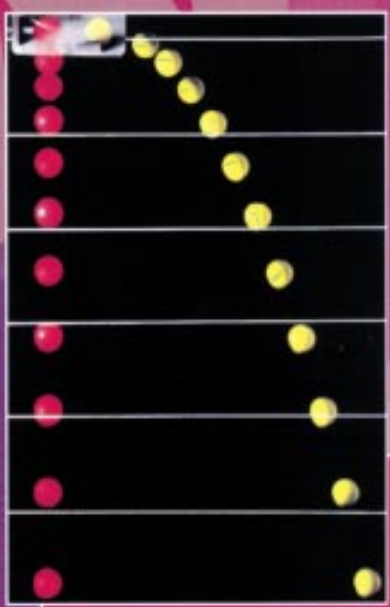


# FISICA GENERALE

## MECCANICA E TERMODINAMICA

S. FOCARDI  
I. MASSA  
A. UGUZZONI



CASA EDITRICE AMBROSIANA

## CAPITOLO 15

ELEMENTI DI MECCANICA  
RELATIVISTICA

## Compendio

Le previsioni della Meccanica classica non sono confermate sperimentalmente a velocità molto elevate ed esiste un limite per la velocità che le particelle possono raggiungere: la velocità della luce nel vuoto, che è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, in contrasto con le leggi di trasformazione classiche. La costanza della velocità della luce e l'equivalenza dei riferimenti inerziali sono i Principi di base della teoria della Relatività di Einstein. Le corrispondenti trasformazioni, da un riferimento inerziale a un altro, devono differire da quelle di Galileo, il che implica una revisione dei concetti classici di tempo e di spazio. Un'analisi delle definizioni operative di simultaneità, di intervallo temporale e di lunghezza, evidenzia il loro carattere relativo: ne conseguono gli effetti di dilatazione del tempo e di contrazione delle lunghezze. Dai Principi della Relatività, e dalle proprietà di omogeneità dello spazio e del tempo, si deducono le leggi di trasformazione di Lorentz, di cui quelle di Galileo risultano il limite per basse velocità. Si ricavano anche le leggi di trasformazione della velocità e dell'accelerazione: poiché quest'ultima non è invariante, le leggi della Meccanica devono essere modificate per diventare compatibili con i Principi della Relatività. Ridefinendo opportunamente la quantità di moto, si trova che essa è collegata alle forze come nella Meccanica newtoniana e che la sua conservazione (in un sistema isolato) rimane valida in ogni riferimento inerziale. Si determina una nuova espressione dell'energia cinetica, valida ad alte velocità. Analizzando processi di urto anelastico, si giustifica l'espressione dell'energia di una particella libera come somma dell'energia cinetica e di una energia "a riposo" associata alla massa: alla variazione dell'energia cinetica se ne accompagna una, di segno opposto, per l'energia a riposo (esempio dell'equivalenza massa-energia). Discusso questo importante aspetto della teoria di Einstein, se ne illustrano diverse conseguenze sperimentalmente verificate nella Fisica nucleare e delle particelle elementari.

## 15-1 Introduzione

Il modello di Universo comunemente accettato fino al XIX secolo è quello di Galileo e di Newton: un Universo governato dai tre Principi della Dinamica e dal Principio di relatività galileiana. Il fatto che quest'ultimo riguardasse i fenomeni meccanici non era considerato in realtà una limitazione, in quanto ogni fenomeno fisico conosciuto veniva di fatto ricondotto alla Meccanica. Verso la fine del XIX secolo divenne tuttavia evidente la difficoltà di rendere consistenti con questo schema i fatti sperimentali e le leggi dell'elettromagnetismo e dell'ottica. La soluzione del problema fu trovata da Einstein con la formulazione della teoria della Relatività, di cui esporremo in questo capitolo alcuni elementi essenziali.

L'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali comporta che le Leggi della Meccanica mantengano la stessa forma nel passaggio da uno di essi a ogni altro. Come discusso nel paragrafo 4-17, questo requisito di covarianza pone alcune limitazioni sulle grandezze fisiche che in esse possono figurare.

Nella meccanica newtoniana si assume che per i sistemi inerziali valgano le trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}^* t \\ t = t' \end{cases} \quad (15-1)$$

in cui è evidente l'ipotesi dell'esistenza di un *tempo assoluto*. Ciò equivale alla possibilità di avere, nei diversi sistemi di riferimento, orologi che si mantengono sincronizzati anche se animati di moto relativo con velocità costante (che in questo capitolo viene indicata con  $\mathbf{v}^*$  invece che con  $\mathbf{V}$ , come nel capitolo 3). Inoltre, esse implicano che anche lo *spazio* sia *assoluto*, perché richiedono che  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ , cioè che la distanza fra due particelle sia la stessa nei due sistemi di riferimento.

Dalle trasformazioni di Galileo si ottengono le corrispondenti leggi di trasformazione per velocità e accelerazione,

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}^* \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' \end{cases} \quad (15-2)$$

che mostrano che la velocità non è invariante, al contrario dell'accelerazione. Non è dunque un caso che nelle Leggi della Meccanica figurino l'accelerazione, e mai (esplicitamente) una velocità (assoluta). D'altra parte, anche le forze risultano invarianti per le suddette trasformazioni, in quanto dipendenti dalla distanza ed eventualmente da una velocità relativa (come nel caso dell'attrito), così come la massa, che è una grandezza scalare. Possiamo quindi affermare che l'equazione  $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$ , che esprime il Secondo Principio della Dinamica, è a sua volta invariante per trasformazioni di Galileo.

Altro aspetto importante della meccanica newtoniana, più volte messo in evidenza, è l'assunzione che le interazioni fra i corpi si propaghino a velocità infinita, cioè istantaneamente, qualunque sia la distanza: ne consegue che, nella descrizione delle interazioni attraverso l'energia potenziale, questa viene espressa in termini della configurazione del sistema, considerando le posizioni reciproche di tutte le particelle allo *stesso istante*  $t$ .

Questa visione dell'Universo cominciò a mostrare crepe sempre più profonde durante il XIX secolo, via via che progredirono le conoscenze

di elettricità, magnetismo e ottica, le cui leggi furono unificate da Maxwell nelle equazioni che vanno sotto il suo nome. Per la prima volta si prevedeva infatti che un'interazione, quella elettromagnetica, si propagasse a velocità finita; e tale velocità, la stessa della luce nel vuoto, figurava esplicitamente nelle equazioni di Maxwell, rendendole *non invarianti* per trasformazioni di Galileo.

Lo studio dei fenomeni elettromagnetici (quelli luminosi, in particolare) divenne dunque il germe della crisi che avrebbe portato a una nuova visione della struttura dell'Universo. Gli studiosi più affermati del tempo si cimentarono nella ricerca di un mezzo materiale (etere) di supporto alla propagazione della luce. Non ebbero successo: nessun esperimento fu in grado di dimostrare l'esistenza dell'etere, e quindi di un sistema di riferimento privilegiato (assoluto) ad esso connesso.

### 15-1-1 I Principi della Relatività

Bisognava perciò accettare che la luce si comportasse in modo differente da quanto previsto dai modelli meccanici. La luce appariva inoltre avere la stessa velocità in tutti i riferimenti inerziali, contraddicendo la legge di composizione di Galileo (15-2). D'altro canto, se da un lato non era facilmente accettabile che il Principio di relatività galileiana si limitasse ai soli fenomeni meccanici, dall'altro estenderne la validità anche alle equazioni di Maxwell significava rimettere in discussione le trasformazioni di Galileo e con esse le ipotesi di spazio assoluto e di tempo assoluto, richiedendo un notevole coraggio intellettuale. Il passo decisivo ed effettivamente rivoluzionario fu fatto, nel 1905, da Albert Einstein, uno studioso fino ad allora estraneo agli ambienti accademici, che propose una visione dell'Universo radicalmente nuova, basata su due **Principi** molto semplici che costituiscono la base di ciò che oggi viene chiamata la **Relatività ristretta**:

- 1) i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti: tutte le leggi della Fisica hanno la stessa forma in ogni riferimento inerziale;
- 2) il modulo della velocità della luce nel vuoto è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali e non dipende dalla direzione di propagazione.

Le conseguenze cinematiche e dinamiche di tali assunzioni risultano di particolare interesse, sia dal punto di vista di principio sia per le conferme sperimentali che ne sono state trovate. Esse saranno illustrate nei paragrafi successivi, limitandoci ora ad alcune osservazioni preliminari.

I Principi della Relatività sono coerenti con il fatto che la velocità della luce nel vuoto appare sperimentalmente anche come una velocità limite. Se si ammette che esista in Natura una velocità massima per la trasmissione di qualsiasi segnale (e quindi di energia e quantità di moto), allora il modulo di tale velocità deve essere lo stesso in ogni riferimento inerziale; altrimenti i sistemi inerziali sarebbero distinguibili e quindi non equivalenti. Ciò è ampiamente confermato sperimentalmente: in tutti i sistemi inerziali la luce (nel vuoto) ha la stessa velocità (in modulo). Essa risulta anche indipendente dal luogo e dalla direzione in cui viene misurata ed è quindi una costante fondamentale della Natura. Il

suo valore,  $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s, è oggi noto con enorme precisione. Il fatto che ogni osservatore inerziale misuri lo stesso valore di  $c$  implica che la velocità della luce non dipenda nemmeno dalla velocità della sorgente, che ha valori diversi a seconda del sistema di riferimento.

Il secondo Principio di Einstein contrasta fortemente con la nostra esperienza quotidiana sui moti relativi, la cui sintesi analitica è ben rappresentata dalla legge classica di trasformazione delle velocità. Siamo tuttavia costretti ad ammettere che tale legge (nonché le proprietà dello spazio e del tempo su cui essa si fonda) non sia rigorosamente valida, pur potendo costituire una buona approssimazione in casi particolari, cioè quando le velocità in gioco sono piccole rispetto a  $c$ .

### 15-2 La velocità limite

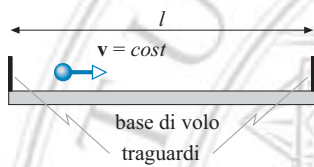
Abbiamo già sottolineato che numerosi esperimenti suggeriscono che  $c$  sia il limite superiore alla velocità di qualsiasi corpo: in altre parole, si ritiene che  $c$  rappresenti la massima velocità con cui si può inviare un segnale fisico, sia attraverso una particella sia attraverso un'onda elettromagnetica.

Un modo concettualmente semplice per verificare ciò è quello di misurare un *tempo di volo*: si tratta di accelerare un corpo, fino a che esso raggiunga una certa velocità, per poi lasciarlo muovere di moto rettilineo e uniforme su un percorso (*base di volo*) di lunghezza nota  $l$ , delimitato da due tragguardi (fig. 15-1). Il rapporto fra  $l$  e il tempo  $\Delta t$  impiegato a percorrere la base di volo fornisce il valore (del modulo) della velocità.

