - è invariante per trasformazioni di Lorentz in quanto per definizione è la massa nel SdR in cui il corpo è in quiete.

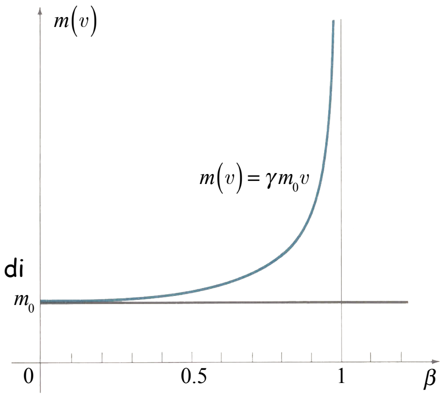


Massa Relativistica (III)

- L'**aumento relativistico della massa**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

  - è stato verificato in vari esperimenti di deflessione di elettroni;
  - è verificato inoltre nel funzionamento di tutti gli **acceleratori di particelle**.



Energia Relativistica

- Consideriamo l'identità matematica:

$$1 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

- La quantità $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2$ è un **invariante** per trasformazioni di Lorentz, essendo sempre uguale a 1.
- Moltiplicando la ambo i membri della relazione $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ per $m_0{}^2c^4$ (pure invariante) si ottiene:

$$m_0^2 c^4 \left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m_0^2 c^4$$

Energia Relativistica (II)

- Ricordando che $Q=\gamma m_0 v = m_0 c\gamma\beta$, ovvero:

  $$Q^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 \beta^2$$

  si ottiene l'invariante:

  $$m_0^2 c^4\left(\gamma^2-\beta^2\gamma^2\right)=m_0^2c^4$$
  $$m_0^2c^4\gamma^2 - m_0^2c^4\beta^2\gamma^2 = m_0^2c^4$$
  $$m_0^2c^4\gamma^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

- Consideriamo ora nel primo termine la quantità $\gamma m_0 c^2$:

Energia Relativistica (III)

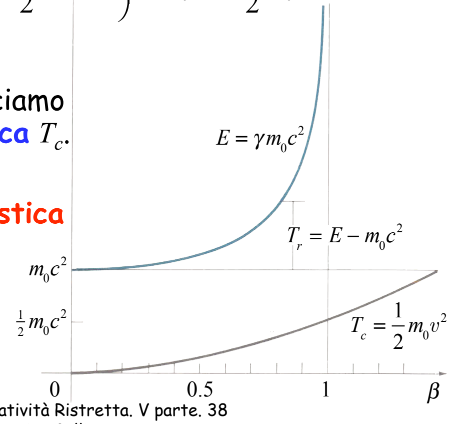
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1+\frac{1}{2}x$$

- Nel limite non relativistico $v \ll c$ si ha:

  $$\gamma m_0 c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \simeq m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\ldots\right) = m_0c^2 + \overbrace{\frac{1}{2}m_0v^2}^{T_c} + \ldots$$

- Nel **II termine** riconosciamo l'**energia cinetica classica** T_c.
- Possiamo allora definire l'**energia totale relativistica** come:

  $$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$



Energia Relativistica (IV)

- Potremo scrivere la precedente identità invariante:

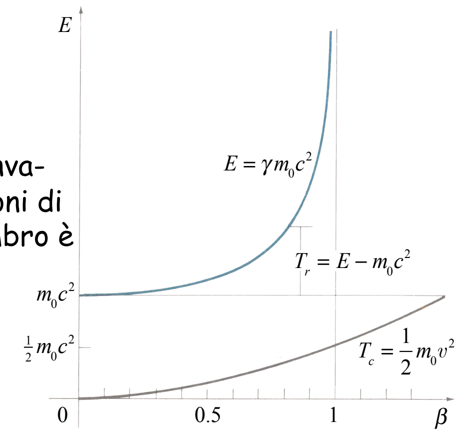
  $$m_0^2c^4\gamma^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

  come:

  $$E^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

- Essendo il II membro invariante per trasformazioni di Lorentz, anche il I membro è **invariante**:

  $$E'^2 - Q'^2c^2 = E^2 - Q^2c^2$$



Energia Relativistica (V)

- I 3 termini dell'equazione:

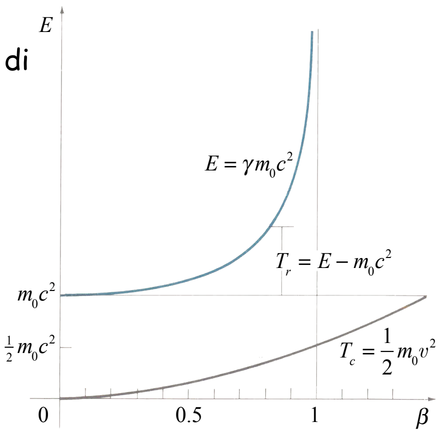
  $$E^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

  hanno tutti le dimensioni di un'energia al quadrato.

- Il termine:

  $$E_0 = m_0c^2$$

  è l'energia che il corpo possiede quando la sua velocità è nulla. È detto perciò **energia a riposo**.