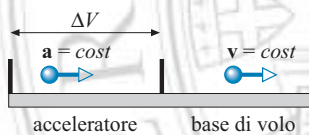
Imprimere a corpi macroscopici velocità elevate ( $\approx c$ ) risulta praticamente impossibile; per una particella elementare, invece, per esempio un elettrone, ciò può essere facilmente realizzato per mezzo di un acceleratore di particelle (fig. 15-2). La carica della particella e la differenza di potenziale ai capi dell'acceleratore (che generalmente può essere variata a piacere, entro certi limiti costruttivi) definiscono univocamente l'energia cinetica  $K$  della particella all'uscita dell'acceleratore stesso. Misurando successivamente il tempo di volo, si dispone di due informazioni sperimentali *indipendenti*, che dovrebbero risultare consistenti, se analizzate correttamente:

- dalla misura dell'energia cinetica  $K$  si può *dedurre* la velocità, utilizzando la relazione *classica*  $v = \sqrt{2K/m}$ ;
- le determinazioni di  $l$  e  $\Delta t$  permettono di *misurare* la stessa velocità mediante la relazione  $v = l/\Delta t$ , che fa uso diretto della definizione stessa di velocità (media).

Un esperimento di tal genere, effettuato nel 1963 da W. Bertozzi con elettroni, utilizzando una base di volo di 8,4 m, ha dato i risultati sintetizzati in tabella 15-1.



**FIGURA 15-1**  
Schema semplificato di una base di volo



**FIGURA 15-2**  
Un elettrone viene prima accelerato, e poi lasciato libero di muoversi a velocità costante.

**TABELLA 15-1**  
Dati sperimentali di un esperimento con elettroni.

$K$	$\Delta t$	$v_1 = \sqrt{2K/m}$	$v_2 = l/\Delta t$	$v_2/c$
(MeV)	( $10^{-9}$ s)	( $10^8$ m/s)	( $10^8$ m/s)	
0,5	32,3	4,19	2,60	0,87
1,0	30,8	5,94	2,73	0,91
1,5	29,2	7,28	2,88	0,96
4,5	28,4	12,6	2,96	0,99
15,0	28,0	23,0	$\approx 3,00$	$\approx 1,00$

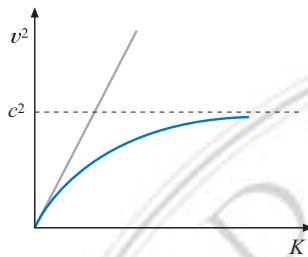


FIGURA 15-3

La velocità non cresce come previsto classicamente.

La tabella mostra con chiarezza due punti:

- i) le velocità  $v_2$  misurate attraverso il tempo di volo non sono mai superiori a  $c$ ;
- ii) le velocità  $v_1$  sono inconsistenti con le precedenti.

Poiché i valori dell'energia possono essere controllati in altri modi indipendenti, e risultano corretti, se ne deduce che la relazione fra energia cinetica e velocità non può essere quella della meccanica classica: o la relazione  $K = (1/2)mv^2$  cessa di valere a velocità elevate, oppure il valore di  $m$  deve cambiare con la velocità.

Per il momento ci interessa sottolineare che la dipendenza lineare fra quadrato della velocità ed energia cinetica, prevista classicamente, non comporterebbe limiti per la velocità dei corpi, come si può osservare dalla curva in grigio nella figura 15-3. È un fatto sperimentale, invece, che le velocità crescono più lentamente di quanto previsto da tale relazione, e al più possono raggiungere il valore  $c$  (curva in colore di figura).

## 15-3 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

### 15-3-1 Osservatori e procedure di misurazione

Prima di esaminare le conseguenze dei due Principi di Einstein, è opportuno precisare alcune convenzioni frequentemente utilizzate nel seguito di questo capitolo. I problemi affrontati riguarderanno lo studio di un qualche fenomeno fisico, osservato da due diversi sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  **entrambi inerziali**. Si tratterà di confrontare i valori delle grandezze fisiche coinvolte, ottenuti da opportune misurazioni realizzate separatamente in ciascuno dei due riferimenti inerziali. I fenomeni sono considerati come successione di **eventi** correlati, ciascuno dei quali è caratterizzato dal fatto di avvenire in un certo punto dello spazio e in un certo istante temporale.

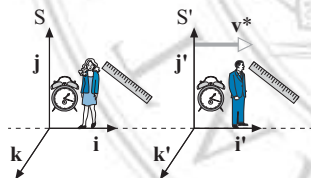


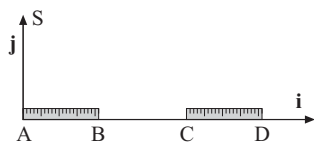
FIGURA 15-4

Due sistemi inerziali, in moto con velocità relativa  $v^*$ .

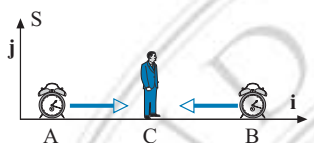
Il moto relativo di due sistemi di riferimento inerziali è di traslazione rettilinea uniforme; denotiamo con  $v^*$  la corrispondente velocità di trascinamento costante. Non si perde di generalità assumendo, per semplicità, che le terne cartesiane ortogonali associate a tali sistemi abbiano gli assi  $x$  e  $x'$  coincidenti, e gli altri assi corrispondenti rispettivamente paralleli (fig. 15-4).

Ogni sistema di riferimento è definito, oltre che da un insieme di corpi *fissi* l'uno rispetto all'altro, da un certo numero di osservatori e da una serie di *regoli* (tutti uguali fra loro) e di *orologi* (tutti sincronizzati fra loro). In linea di principio dobbiamo immaginare che, in ogni punto del sistema considerato ove avviene una misurazione di lunghezza o di tempo, si trovi un osservatore dotato di uno di tali regoli e di uno di tali orologi, fissi nel punto considerato. Per brevità chiameremo spesso questo insieme di osservatori, fissi in un dato riferimento  $S$ , come l'**osservatore** (in/di)  $S$ , e analogamente per  $S'$ .

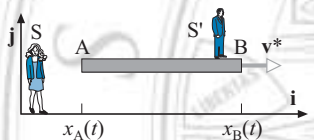
La *calibrazione* diretta dei regoli viene inizialmente eseguita affiancandoli due a due in un dato luogo; in seguito, ciascuno di essi è trasportato nella posizione assegnata, ove poi restano fermi. Poiché nulla assicura che, dopo il trasporto, due regoli originariamente uguali siano ancora tali, occorre eseguire una successiva verifica a distanza, utilizzando la proprietà della luce di propagarsi (nel vuoto) con velocità costante  $c$ .



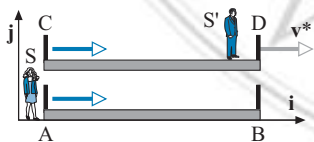
**FIGURA 15-5**  
Due regoli uguali in due luoghi diversi.



**FIGURA 15-6**  
Sincronizzazione degli orologi.



**FIGURA 15-7**  
Le posizioni degli estremi di un regolo in moto, vanno individuate contemporaneamente.



**FIGURA 15-8**  
Due basi di volo, in moto l'una rispetto all'altra con velocità  $v^*$ .

Con riferimento alla figura 15-5, nella quale i due regoli sono paralleli, si tratta di misurare il tempo  $\Delta t_1$  impiegato da un raggio luminoso per andare da A a B, e quello  $\Delta t_2$  impiegato da un altro raggio per andare da C a D, verificando che  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ .

Ciò richiede che gli orologi posti in A, B, C e D siano effettivamente sincronizzati fra loro: la *sincronizzazione* può essere fatta verificando, nello stesso luogo, che segnino il tempo alla stessa maniera. Dopo averli trasportati ciascuno nel proprio posto di lavoro, dove rimarranno fermi, occorre controllare che essi continuino a essere sincronizzati. Anche in questo caso, la verifica può essere effettuata utilizzando la proprietà di invarianza della velocità della luce. Con riferimento alla figura 15-6, se uno degli orologi si trova in A e l'altro in B, chiamiamo C il punto di mezzo della loro congiungente. A un orario prefissato, per esempio quando l'orologio in A segna le 12, un raggio luminoso viene inviato verso il punto C; lo stesso avviene dal punto B, quando il corrispondente orologio segna la stessa ora. Data l'uguaglianza della velocità con cui i due raggi si propagano, se essi arrivano contemporaneamente all'osservatore in C, i due orologi sono sincronizzati.

Iterando queste procedure, che garantiscono il controllo delle operazioni di confronto fra lunghezze e tempi, si possono avere a disposizione tanti (infiniti) regoli uguali e tanti (infiniti) orologi fra loro sincronizzati.

Gli osservatori, i regoli e gli orologi vengono chiamati convenzionalmente *propri* nel sistema di riferimento da essi definito.

Nel caso della misurazione di lunghezze, è necessario distinguere le due situazioni in cui il regolo da misurare sia fermo o in moto, rispetto agli osservatori che eseguono l'operazione. Se indichiamo con  $S'$  un riferimento rispetto al quale il *regolo è fermo* (fig. 15-7), la misura di lunghezza in  $S'$ , consistente nella determinazione delle posizioni occupate dagli estremi A e B (che sono fermi), può essere eseguita a *qualsiasi istante  $t'$* . Poiché invece le coordinate di A e B cambiano nel tempo rispetto al sistema S (in cui il regolo è in moto), le misurazioni delle loro posizioni vanno fatte in S *simultaneamente*.

### 15-3-2 Necessità di una revisione dei concetti di spazio e di tempo

Consideriamo due sistemi di riferimento, S e  $S'$ , inizialmente fermi l'uno rispetto all'altro, in ciascuno dei quali si trova una base di volo, disposta parallelamente all'asse delle ascisse. Le basi di volo vengono confrontate direttamente, essendo ferme l'una rispetto all'altra, verificando che hanno la stessa lunghezza. Per il Principio di Relatività, la lunghezza della base ferma in  $S'$  resta costante in  $S'$  anche quando tale riferimento si muove di moto traslatorio uniforme, con velocità  $v^*$ , rispetto a S (fig. 15-8): quindi, le misure di AB (fatta in S) e di CD (fatta in  $S'$ ) sono uguali, indipendentemente dal moto relativo.

Ciò ha rilevanza anche sulle misure degli intervalli temporali. Consideriamo, infatti, la situazione in cui, per un osservatore in S, ad esempio posto in A, la base di volo CD si muova da sinistra verso destra, con velocità costante  $v^*$ , transitando a un certo istante davanti alla base di volo AB. Supponiamo che, nell'istante in cui il punto C ha la stessa ascissa di A, l'osservatore in S faccia partire da A un raggio luminoso verso B, e quello in  $S'$  un raggio da C verso D. La misura in S del tempo impiegato dal primo raggio per arrivare in B è  $\Delta t = AB/c$ . Analogamente, un osservatore nel sistema  $S'$  che misuri il tempo di volo del secondo raggio

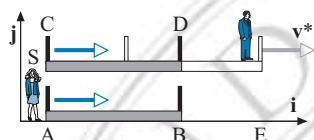


FIGURA 15-9

Durante il tempo di volo la base di volo si sposta.

nel tratto CD ne ricava il valore  $\Delta t' = CD/c$ , in quanto anche per lui la velocità della luce è  $c$ . Poiché le lunghezze delle due basi di volo sono uguali per i due osservatori, ne segue  $\Delta t = \Delta t'$ .

Finché dunque ciascun osservatore misura *grandezze proprie*, cioè relative a corpi fermi rispetto al suo riferimento, i risultati ottenuti (per oggetti uguali) sono gli stessi.

Diversamente vanno le cose quando i corpi coinvolti nella misurazione sono in moto rispetto all'osservatore. Nel caso del raggio luminoso che, nel sistema  $S'$ , si propaga da C a D, l'osservatore S «vede» il raggio luminoso partire da C e, con velocità finita  $c$ , rincorrere il secondo traguardo D, che si sta allontanando con velocità  $v^*$ . Quando il raggio raggiunge D, quest'ultimo non si trova più in corrispondenza del traguardo B, ma un po' più a destra (fig. 15-9). Dunque, per l'osservatore in S, a causa del moto della base di volo CD, il raggio percorre un cammino di lunghezza  $AE > AB$ ; stante la costanza della velocità della luce, il tempo da esso impiegato dovrà essere maggiore di  $\Delta t$ .

Sintetizzando questa prima discussione semiquantitativa, l'intervallo temporale fra gli stessi due eventi (partenza del raggio da C; arrivo del raggio in D) risulta (dalle misurazioni) avere valori diversi per gli osservatori di S e di  $S'$ : ciò comporta, almeno, una riconsiderazione del concetto di *tempo assoluto*. Tenendo conto tuttavia della possibilità di misurare lunghezze mediante misure di tempi, possiamo aspettarci che anche il carattere assoluto dello spazio vada rimesso in discussione.

Per ora ci limitiamo ad ammettere che il risultato di una misurazione (cioè, la misura) di un intervallo temporale o spaziale *possa* essere diverso se effettuato da osservatori (pur inerziali) diversi. Nel seguito vedremo come ciò sia comprensibile sulla base di un'analisi critica dei concetti di simultaneità, di tempo e di spazio, che tenga presente l'esigenza di definire ogni grandezza fisica per via operativa, cioè attraverso le operazioni che servono a misurarla. La discussione farà un uso essenziale dei due Principi di Einstein, e ciò permetterà di sottolineare che l'insorgere di alcuni *effetti non comuni* è legato direttamente all'accettazione di tali Principi.

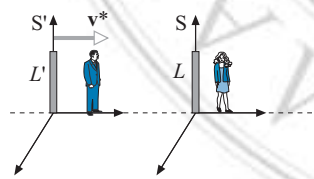


FIGURA 15-10

Due regoli trasversali, misurati uguali da fermi, lo sono anche se in moto relativo.

### 15-3-3 Moto relativo e lunghezze trasversali

Consideriamo due regoli, le cui lunghezze, confrontate quando essi erano fermi l'uno rispetto all'altro, sono risultate uguali:  $L = L'$ . Il primo è fermo nel sistema di riferimento S ed è disposto perpendicolarmente rispetto a  $v^*$ , per esempio lungo l'asse  $y$  e con un estremo nell'origine (fig. 15-10). Analogamente, l'altro regolo, fisso in  $S'$ , è disposto lungo l'asse  $y'$ . Vogliamo dimostrare che anche quando i due regoli sono in moto l'uno rispetto all'altro, le due lunghezze devono restare uguali per entrambi gli osservatori.

La situazione è perfettamente simmetrica per entrambi gli osservatori, ciascuno dei quali vede il regolo dell'altro avvicinarsi al proprio con velocità costante. Ciò permette di fare una semplice verifica sperimentale. Si può fare in modo che nell'istante in cui i due regoli si incrociano, ciascuno di essi possa lasciare un segno dei suoi estremi sull'altro regolo, per esempio con un pennino. Se su uno di essi (per esempio quello di S) restasse un segno, entrambi gli osservatori concluderebbero che  $L > L'$ , e viceversa se ciò accadesse per quello di  $S'$ . In ambedue i casi, nonostante la perfetta simmetria della situazione considerata, i due sistemi di ri-



ferimento non sarebbero equivalenti, contrariamente a quanto espresso dal Principio di Relatività. Per tale Principio è necessario quindi che le due lunghezze risultino uguali per ambedue gli osservatori.

Registriamo così questo risultato, apparentemente ovvio per noi: i due regoli che, misurati da fermi, avevano la stessa lunghezza, sono misurati ancora uguali da ambedue gli osservatori anche quando sono in moto relativo, se sono disposti perpendicolarmente rispetto alla direzione di tale moto.

### 15-4 Simultaneità

Esaminiamo il concetto di simultaneità di due eventi, cioè il significato dell'affermazione che due eventi (che hanno luogo in posizioni generalmente diverse) avvengono allo stesso istante.

Abbiamo mostrato che la verifica della sincronizzazione di due orologi, posti in luoghi diversi, e in quiete in un dato sistema di riferimento, può essere effettuata mediante la procedura, illustrata nella figura 15-11 (o nel par. 15-3-2), che consiste nell'inviare contemporaneamente due raggi di luce da essi verso il loro punto di mezzo. Questo sistema è proprio quello che viene utilizzato per sincronizzare gli orologi atomici distribuiti sulla Terra, i quali permettono di misurare intervalli di tempo con precisione relativa di una parte su  $10^{13}$  (si valuti anche con attenzione il fatto che, se due orologi sono posti a distanza di soli 30 cm, un segnale luminoso impiega  $10^{-9}$  s = 1 ns per andare dall'uno all'altro; un tempo già largamente apprezzabile con semplici orologi elettronici).

La stessa procedura può essere utilizzata in ogni sistema di riferimento per definire la simultaneità. Consideriamo due eventi che avvengono nei punti A e B della figura 15-11 e supponiamo che, negli istanti in cui ciascuno di essi avviene, venga inviato un raggio di luce verso il punto C (che si trova a metà del segmento AB). Se i due raggi raggiungono C contemporaneamente, allora gli eventi originari sono definiti *simultanei*.

Come mostrato nel seguito, questa definizione operativa di simultaneità comporta che tale concetto non abbia un significato assoluto, in contrasto con quanto viene acriticamente dato per scontato dalla grande maggioranza delle persone: è difficile convincersi che due eventi, simultanei per un osservatore a terra, possano non esserlo per un osservatore che si trova su un treno in corsa, o viceversa.

Consideriamo dunque le solite due basi di volo identiche (da ferme), situate in due sistemi S e S', in moto relativo con velocità costante  $v^*$  (fig. 15-12). Nell'istante in cui il punto F passa davanti al punto E, due raggi luminosi vengono fatti partire da E verso A e C; analogamente, due raggi partono da F, per raggiungere C e D.

Per l'osservatore che si trova in S, i due eventi, «arrivo del raggio in A» e «arrivo del raggio in B», sono simultanei; allo stesso modo, per l'osservatore di S', sono simultanei gli eventi costituiti dagli arrivi dei raggi luminosi in C e in D.

Quest'ultima affermazione non può essere condivisa dall'osservatore di S. Egli vede il traguardo C che va incontro al raggio, muovendosi con velocità  $v^*$ , e nello stesso tempo vede il traguardo D fuggire dal secondo raggio, con la stessa velocità  $v^*$  (come illustrato in fig. 15-13). Per l'osservatore in S, il primo raggio arriva in C prima dell'arrivo del secondo raggio in D (e non contemporaneamente).

E in effetti, mediante i suoi orologi, egli è in grado di misurare l'in-

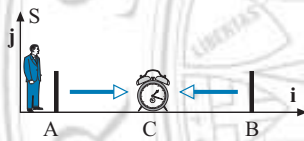


FIGURA 15-11  
Definizione di eventi simultanei.

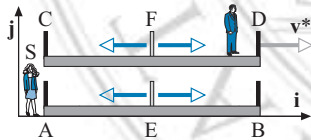


FIGURA 15-12  
Coppie di raggi luminosi che partono dai punti di mezzo delle basi di volo.

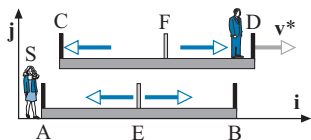


FIGURA 15-13  
Durante il tempo di volo, la base di volo CD si sposta rispetto al riferimento S.

tervallo temporale  $\Delta t$  fra tali eventi: indicata con  $\Delta x$  la differenza delle ascisse dei punti in cui essi hanno luogo si trova, come mostrato nell'esempio 15-1,

$$\Delta t = \frac{v^*}{c^2} \Delta x \quad (\Delta x' \neq 0, \Delta t' = 0) \quad (15-3)$$

dove le relazioni  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta t' = 0$  mettono in evidenza che, per l'osservatore  $S'$ , i due eventi avvengono in luoghi diversi, e contemporaneamente.

***Gli stessi due eventi sono quindi simultanei per un osservatore e non simultanei per un altro: il concetto di simultaneità è relativo.***

### Esempio 15-1

Determinare la relazione che intercorre fra l'intervallo temporale e l'intervallo spaziale misurati nel sistema di riferimento  $S$  fra gli eventi discussi nel testo: arrivo in  $C$  e in  $D$  dei segnali emessi da  $F$ .

Nel sistema  $S$  i punti  $C$  e  $D$  si muovono verso destra con velocità  $\mathbf{v}^* = v \mathbf{i}$ , mentre i raggi luminosi 1 e 2 inviati da  $F$  verso  $C$  e  $D$  si muovono con velocità  $-c \mathbf{i}$  e  $+c \mathbf{i}$ , rispettivamente. Le corrispondenti equazioni del moto sono quindi

$$\begin{aligned} x_C(t) &= x_C(0) + vt; & x_D(t) &= x_D(0) + vt; \\ x_1(t) &= x_F(0) - ct; & x_2(t) &= x_F(0) + ct. \end{aligned}$$

I segnali arrivano in  $C$  e  $D$  agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , rispettivamente determinati da

$$x_1(t_1) = x_C(t_1) \quad \text{e} \quad x_2(t_2) = x_D(t_2).$$

Denotata con  $L$  la lunghezza in  $S$  del segmento che ha gli estremi nelle posizioni occupate da  $C$  e  $D$  all'istante iniziale, si ha

$$t_1 = \frac{x_F(0) - x_C(0)}{c + v} = \frac{L}{2(c + v)}; \quad t_2 = \frac{x_D(0) - x_F(0)}{c - v} = \frac{L}{2(c - v)}.$$

I due eventi non sono perciò simultanei in  $S$  e fra loro intercorre l'intervallo di tempo

$$\Delta t = t_2 - t_1 = Lv / (c^2 - v^2).$$

D'altra parte le coordinate spaziali degli eventi considerati sono, rispettivamente,

$$x_1 = x_1(t_1) = x_F(0) - ct_1 \quad \text{e} \quad x_2 = x_2(t_2) = x_F(0) + ct_2,$$

cui corrisponde la differenza  $\Delta x = x_2 - x_1 = c(t_2 + t_1) = Lv / (c^2 - v^2)$ . Confrontando le espressioni trovate per  $\Delta t$  e per  $\Delta x$ , si ricava la relazione cercata:

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x.$$

Naturalmente, un'analoga situazione si presenta anche per quanto riguarda i due transiti in  $A$  e  $B$  visti dall'osservatore di  $S'$ . Ripetendo l'analisi precedente si trova infatti in questo caso (in cui la base ferma in  $S$  si muove con velocità  $-v^*$  rispetto a  $S'$ )

$$\Delta t' = -\frac{v^*}{c^2} \Delta x' \quad (\Delta x \neq 0, \Delta t = 0).$$

La relatività del concetto di simultaneità costituisce un punto centrale della teoria della Relatività e ha conseguenze di estremo rilievo. Innanzitutto, dal punto di vista formale, essa implica che la legge di trasformazione per le coordinate temporali, per essere consistente con i risultati (15-3), vada radicalmente cambiata rispetto a quella di Galileo e coinvolga anche le coordinate spaziali. Inoltre, ci si può aspettare che il venire meno del carattere assoluto di tale concetto possa influenzare anche le relazioni fra i risultati delle misurazioni dirette di lunghezze a opera di diversi osservatori, per le quali abbiamo già sottolineato il ruolo essenziale della simultaneità nella determinazione delle coordinate spaziali interessate. Nelle misure indirette, tramite misurazioni di tempi, sarà inoltre importante la cosiddetta dilatazione dei tempi, che discuteremo nel paragrafo successivo.