$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1+\frac{1}{2}x$$

Energia Relativistica (VI)

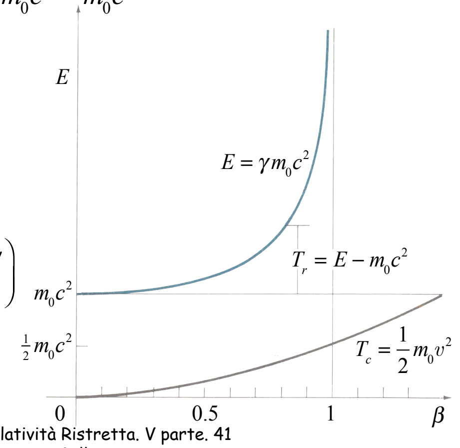
- L'**energia cinetica relativistica** si può scrivere come:

$$T_r = E - E_0 = E - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = \\ = (\gamma - 1)m_0c^2$$

- Come abbiamo visto:

$$T_r = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \xrightarrow[v \ll c]{} \\ \xrightarrow[v \ll c]{} m_0c^2\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\beta^2 + \ldots - \cancel{1}\right)$$

$$T_r \xrightarrow[v \ll c]{} T_c = \frac{1}{2}m_0v^2$$



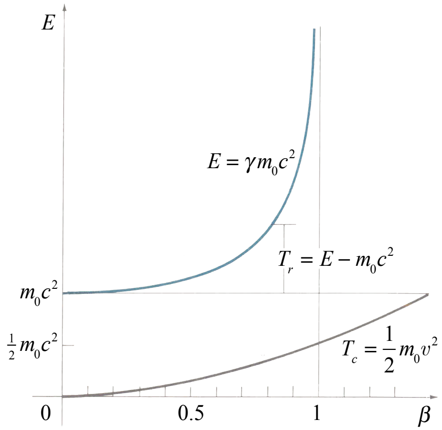
Energia Relativistica (VII)

- Si osservi inoltre che, dalle 2 definizioni:

$$\begin{cases} \vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda e ricavando Q si ottiene:

$$\vec{Q} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$



Energia Relativistica (VIII)

- Un corpo in **quiete** possiede un'energia **non nulla**:
  - Meccanica classica: l'energia è definita a meno di una **costante additiva arbitraria**.
  - La **relatività fissa** il valore di tale **costante** attribuendole un significato ben definito:
    - quantità di **energia contenuta nella massa** del corpo.
- Una parte dell'**energia a riposo**, o tutta, può **trasformarsi** in energia cinetica o in un'altra forma di energia.
- **Nuova legge di conservazione**.
  - **Generalizza** le due leggi classiche di conservazione:
    - Massa,
    - Energia meccanica.

Conservazione dell'Energia Relativistica

- Nella **Fisica Classica** l'**energia meccanica** si conserva.
- Nella **Chimica Classica** si conserva la **massa** (**principio di Lavoisier**).
- Nella **Fisica Relativistica** massa ed energia meccanica possono **non** conservarsi:
  - È possibile **conversione** di massa in energia o viceversa.
- Tuttavia si conserva la **somma dell'energia meccanica e della massa** (moltiplicata per c^2).

Conservazione dell'Energia Relativistica (II)

- Nei processi (relativistici) tra **nuclei** o **particelle** subnucleari le **trasformazioni di massa in energia cinetica** avvengono continuamente:
  - P. es., una particella può decadere in due particelle più leggere (somma masse < massa madre) e più veloci:
    - parte della **massa** della particella madre si è trasformata in **energia cinetica**.
  - Viceversa facendo scontrare 2 protoni ad altissima energia in un acceleratore di particelle si possono **ottenere particelle di massa molto superiore** alla somma delle masse dei 2 protoni:
    - parte dell'**energia cinetica** si è trasformata in **massa**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia

- Vogliamo ora trovare come cambiano quantità di moto ed energia nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
- Abbiamo definito la quantità di moto relativistica come:

$$Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

- Inoltre, dalle definizioni di energia e tempo proprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (II)

- Dalle espressioni:

$$E = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \quad Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

considerando che m_0, c e $\Delta\tau$ sono **invarianti** per trasformazioni di Lorentz, si vede che le 4 grandezze:

$$\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right)$$

si debbono trasformare, per trasformazioni di Lorentz, come le grandezze:

$$\left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right)$$

- Dunque la quaterna ordinata $\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right)$ è un **quadrivettore** dello spazio di Minkowsky.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (III)

- Dunque dalle trasformazioni delle coordinate troviamo le trasformazioni di energia e quantità di moto:

$$\begin{cases} ct \to \frac{E}{c} \\ x \to Q_x \\ y \to Q_y \\ z \to Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q'_x = \gamma\left(Q_x - \beta \frac{E}{c}\right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (IV)

- Avremo in conclusione, per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{c} = \gamma\left(\dfrac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q'_x = \gamma\left(Q_x - \beta\dfrac{E}{c}\right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{E}{c} = \gamma\left(\dfrac{E'}{c} + \beta Q'_x\right) \\ Q_x = \gamma\left(Q'_x + \beta\dfrac{E'}{c}\right) \\ Q_y = Q'_y \\ Q_z = Q'_z \end{cases}$$

Il Secondo Principio della Dinamica

- Detto anche "legge di Newton", in meccanica classica (essendo m costante) si scrive:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

- In meccanica relativistica occorre considerare che la massa dipende dalla velocità:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} = m\vec{a} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}$$

- Forza e accelerazione <u>non</u> hanno più la stessa direzione.
- La forza ha una componente parallela all'accelerazione e una componente parallela alla velocità.