### 15-5 Dilatazione del tempo

Questa famosa conseguenza dei Principi della Relatività può essere illustrata in modo molto semplice, considerando la situazione schematizzata in figura 15-14. Una sorgente  $S_0$  emette (ad esempio a intermittenza) segnali luminosi che, riflessi da uno specchio  $M$ , ritornano al punto di partenza ove fanno scattare un opportuno rivelatore  $R$ .

Esaminiamo le descrizioni che di questo processo possono essere fornite da due osservatori  $S$  e  $S'$  in moto relativo fra loro con velocità  $v^*$ , che misurino con i loro orologi il tempo impiegato da un raggio di luce nel tragitto di andata e ritorno.

Supponiamo che il dispositivo in questione sia fermo nel sistema di riferimento  $S'$  e posizionato come indicato in figura 15-14, cioè perpendicolarmente alla direzione di  $v^*$ . Sia  $L'$  la distanza propria fra  $S_0$  e  $M$ . Fissiamo l'attenzione sugli eventi costituiti dall'emissione di un raggio luminoso da  $S_0$  e dalla rivelazione del raggio riflesso ad opera di  $R$ . In  $S'$  fra questi eventi intercorre (ed è misurato) un intervallo di tempo

$$\Delta t_p = \frac{2L'}{c}. \quad (15-4)$$

Per tale osservatore, i due eventi (emissione da  $S_0$  e ricezione in  $R$ ) avvengono nello stesso punto ( $x'_1 \equiv x'_2$ ) e si può considerare la predetta misura come quella dell'intervallo di tempo *proprio* dei due eventi (da cui il pedice  $p$ ); essa può essere effettuata utilizzando *un solo orologio* (di  $S'$ ) posto in tale punto.

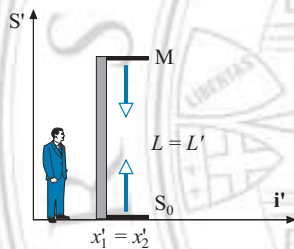
Per l'osservatore di  $S$  la situazione è invece quella illustrata in figura 15-15: mentre il raggio luminoso si propaga (con velocità finita!), sorgente, specchio e rivelatore traslano tutti con velocità  $v^*$ . Di conseguenza, i due eventi già citati avvengono in due punti diversi:  $x_1 \neq x_2$ . La distanza (spaziale) fra questi due punti è

$$x_2 - x_1 = v^* \Delta t$$

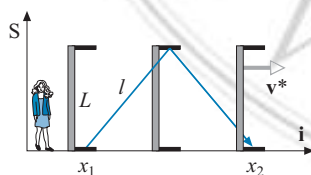
ove  $\Delta t$  è l'intervallo temporale che si misura in  $S$  fra i due eventi.

Come mostrato in dettaglio nell'esempio 15-2, ciò comporta che l'intervallo  $\Delta t$  misurato in  $S$  è legato a  $\Delta t_p$  dalla relazione

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \quad (15-5)$$



**FIGURA 15-14**  
Tragitto del raggio luminoso, nel riferimento proprio di sorgente e rivelatore.



**FIGURA 15-15**  
Tragitto del raggio luminoso visto da  $S$ .

ove si è posto

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\gamma \geq 1); \quad \beta = \frac{v^*}{c} \quad (0 \leq \beta \leq 1). \quad (15-6)$$

L'intervallo temporale fra i due eventi risulta quindi più lungo per l'osservatore S che per l'osservatore (proprio) S': è **dilatato del fattore**  $\gamma$ .

**Esempio 15-2**

Dimostrare la relazione 15-5.

Nel sistema S la luce (figura 15-15) percorre un tratto di lunghezza

$$2l = 2\sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + L^2} = 2\sqrt{\left(\frac{v^* \Delta t}{2}\right)^2 + L^2},$$

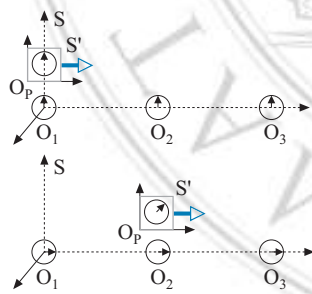
ove si è indicato con  $L$  la distanza che si misura in S fra  $S_0$  e M. Poiché essa si riferisce a una lunghezza perpendicolare al moto relativo, per quanto discusso nel paragrafo 15-3-3 risulta  $L = L'$ . Si ha quindi:

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{v^* \Delta t}{2}\right)^2 + L^2} \Rightarrow (\Delta t)^2 = \beta^2 (\Delta t)^2 + \frac{4L^2}{c^2}.$$

Risolviendo per  $\Delta t$ , si ha dunque (essendo  $L = L'$ )

$$(\Delta t)^2 = \frac{4L^2}{c^2} \frac{1}{1 - \beta^2} = (\Delta t_p)^2 \gamma^2.$$

Ne segue la (15-5), dato che in ogni riferimento il segnale arriva *dopo* che è stato emesso.



**FIGURA 15-16**  
Un orologio in moto ritarda rispetto a un insieme di orologi fissi sincronizzati.

Per comprendere appieno le implicazioni del risultato ottenuto, è opportuno meditare sul fatto che esso si riferisce al confronto fra le misure di tempo effettuate nel riferimento proprio S' da un *unico* orologio posto in una definita posizione, e nel riferimento S da *due* orologi che si trovano in posizioni diverse. Denotati tali orologi con  $O_p$ ,  $O_1$  e  $O_2$  rispettivamente, possiamo anche interpretare il predetto risultato in termini del «comportamento» dell'orologio  $O_p$ , in moto rispetto a S, rispetto agli orologi (fermi) in tale riferimento (quali  $O_1$  e  $O_2$ ). Il confronto delle «letture» di  $O_p$  e di quella dei vari orologi di S fermi nelle varie posizioni via via occupate da  $O_p$  in S è illustrato in figura 15-16: *l'orologio in moto ritarda rispetto agli orologi di S*.

Quindi, per l'osservatore in S, il tempo nel sistema di riferimento S' appare scorrere più lentamente che nel proprio sistema. Questo processo di rallentamento dello scorrere del tempo, che si osserva nel sistema non proprio, deve riguardare ogni fenomeno naturale. Dunque, rallenta la frequenza del battito del polso di una persona, la velocità dei processi del pensiero, la crescita delle piante, l'invecchiamento degli esseri umani, l'avanzare di una malattia, ecc.

L'esame di una situazione simmetrica in cui si effettui un confronto fra il comportamento di un dato orologio di S con quelli di S' porterebbe alla conclusione che, per l'osservatore S', sono gli orologi del sistema S quelli che ritardano.

La contraddizione è solo apparente: in realtà, i due osservatori concordano sul fatto che, *quello che ritarda, è il singolo orologio in moto che viene confrontato con due (o più) orologi fissi*. Analiticamente:

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma \Delta t' & \text{per } \Delta x' = 0 \\ \Delta t' = \gamma \Delta t & \text{per } \Delta x = 0. \end{cases} \quad (15-7)$$

Possiamo cercare di immaginare una situazione nella quale l'orologio in moto possa essere confrontato con *un solo* orologio in quiete: ciò richiede, evidentemente che il primo dei due torni indietro, invertendo il moto oppure facendo una traiettoria curva (chiusa). Per far ciò, il riferimento proprio del primo orologio dovrebbe subire, almeno in una fase del moto, una qualche accelerazione (cioè non sarebbe costantemente inerziale). Salterebbe quindi la necessità dell'equivalenza fra i sistemi di riferimento propri dei due orologi, dimodoché essi potrebbero segnare effettivamente tempi diversi al momento del confronto nello stesso luogo. Esperimenti di tal genere sono stati realizzati misurando la vita media di particelle elementari con acceleratori, oppure confrontando due orologi atomici, uno dei quali fermo a terra e l'altro portato ad alta velocità su un aereo supersonico a fare un giro della Terra. In tutti i casi si è osservato sperimentalmente che l'orologio posto nel sistema di riferimento non inerziale è risultato effettivamente in ritardo rispetto all'altro.

### Esempio 15-3

**Paradosso dei gemelli.** Due gemelli, giunti all'età di 20 anni, litigano furiosamente, tanto che uno dei due si imbarca su un'astronave e se ne va. Supponiamo che l'astronave viaggi alla (non realistica) velocità di  $(12/13)c$ , lungo una traiettoria rettilinea; successivamente il fuggiasco, pentito, inverte istantaneamente il verso della velocità, e torna a casa dopo che sulla Terra sono passati 52 anni. Come apparirà al fratello?

Il gemello rimasto sulla Terra avrà compiuto 72 anni. Conoscendo la velocità con cui l'altro ha viaggiato, egli può valutare il fattore relativistico  $\gamma = 1/\sqrt{1 - 12^2/13^2} = 2,6$  (sia per il viaggio di andata che per il ritorno), calcolando che sull'astronave il viaggio sia durato 20 anni: così egli si aspetta di incontrare un quarantenne! Dobbiamo pensare che l'astronauta, a sua volta, si attenda di trovare invece più giovane il fratello rimasto a Terra, creando quindi le condizioni per un eclatante paradosso? Evidentemente no, in quanto egli è vissuto in un sistema di riferimento non inerziale, come una particella in un acceleratore: è proprio lui a presentarsi più giovane all'appuntamento. L'unico aspetto paradossale, che chi utilizza questo esempio dovrebbe mettere in evidenza, consiste nell'attribuire all'astronauta una scarsa conoscenza della Fisica, con un conseguente uso improprio delle relazioni relativistiche. Nelle nostre esperienze quotidiane effetti di questo tipo sono sempre trascurabili, in quanto  $\gamma$  ha valore praticamente uguale a 1 nel mondo macroscopico.

#### 15-5-1 Verifiche sperimentali

La verifica sperimentale più nota dell'effetto di dilatazione del tempo consiste nella misurazione della vita media dei muoni. Si tratta di particelle instabili, che hanno origine dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera, dopodiché si disintegrano spontaneamente, decadendo in un elettrone e due neutrini.

Il processo di decadimento segue la legge descritta nel paragrafo 1-16, per cui il numero di muoni sopravvissuti agli  $N_0$  iniziali, dopo un tempo  $t$ , è dato da:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (15-8)$$

La vita media dei muoni è stata misurata nel sistema di riferimento in cui essi sono a riposo (cioè nel sistema proprio): essa risulta di circa 2,2  $\mu$ s.

I muoni dei raggi cosmici si muovono, rispetto a un osservatore terrestre, a una velocità altissima, dell'ordine di 0,995  $c$ . Ciò permette di verificare sperimentalmente se la vita media dei muoni viene influenzata o no dall'effetto relativistico di dilatazione del tempo.

Supponendo, per semplicità, di avere un flusso di 1000 muoni all'ora, a 4500 m di quota (attraverso una data superficie di rivelazione), quanti conteggi all'ora ci dobbiamo aspettare al livello del mare? Da un punto di vista classico, ci basta utilizzare la relazione (15-8), tenendo conto che il tempo impiegato dai muoni per percorrere 4500 m è di 15  $\mu$ s. In corrispondenza, si prevede un numero di muoni sopravvissuti (all'ora) uguale a

$$N(\Delta t) = N_0 \exp\left(-\frac{15}{2,2}\right) \approx 10^{-3} N_0 = 1.$$

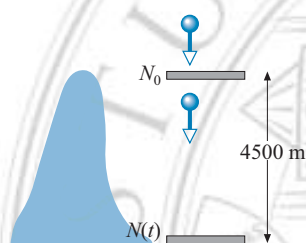
Le misure sperimentali, al livello del mare, dopo essere state corrette per tener conto dei muoni prodotti al di sotto dei 4500 m, indicano flussi molto più elevati di quello appena calcolato, come peraltro atteso dall'effetto di dilatazione temporale della vita media  $\tau$ . Dobbiamo infatti aspettarci che  $\tau$  risulti dilatata di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,995^2}} \approx 10$$

rispetto alla vita media a riposo considerata nella precedente valutazione. Ciò comporta che il numero di muoni che raggiungono il livello del mare, in un'ora, dovrebbe essere:

$$N(\Delta t) = N_0 \exp\left(-\frac{15}{22}\right) \approx 0,5 N_0 = 500.$$

I risultati sperimentali confermano esattamente quanto previsto sulla base degli effetti relativistici. Com'è evidente, misurazioni di questo tipo si prestano bene per la verifica di tali effetti, in quanto il fattore di dilatazione  $\gamma$  è particolarmente grande.

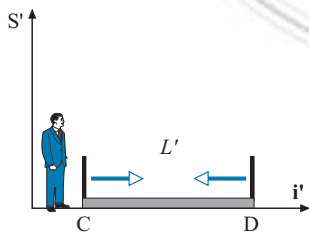


**FIGURA 15-17**  
Misura del numero di decadimenti dei muoni della radiazione cosmica.

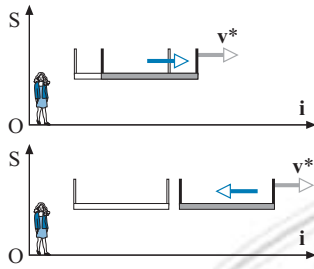
### 15-6 Contrazione delle lunghezze

Un altro aspetto particolarmente importante della cinematica relativistica è il fenomeno della contrazione delle lunghezze, strettamente connesso alla dilatazione dei tempi, in seguito all'invarianza della velocità della luce nel vuoto.

Per mostrare tale legame, esaminiamo nei due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ , la situazione rappresentata nelle figure 15-18 e 15-19. La sorgente, lo specchio e il rivelatore già considerati nei paragrafi precedenti, si trovano in quiete in  $S'$  in una configurazione parallela alla direzione del moto di  $S'$  rispetto a  $S$ .



**FIGURA 15-18**  
Percorso longitudinale del raggio luminoso, nel riferimento proprio della base CD.



**FIGURA 15-19**  
Due istantanee del raggio e della base CD, in moto nel riferimento S.

Nell'istante in cui l'estremo C transita davanti all'origine O di S, un raggio luminoso viene emesso nella direzione di D, per essere poi riflesso e tornare in C. Per l'osservatore in S, l'intervallo di tempo (proprio) fra questi due eventi è, come noto,

$$\Delta t_p = \frac{2L'}{c} = \frac{2L_p}{c}$$

nella quale  $L' = L_p$  rappresenta la *lunghezza propria* (in S') del dispositivo (il segmento AC). Come noto, per l'osservatore in S l'intervallo temporale (non proprio) fra gli stessi due eventi risulta invece  $\Delta t = \gamma \Delta t_p$ . Un'analisi della misura condotta in S, per la quale rimandiamo all'esempio 15-4, mostra che la *lunghezza L* della base CD appare *contratta* dello stesso fattore  $\gamma$ ; vale cioè la relazione

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (15-9)$$

### Esempio 15-4

Mostrare che l'analisi condotta da un osservatore in S del fenomeno illustrato in figura 15-19 mette in evidenza l'effetto di contrazione delle lunghezze.

Possiamo scrivere le leggi orarie che descrivono il moto del raggio, separatamente nella fase di andata e in quella di ritorno. Per la prima, il tempo  $\Delta t_1$  impiegato dal raggio per raggiungere il bordo D si calcola imponendo l'uguaglianza delle coordinate del raggio e del punto D. Si ha così

$$\begin{cases} x(t) = x_C(0) + ct \\ x_D(t) = x_D(0) + v^*t \end{cases} \Rightarrow c \Delta t_1 = v^* \Delta t_1 + [x_D(0) - x_C(0)].$$

E quindi, essendo la lunghezza in S,  $L = x_D(0) - x_C(0)$ ,

$$c \Delta t_1 = v^* \Delta t_1 + L \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c - v^*}.$$

Per il tragitto di ritorno, che inizia all'istante  $t^*$ , si ha:

$$\begin{cases} x(t) = x_D(0) - c(t - t^*) \\ x_C(t) = x_C(t^*) + v^*(t - t^*) \end{cases} \Rightarrow x_D(0) - c \Delta t_2 = x_C(0) + v^* \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{x_D(0) - x_C(0)}{c + v^*}, \text{ cioè } \Delta t_2 = \frac{L}{c + v^*}.$$

Il tempo totale impiegato dal raggio è allora

$$\Delta t = \frac{L}{c - v^*} + \frac{L}{c + v^*} = L \frac{2c}{c^2 - v^{*2}} = \frac{2L}{c} \gamma^2.$$

La relazione  $\Delta t = \gamma \Delta t_p$  implica quindi  $\frac{2L}{c} \gamma^2 = \gamma \frac{2L'}{c} \equiv \gamma \frac{2L_p}{c}$ , da cui otteniamo infine

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Dunque, l'osservatore in S misura per le lunghezze «longitudinali» un valore ridotto di un fattore  $1/\gamma$  rispetto alla lunghezza propria.

Ancora una volta, un'espressione analoga può essere scritta invertendo i ruoli dei due osservatori rispetto alla lunghezza da misurare. Tenendo presente che le misure delle ascisse degli estremi degli oggetti sono state eseguite simultaneamente nel riferimento in cui essi sono in moto, si possono riassumere i risultati ottenuti nella forma seguente.

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} & \text{per } \Delta t = 0 \\ \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} & \text{per } \Delta t' = 0 \end{cases} \quad (15-10)$$

In margine all'analisi fatta è opportuno notare che una discussione dell'effettiva possibilità di osservare, o addirittura fotografare, una contrazione longitudinale di un corpo che si muova ad alta velocità, richiede di tenere conto dei tempi impiegati dalla luce per arrivare dai vari punti dell'oggetto all'osservatore (o alla macchina fotografica). Si può dimostrare che in tal caso l'effetto osservabile non è una contrazione bensì una rotazione dell'oggetto studiato.

### 15-7 Relatività e trasformazioni di Lorentz

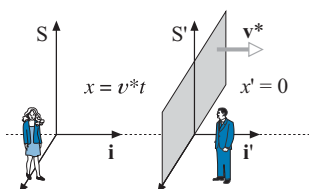
Uno degli obiettivi che ci eravamo posti è quello di trovare nuove relazioni di trasformazione fra sistemi inerziali, che sostituissero le trasformazioni di Galileo. Queste ultime ne dovrebbero risultare un caso particolare, al limite di velocità molto piccole rispetto a  $c$ . Alla luce delle discussioni fatte nei paragrafi precedenti, ci aspettiamo che le nuove trasformazioni siano consistenti con i risultati espressi dalle equazioni 15-3, 15-7, 15-10 (relatività della simultaneità, dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze).

Le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali di un evento fisico fra due sistemi di riferimento inerziali  $S$  e  $S'$ , si possono dedurre dai Principi della Relatività, assumendo che non esistano posizioni o direzioni privilegiate nello spazio, né istanti privilegiati nel tempo. Ciò implica che le trasformazioni siano *lineari*: si può vedere facilmente che la presenza in esse di termini non lineari introdurrebbe una sostanziale disomogeneità dello spazio e del tempo. Peraltro, la linearità delle trasformazioni assicura che la relazione (lineare), che descrive il moto rettilineo uniforme, mantiene la sua forma passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro (come richiesto dal Principio di inerzia e dal Principio di Relatività).

Esaminiamo il solito caso particolare in cui  $S$  e  $S'$  hanno assi paralleli e il loro moto relativo, caratterizzato dalla velocità  $\mathbf{v}^*$ , ha luogo lungo la direzione comune degli assi  $x$  e  $x'$ . Allora,  $x'$  può dipendere solo da  $x$  e  $t$ , e analogamente  $x$  solo da  $x'$  e  $t'$ . Infatti, il piano  $x' = 0$  si muove in  $S$  con velocità  $\mathbf{v}^* = v^* \mathbf{i}$  e quindi, per ogni  $y'$  e  $z'$ , a  $x' = 0$  deve corrispondere  $x = v^*t$  (fig. 15-20); viceversa, per ogni  $y$  e  $z$ , a  $x = 0$  corrisponde  $x' = -v^*t'$ ; quindi deve essere

$$x' = \gamma(x - v^*t); \quad x = \gamma'(x' + v^*t'). \quad (15-11)$$

Utilizzando il Principio di Relatività, è possibile dimostrare (esempio 15-5) che dev'essere  $\gamma = \gamma'$ .



**FIGURA 15-20**  
Al piano  $x' = 0$  di  $S'$  corrisponde il piano  $x = v^*t$  di  $S$ .



## Esempio 15-5

Dimostrare che i coefficienti  $\gamma$  e  $\gamma'$  che figurano nelle relazioni (15-11) sono uguali, utilizzando il Principio di Relatività e la corretta procedura di misurazione delle lunghezze.

Consideriamo, in maniera simmetrica, le situazioni in cui un regolo di lunghezza a riposo  $L_0$  è in quiete lungo l'asse  $x(x')$  del sistema di riferimento  $S(S')$  e si misura la sua lunghezza nel riferimento  $S'(S)$ . Come discusso in dettaglio nel testo, tali misure si ottengono dalla registrazione simultanea in  $S'(S)$  delle coordinate  $x'(x)$  degli estremi del regolo. È evidente che, per le (15-9), le lunghezze misurate saranno, rispettivamente,

$$L' = (\Delta x')_{t'=const} = L_0/\gamma'; \quad L = (\Delta x)_{t=const} = L_0/\gamma.$$

Per il Principio di Relatività le lunghezze  $L$  e  $L'$  devono essere uguali. Ciò impone che sia  $\gamma = \gamma'$ .

Di conseguenza, si ottiene

$$x' = \gamma(x - v^*t); \quad x = \gamma(x' + v^*t'). \quad (15-12)$$

Inoltre, con considerazioni puramente geometriche basate sulla coincidenza degli altri piani coordinati, è facile verificare che  $y'$  può dipendere solo da  $y$ , e  $z'$  solo da  $z$ . Con considerazioni analoghe a quelle del paragrafo 15-3-3, si arriva alla conclusione che  $y = y'$  e  $z = z'$ . Combinando fra loro le due relazioni (15-12), con semplici passaggi algebrici si trova

$$t' = \gamma[t - x(1 - 1/\gamma^2)/v^*], \quad (15-13)$$

e analogamente

$$t = \gamma[t' + x'(1 - 1/\gamma^2)/v^*].$$

Queste sono le relazioni di trasformazione per i tempi, che coinvolgono, come anticipato, sia le coordinate spaziali sia quelle temporali.

Per determinare il valore del coefficiente  $\gamma$ , sfruttiamo il *Secondo Principio della Relatività*, cioè la costanza della velocità della luce, utilizzando un procedimento che porta anche alla legge di trasformazione delle componenti delle velocità, lungo la direzione del moto relativo. Utilizzando le (15-12) e (15-13), si trova

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v^*dt)}{\gamma(dt - (1 - 1/\gamma^2)dx/v^*)} = \frac{v_x - v^*}{1 - (v_x/v^*)(1 - 1/\gamma^2)}, \quad (15-14)$$

e analogamente

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v^*dt')}{\gamma(dt' + (1 - 1/\gamma^2)dx'/v^*)} = \frac{v'_x + v^*}{1 + (v'_x/v^*)(1 - 1/\gamma^2)}.$$

Per un raggio di luce che si muove lungo l'asse  $x(\equiv x')$ , dev'essere  $v_x = v'_x = c$ . Tenendo conto di ciò, dalla (15-14) si ottiene

$$c = (c - v^*)/(1 - (1 - 1/\gamma^2)c/v^*) \Rightarrow 1/\gamma^2 = 1 - v^{*2}/c^2 \equiv 1 - \beta^2$$

e

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (15-15)$$

La scelta della radice positiva può essere giustificata su basi fisiche, in quanto fa sì che, per  $v^*/c \ll 1$ , si riottengano le trasformazioni di Galileo (risultando in queste condizioni  $\gamma \approx 1$ ). Inserendo l'espressione di  $\gamma$  nelle (15-12) e (15-13), si trovano infine le *trasformazioni di Lorentz*:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v^*t') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v^*}{c^2}x'\right) \\ y = y'; z = z' \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - v^*t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v^*}{c^2}x\right) \\ y' = y; z' = z \end{cases}. \quad (15-16)$$

In queste fondamentali relazioni, la coordinata spaziale  $x$  e quella temporale  $t$  entrano in modo simmetrico; spazio e tempo sono profondamente legati. Per meglio evidenziare tale proprietà, si possono rendere queste due coordinate dimensionalmente equivalenti, moltiplicando quella temporale per la costante universale  $c$ ; le trasformazioni di Lorentz, riscritte in termini delle coordinate  $x, (ct), x', (ct')$ , assumono la forma:

$$\begin{cases} x = \gamma[x' + \beta(ct')] \\ (ct) = \gamma[(ct') + \beta x'] \\ y = y'; z = z' \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = \gamma[x - \beta(ct)] \\ (ct') = \gamma[(ct) - \beta x] \\ y' = y'; z' = z' \end{cases}. \quad (15-17)$$

Per verificare che le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo (15-1) nelle situazioni in cui la velocità  $v^*$  sia piccola rispetto a  $c$ , basta ricordare che  $\lim_{v^* \rightarrow 0} \gamma = 1$ , per cui si ottiene, come richiesto,

$$\begin{cases} x = x' + v^*t' \\ t = t' \\ y = y'; z = z' \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = x - v^*t \\ t' = t \\ y' = y; z' = z \end{cases}.$$

### 15-7-1 Trasformazioni di velocità e accelerazioni

Sostituendo l'espressione di  $\gamma$  nella (15-14), si ricava  $v'_x = \frac{v_x - v^*}{1 - v_x \frac{v^*}{c^2}}$ . Le

trasformazioni delle altre componenti della velocità sono derivate nell'esempio 15-6.

#### Esempio 15-6

Determinare le leggi di trasformazione delle componenti trasverse della velocità, estendendo il procedimento utilizzato nel testo.

Dalle trasformazioni di Lorentz, differenziando si trova:

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{v^*}{c^2} dx \right), \quad dy = dy' \quad \text{e} \quad dz = dz'.$$

Quindi, per la componente  $y$  della velocità si ha:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma [dt - (v^*/c^2)dx]} = \frac{v_y}{\gamma (1 - v_x v^*/c^2)}.$$

La dimostrazione per la componente  $z$  è del tutto analoga.

In definitiva, le nuove leggi di trasformazione per le velocità sono:

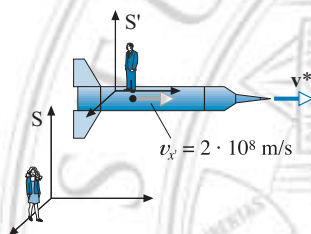
$$v'_x = \frac{v_x - v^*}{1 - v_x v^*/c^2}; v'_y = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_x v^*/c^2}; v'_z = \frac{v_z/\gamma}{1 - v_x v^*/c^2} \quad (15-18)$$

$$v_x = \frac{v'_x + v^*}{1 + v'_x v^*/c^2}; v_y = \frac{v'_y/\gamma}{1 + v'_x v^*/c^2}; v_z = \frac{v'_z/\gamma}{1 + v'_x v^*/c^2}.$$

Si osservi che le relazioni inverse si ottengono scambiando le coordinate (spaziali e temporali) dei due riferimenti e cambiando segno alla velocità relativa.

È facile verificare che, per velocità piccole rispetto a  $c$ , si ritrovano come caso particolare le leggi classiche di composizione delle velocità.

### Esempio 15-7



**FIGURA 15-21**  
Qual è la velocità della particella rispetto a S?

Supponiamo che il sistema  $S'$  sia solidale con un razzo che viaggia alla velocità  $v^* = 2 \cdot 10^8$  m/s, e che entro il razzo venga accelerata una particella, in modo che essa viaggi (in  $S'$ ) con velocità (parallela a  $\mathbf{v}^*$ , e con lo stesso verso)  $v' = 2 \cdot 10^8$  m/s (fig. 15-21). Confrontare i valori previsti per la velocità della particella misurata da un osservatore in  $S$ , usando la legge classica di composizione delle velocità, oppure la legge di trasformazione relativistica.

L'addizione classica delle velocità porta a prevedere per  $v$  un valore di  $4 \cdot 10^8$  m/s, incompatibile con il secondo Principio della Relatività. Usando le trasformazioni relativistiche, si trova facilmente

$$v_x = \frac{(2 + 2)10^8}{1 + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3}} = \frac{36}{13} \cdot 10^8 \text{ m/s} < c.$$

Secondo questa previsione, l'osservatore in  $S$  misura una velocità della particella inferiore a  $c$ , coerentemente con il ruolo di velocità limite giocato da  $c$ .

Dev'essere chiaro che le relazioni discusse si riferiscono alle velocità di uno stesso corpo in due diversi sistemi di riferimento inerziali. Se invece un dato osservatore misura le velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  di due corpi 1 e 2 e ne vuole trovare la *velocità relativa*  $\mathbf{v}$ , egli deve semplicemente applicare la nota legge di composizione vettoriale:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . Si rifletta tuttavia sul fatto che, diversamente dal caso classico, in generale  $\mathbf{v}$  non coincide con la velocità di nessuno dei due corpi nel riferimento proprio dell'altro.

Le trasformazioni delle accelerazioni si ricavano con procedimenti analoghi a quelli utilizzati per le velocità: il risultato è riportato nelle relazioni seguenti:

$$\begin{cases} a'_x = a_x / [\gamma(1 - v^*v_x/c^2)]^3 \\ a'_y = a_y / [\gamma(1 - v^*v_x/c^2)]^2 + (a_x v^* v_y / c^2) / [\gamma^2(1 - v^*v_x/c^2)^3] \\ a'_z = a_z / [\gamma(1 - v^*v_x/c^2)]^2 + (a_x v^* v_z / c^2) / [\gamma^2(1 - v^*v_x/c^2)^3] \end{cases}$$

Ovviamente, le trasformazioni inverse si ottengono scambiando le grandezze in  $S$  con quelle in  $S'$  e  $v^*$  con  $-v^*$ .

È importante osservare che *l'accelerazione non è invariante per le trasformazioni di Lorentz*, mentre lo è per le trasformazioni di Galileo.

Concludiamo questo paragrafo riportando l'espressione assunta dalle trasformazioni di Lorentz, nel caso più generale in cui il moto relativo

dei due sistemi di riferimento avvenga lungo una direzione arbitraria:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}^* t + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}^*}{v^{*2}} (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{r} - v^{*2} t) \\ t' = \gamma \left( t - \frac{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) \end{cases}$$

### 15-8 Introduzione alla dinamica relativistica

Le leggi della Meccanica classica di Newton sono covarianti per trasformazioni di Galileo; d'altra parte, poiché le corrette leggi di trasformazione fra sistemi di riferimento inerziali sono quelle di Lorentz, ci si può aspettare

- che le leggi della Meccanica debbano essere modificate rispetto a quelle classiche, al fine di renderle covarianti per trasformazioni di Lorentz;
- che le nuove leggi si riconducano a quelle classiche, quando le velocità in gioco sono molto piccole rispetto a quella della luce.

Poiché una trattazione completa della Dinamica relativistica non può rientrare nell'ambito di questo testo, ci limiteremo a presentare alcuni aspetti della problematica ad essa relativa. Per illustrare il tipo di modificazioni che devono essere introdotte, seguiremo un approccio basato sull'analisi di processi di urto, in sistemi isolati.

Nel capitolo 7 è stato mostrato che in tali condizioni la quantità di moto totale si conserva. D'altra parte, in una trattazione avanzata della meccanica classica, tale principio (oltre a quello di conservazione dell'energia), può essere messo in relazione con proprietà generali di omogeneità dello spazio (oltre a quello del tempo). È perciò ragionevole assumere che nella Meccanica relativistica valgano analoghi principi, in modo che la legge di *conservazione della quantità di moto per i sistemi isolati mantenga il ruolo di una legge fondamentale della Fisica*. In tal caso, per il Principio di Relatività, essa *dovrà valere in ogni sistema di riferimento inerziale* ed essere covariante per trasformazioni di Lorentz.

Un'analisi dettagliata mostra che ciò non avviene se si mantiene la definizione classica di quantità di moto,  $\mathbf{q} = m \mathbf{v}$ , e che invece basta ridefinire la quantità di moto come

$$\mathbf{q} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (15-19)$$

affinché la conservazione della quantità di moto in un sistema di riferimento inerziale implichi la conservazione in qualunque altro sistema di riferimento inerziale.

Ciò consente di mantenere valida, come nel caso classico, la relazione

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (15-20)$$

ove  $\mathbf{F}$  è il risultante delle forze agenti.

Tutte le previsioni che si possono ottenere utilizzando le (15-19) e (15-20), sono verificate dai risultati sperimentali relativi alla Dinamica di particelle ad alta velocità, per esempio elettroni in campi elettrici o magnetici costanti (come illustrato negli esempi 15-11 e 15-12). Dalla

(15-20), in particolare, si può dedurre (par. 15-9-1) un'espressione dell'energia cinetica perfettamente in accordo con i risultati sperimentali presentati nel paragrafo 15-2.

Come noto, uno degli aspetti caratteristici della Meccanica relativistica è l'*equivalenza massa-energia*. Per introdurre in modo semplice tale concetto, verrà trattato (par. 15-9-2) un esempio di urto completamente anelastico, facendo vedere che alla diminuzione di energia cinetica è associato un aumento di massa del sistema, secondo la relazione

$$\Delta m = -\frac{\Delta K}{c^2}. \quad (15-21)$$

Ciò corrisponde alla conservazione dell'energia totale del sistema, definita attribuendo a ogni *particella libera l'energia*

$$E = \gamma mc^2. \quad (15-22)$$

## 15-9 Energia

### 15-9-1 Energia cinetica

Le considerazioni energetiche sviluppate in questo testo (a partire dal capitolo 6) hanno preso le mosse dalla definizione di lavoro elementare di una forza e dal teorema delle forze vive. In Meccanica relativistica conviene seguire analogo procedimento, con le opportune generalizzazioni delle relazioni classiche. In particolare, si conserva la definizione di lavoro elementare,

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e si definisce la variazione di energia cinetica, subita da una particella, come il corrispondente lavoro complessivo eseguito dalle forze (teorema delle forze vive).

Tenuto conto della (15-19), si ha

$$dK = \delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q}}{m\gamma} = \frac{dq^2}{2m\gamma}. \quad (15-23)$$

Differenziando l'importante relazione

$$q^2 c^2 - (\gamma mc^2)^2 = -(mc^2)^2, \quad (15-24)$$

dimostrata nell'esempio 15-8, si trova  $dq^2 = 2(mc^2)^2 \gamma d\gamma$  che, previa sostituzione nella (15-23), permette di ottenere il legame di proporzionalità fra la variazione elementare di  $K$  e quella corrispondente del fattore  $\gamma$ :

$$dK = mc^2 d\gamma.$$

Integrando, a partire dalla situazione in cui  $v = 0$  ( $\gamma = 1$ ), cui è naturale associare energia cinetica nulla, si trova infine l'energia cinetica relativistica

$$K = mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (15-25)$$

## Esempio 15-8

Dimostrare che per una particella di massa  $m$  la quantità  $q^2 - (\gamma mc)^2$  non dipende da  $v$ , ma solo da  $m$ , ed è quindi una quantità invariante, cioè indipendente dal sistema di riferimento inerziale.

Essendo  $\mathbf{q} = \gamma m \mathbf{v}$  si ha  $q^2 = \gamma^2 m^2 v^2$ ; sottraendo la quantità omogenea  $\gamma^2 m^2 c^2$ , e tenuto conto dell'espressione di  $\gamma$  data dalla (15-6), si ottiene

$$q^2 - \gamma^2 m^2 c^2 = \gamma^2 m^2 (v^2 - c^2) = -m^2 c^2.$$

Questo risultato mostra direttamente l'indipendenza dal sistema di riferimento della quantità considerata. Moltiplicando per  $c^2$  i membri della precedente relazione, si ottiene la (15-24).

È interessante confrontare questa espressione con la corrispondente classica. Occorre trovare un'espressione del fattore  $\gamma$  nel limite classico in cui  $\beta = v/c$  è molto minore di 1; mediante uno sviluppo in serie di potenze di  $\beta^2$ ,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!} \beta^4 + \dots,$$

sostituendo nella (15-25) si ha

$$K_R \approx \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} m c^2 \beta^4 + \dots \equiv K_C + \frac{3}{8} m c^2 \beta^4 + \dots \quad (15-26)$$

È quindi evidente che, per velocità piccole rispetto a  $c$ , l'energia cinetica si riconduce alla familiare espressione classica  $K_C = (1/2) m v^2$ .

## 15-9-2 Energia a riposo e massa

Dall'espressione (15-25) si ottiene l'espressione della grandezza

$$E = \gamma m c^2 = m c^2 + K, \quad (15-27)$$

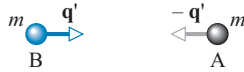
cui si dà in Relatività il significato di *energia* totale (di una particella di massa  $m$  e quantità di moto  $\mathbf{q}$ ). Essa è la *somma di due termini*: l'*energia cinetica*  $K$ , associata alla velocità della particella, e la quantità

$$E_0 = m c^2 \quad (15-28)$$

indipendente dal moto della particella, ma *associata alla sua massa* e detta pertanto *energia (di massa) a riposo* della particella.

Si può giustificare tale interpretazione discutendo un urto completamente anelastico fra due particelle e mostrando che la conservazione della quantità di moto totale e dell'energia totale sono consistenti con la definizione (15-27) di energia: alla diminuzione dell'energia cinetica totale, corrisponde un aumento nella somma delle energie a riposo (15-28) delle particelle, cioè un aumento della massa totale del sistema. Ciò rappresenta un primo esempio di *equivalenza massa-energia*: la *variazione di energia interna* (corrispondente, secondo la Meccanica classica, alla variazione di energia cinetica nell'urto) è interpretabile a tutti gli effetti come una variazione di massa.

prima



dopo



FIGURA 15-22

Urto anelastico di due particelle uguali, nel riferimento  $S'$ .

Consideriamo infatti due particelle identiche A e B, di massa  $m$ , che, in un dato sistema di riferimento  $S'$ , si muovono l'una verso l'altra con velocità uguali e opposte (lungo l'asse  $x'$ ) e subiscono un urto completamente anelastico, dando luogo alla formazione di un'unica particella C (fig. 15-22).

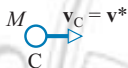
Per la conservazione della quantità di moto, inizialmente nulla, dopo l'urto il corpo C sarà fermo in  $S'$ ; in tale sistema di riferimento si osserva quindi una diminuzione dell'energia cinetica totale, che passa dal valore iniziale  $K' = 2mc^2(\gamma - 1)$  a un valore finale nullo. Dimostriamo che tale diminuzione è collegata alla variazione di massa del sistema. Per determinare la massa  $M_C$  del corpo C esaminiamo l'urto in un altro sistema di riferimento (fig. 15-23): quello (S) in cui la particella A è ferma e l'asse  $x(\equiv x')$  è diretto lungo la congiungente le due particelle. Essendo

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}'_B = -\mathbf{v}'_A,$$

prima



dopo



mediante le trasformazioni delle velocità (15-18) si può calcolare, per ciascuna particella P, la parte scalare della velocità, in S:

$$v_A = \frac{v'_A + v^*}{1 + \frac{v'_A v^*}{c^2}} = 0; \quad v_B = \frac{v'_B + v^*}{1 + \frac{v'_B v^*}{c^2}} = \frac{2v^*}{1 + \frac{v^{*2}}{c^2}}; \quad v_C = v'_C + v^* = v^*.$$

FIGURA 15-23

Lo stesso urto, nel riferimento S in cui A è ferma.

Ad esse corrispondono i rispettivi fattori  $\gamma_P = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_P^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}$  dati da:

$$\gamma_A = 1; \quad \gamma_B = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}; \quad \gamma_C = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma \left( \text{ove } \beta = \frac{v^*}{c} \right).$$

Il punto cruciale della nostra analisi sta nel fatto che *anche in S si conserva la quantità di moto totale*:

$$\mathbf{Q}_{\text{in}} = \mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B = \mathbf{q}_B = \gamma_B m v_B \mathbf{i} = \mathbf{Q}_{\text{fin}} = \mathbf{q}_C = M_C \gamma_C v_C \mathbf{i}.$$

Risolviendo in  $M_C$  si ottiene:

$$M_C = \frac{2m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv 2m\gamma.$$

La massa della particella C formata nell'urto è più grande della somma delle masse dei corpi A e B.

Le implicazioni di questo risultato appaiono chiaramente se si torna a considerare l'urto in  $S'$ : in tale sistema di riferimento, l'energia totale dei due corpi si conserva nell'urto, mentre l'energia cinetica iniziale si trasforma totalmente in (un aumento di) energia a riposo, con la formazione del corpo C (fermo in  $S'$ ) di massa  $M_C > 2m$ .

Infatti, essendo  $K'_C = 0$ , si ha

$$\begin{cases} E'_C = E_{0C} = M_C c^2 = \frac{2m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2m c^2 + K'_A + K'_B = E'_A + E'_B \\ E_{0C} - (E_{0A} + E_{0B}) = M_C c^2 - 2m c^2 = K'_A + K'_B \end{cases}$$

Si verifica facilmente che l'energia si conserva anche nel sistema S.

## 15-9-3 Energia, massa e quantità di moto

Utilizzando la relazione (15-24) è possibile stabilire un importante legame fra l'energia  $E$ , l'energia (o massa) a riposo  $E_0$  e la quantità di moto  $q$  di una particella libera. Infatti essa può essere scritta nella forma

$$E^2 = (mc^2)^2 + (qc)^2 = E_0^2 + (qc)^2 \quad (15-29)$$

che permette di calcolare l'energia totale di una particella di cui siano note la massa e la quantità di moto.

## Esempio 15-9

Tenuto conto che  $E = mc^2 + K$ , dedurre le relazioni fra  $E$ ,  $q$  e  $m$ , nei casi di velocità molto piccole rispetto a  $c$  (approssimazione classica) e di velocità  $\approx c$  (approssimazione ultrarelativistica).

Sostituendo nella (15-29), si ottiene  $K^2 + 2Kmc^2 = q^2c^2$ . Nei casi in cui l'energia cinetica è piccola rispetto all'energia a riposo, per esempio quando  $v \ll c$ , si può trascurare il termine quadratico in  $K$ , e fra energia cinetica e quantità di moto si trova la relazione approssimata

$$K \approx \frac{q^2}{2M}; \quad q = \sqrt{2mK} \quad (K \ll mc^2),$$

identica a quella classica.

Nel caso opposto, di velocità molto elevate, in cui invece sia  $K \gg mc^2$ , il termine quadratico in  $K$  è dominante rispetto a quello lineare e si ha  $K \approx qc$ ; nello stesso grado di approssimazione, si ha

$$E \approx K \approx qc \quad (K \gg mc^2). \quad (15-30)$$

Una semplice relazione fra velocità, energia e quantità di moto si ottiene dividendo membro a membro le equazioni (15-19) e (15-27):

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} \frac{c^2}{E}; \quad \beta = \frac{qc}{E}. \quad (15-31)$$

Essa mostra direttamente che, per  $v \approx c$ , energia e quantità di moto sono direttamente proporzionali, come visto nell'esempio precedente. Ciò permette di caratterizzare il moto delle particelle con la loro quantità di moto  $\mathbf{q}$ , ottenendo l'energia mediante la (15-29).

Dalle relazioni generali (15-29) e (15-31) si deduce anche che la velocità di una particella di massa  $m$  è sempre inferiore a quella della luce nel vuoto, e che essa tende (asintoticamente) a  $c$  al tendere di  $m$  a zero.

## 15-9-4 Fotoni e particelle di massa nulla

I fenomeni relativi all'interazione fra luce e materia (per esempio l'effetto fotoelettrico), indicano che la luce può essere considerata come costituita di **fotoni**, «quanti» di energia e impulso che si muovono con velocità  $c$  (nel vuoto). Sulla base delle precedenti considerazioni, i fotoni possono quindi essere considerati come *particelle di massa nulla*, per le quali

$$E = qc. \quad (15-32)$$



Per il Secondo Principio della Relatività, i fotoni si muovono con velocità  $c$  in ogni sistema di riferimento inerziale, cioè non esiste alcun sistema di riferimento in cui essi siano a riposo: di conseguenza, l'energia a riposo, e quindi anche la massa, devono essere nulle. In generale, segue dalle relazioni (15-29) e (15-31) che ogni particella di massa nulla si muove alla velocità della luce.

La correttezza della (15-32) e della relazione ipotizzata da Einstein,  $E = h\nu$  (fra l'energia dei fotoni e la frequenza  $\nu$  della radiazione elettromagnetica, attraverso la costante di Planck  $h$ ), fu per la prima volta confermata sperimentalmente da studi sulla diffusione di raggi X da metalli, le cui caratteristiche (*effetto Compton*) sono in perfetto accordo con una descrizione in termini di collisioni elastiche fra fotoni ed elettroni, nelle quali si conservano sia l'energia sia la quantità di moto totale.

I risultati sperimentali a disposizione fino a qualche anno fa erano compatibili con l'attribuzione di una massa nulla anche ai *neutrini* (particelle prodotte ad esempio nei decadimenti beta dei nuclei e in particolare (par. 4-18-2) nel decadimento di un neutrone in un protone più un elettrone ed un neutrino). Recenti esperimenti hanno fornito alcune indicazioni, ancora non conclusive, di un valore non nullo (anche se estremamente piccolo) della massa dei neutrini. Un tale fatto, se confermato, avrebbe implicazioni notevoli anche per quanto riguarda il problema della massa dell'Universo e quindi della sua evoluzione (par. 9-11-1).

### 15-10 Forza, accelerazione e massa

La relazione  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$  ha una conseguenza piuttosto sorprendente in Dinamica relativistica: a causa della dipendenza di  $\gamma$  da  $v$  e quindi da  $t$ , l'accelerazione non è in generale parallela a  $\mathbf{F}$ . Infatti,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{q}}{\gamma m} \right) = \frac{\mathbf{F}}{\gamma m} - \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v}. \quad (15-33)$$

Come dimostrato nell'esempio (15-10), questa relazione si può scrivere anche come

$$\mathbf{a} = \frac{c^2}{E} \mathbf{F} - \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})}{E} \mathbf{v}, \quad (15-34)$$

da cui è immediato dedurre che accelerazione e forza sono parallele nei casi in cui  $\mathbf{F}$  è parallela o perpendicolare a  $\mathbf{v}$ . In entrambi tali casi particolari, si può scrivere

$$\mathbf{F} = m^* \mathbf{a}$$

ove, in analogia alla seconda equazione della Dinamica classica, il rapporto  $m^*$  fra forza e accelerazione viene a volte chiamato *massa (dipendente dalla velocità)*. In realtà questa dizione non è molto felice, in quanto  $m^*$  dipende non solo dal corpo (e dalla sua velocità nel riferimento considerato), ma anche dalla direzione relativa di forza e velocità; così si dovrebbe distinguere fra una «*massa longitudinale*»  $m_l$  (nel caso di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{v}$  paralleli) e una «*massa trasversa*»  $m_t$  (nel caso di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{v}$  ortogonali). Dalla (15-34) è immediato ricavare  $m_t$ ; nell'esempio 15-11 si dimostra invece l'espressione per  $m_l$ . Si trova così:

$$m_t = \gamma m; \quad m_l = \gamma^3 m.$$

## Esempio 15-10

Dimostrare che quando la forza risultante e la velocità sono parallele o perpendicolari fra loro, l'accelerazione è parallela alla forza.

Nel caso di  $\mathbf{F}$  parallela a  $\mathbf{v}$ , tale proprietà risulta evidente dalla (15-33). Più in generale, è conveniente osservare che, tenendo conto della (15-23), il coefficiente che moltiplica  $\mathbf{v}$  nel secondo membro dell'equazione (15-33) può essere riscritto come:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\gamma mc^2} \frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dK}{dt} = \frac{1}{E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{\gamma m} - \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{\gamma m} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma mc^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = \frac{c^2}{E} \mathbf{F} - \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})}{E} \mathbf{v}.$$

Si noti che il termine che contiene  $\mathbf{v}$  dipende dalla potenza  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . La relazione trovata mostra che l'accelerazione è parallela alla forza anche quando  $\mathbf{F}$  è perpendicolare a  $\mathbf{v}$ , in quanto la potenza è nulla. In tale caso, inoltre, l'energia cinetica  $K$  della particella resta costante.

## Esempio 15-11

Una tipica situazione che si verifica negli acceleratori elettrostatici è quella di particelle, di massa  $m$  e carica elettrica  $q_p$ , soggette all'azione di un campo elettrico uniforme  $\mathbf{E}$ , diretto lungo il verso positivo dell'asse  $x$ . Sapendo che il campo esercita la forza  $\mathbf{F} = q_p \mathbf{E}$  sulle particelle e che queste sono inizialmente ferme, determinare la loro accelerazione all'istante generico  $t$ . Ricavare inoltre l'espressione della loro «massa longitudinale».

All'istante iniziale, in cui è  $\mathbf{v} = 0$ , la forza  $\mathbf{F} = q_p \mathbf{E}$  determina un'accelerazione parallela a  $\mathbf{E}$  e la carica si mette in moto lungo la direzione del campo, di modo che anche successivamente l'accelerazione continua ad essere parallela alla forza (essendo  $\mathbf{v}$  parallela a  $\mathbf{F}$ ): il moto è rettilineo e avviene lungo l'asse  $x$ . Si può allora scrivere la (15-34) nella forma scalare

$$\begin{aligned} a_x &= F/\gamma m - Fv^2/\gamma mc^2 = F(1 - v^2/c^2)/\gamma m = F/\gamma^3 m = \\ &= q_p E/m(1 - v^2/c^2)^{3/2} = F/m_l, \end{aligned}$$

ove la quantità  $m_l = \gamma^3 m = m/(1 - \beta^2)^{3/2}$  viene chiamata «massa longitudinale».

L'accelerazione non è costante nel tempo, ma dipende dal modulo della velocità, tramite il fattore  $\gamma$ . Anche se il campo è uniforme, il moto non è uniformemente accelerato e la dipendenza di  $v$  da  $t$  non è lineare: integrando le precedenti equazioni differenziali, per esempio con il metodo descritto nel paragrafo 3-25, si dimostra infatti che  $v(t) = c/\sqrt{1 + (mc/q_p Et)^2}$ .

Al crescere di  $t$  il rapporto  $\beta = v/c$  aumenta, restando comunque inferiore a 1, e per  $q_p Et \gg mc$  si ha  $v \approx c$ . Ciò conferma che  $c$  ha il ruolo di velocità limite per ogni moto, anche se causato da una forza di intensità arbitrariamente elevata, e indipendentemente dall'intervallo di tempo in cui essa agisce. In altri termini si può dire che risulta sempre più difficile fare aumentare ulteriormente la velocità, man mano che essa cresce: tutto va come se la particella, in seguito all'aumento della sua massa longitudinale, avesse un'inerzia fortemente crescente.

## Esempio 15-12

Una particella, di massa  $m$  e carica  $q_p$ , in moto con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$ , entra in una regione ove è presente un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme, diretto perpendicolarmente a  $\mathbf{v}_0$ . Sapendo che il campo esercita sulla particella la forza di Lorentz  $\mathbf{F} = q_p \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , dimostrare che essa si muove lungo una circonferenza e determinare la dipendenza del raggio di curvatura  $R$  dalla velocità della particella.

La forza è perpendicolare alla velocità e quindi non fa lavoro; di conseguenza, per le (15-23) e (15-25) l'energia cinetica e il modulo  $v$  della velocità restano costanti; sono costanti anche  $\gamma$  e il modulo  $q$  della quantità di moto. Come abbiamo discusso nel testo, se forza e velocità sono perpendicolari, anche l'accelerazione è perpendicolare a  $\mathbf{v}$ , e risulta quindi centripeta e di modulo costante:

$$a = q_p v B / \gamma m = v^2 / R \Rightarrow R = \gamma m v / q_p B = q / q_p B.$$

Il raggio di curvatura della traiettoria è proporzionale alla quantità di moto, come previsto anche classicamente. Tuttavia, va tenuto presente che l'espressione relativistica di  $q$  contiene il fattore  $\gamma$ , dipendente dalla velocità. La conferma sperimentale di queste previsioni, con gli esperimenti di Bucherer e Kaufmann nel 1909/10, costituì una delle prime verifiche della teoria della Relatività.

Sulla base della relazione precedente si possono discutere le caratteristiche degli acceleratori circolari chiamati *ciclotroni*. Per fare muovere una particella ad alta velocità in un acceleratore di questo tipo, si esercita su di essa una forza centripeta mediante opportuni campi magnetici: si trova che occorre un campo magnetico molto più intenso di quello previsto dalle leggi di Newton. Infatti, fissati il raggio e il modulo della velocità, l'intensità  $B$  dev'essere uguale a  $\gamma$  volte quella richiesta dalla Meccanica classica. In altri termini, tutto va come se, aumentando la «massa trasversa» ( $m_t = \gamma m$ ) con la velocità, crescesse dello stesso fattore anche l'inerzia della particella.

## 15-11 Equivalenza massa-energia

## 15-11-1 La formula di Einstein

In questo capitolo si è scelto di assumere la *massa* come grandezza «propria», cioè come *proprietà intrinseca* di ogni particella, indipendente dal sistema di riferimento. Di conseguenza, la quantità di moto è stata definita come  $\mathbf{q} = \gamma m \mathbf{v}$  e l'energia come  $E = \gamma m c^2$ . Altri autori generalizzano il concetto di massa, distinguendo fra «massa propria»  $m_0$  e «massa relativistica»  $m = \gamma m_0$ . Questa scelta permette di conservare alla quantità di moto la scrittura classica  $\mathbf{q} = m \mathbf{v}$  e di scrivere l'energia come  $E = m c^2$ , certamente la più famosa relazione di tutta la teoria di Einstein.

Il fatto veramente rivoluzionario è la possibilità di associare energia (a riposo,  $E_0$ ) alla massa «propria», come mostrato dalla (15-28). Questo fatto nuovo, non contemplato dalla Fisica classica, ha notevoli conseguenze pratiche: tutte le applicazioni della Fisica nucleare, in particolare la possibilità di disporre di grandi quantità di energia, si basano su tale relazione. Oltre a ciò, è possibile comprendere perché non sussista, in Relatività, la proprietà di additività delle masse; ed è possibile capire da dove deriva l'«energia di legame» di ogni sistema legato.

### 15-11-2 Alcune trasformazioni massa-energia

L'equivalenza massa-energia spiega molti fenomeni che hanno un ruolo notevole nella Fisica moderna. Fra questi ricordiamo i processi catalogati sotto i suggestivi nomi di *annichilazione della materia* e *materializzazione dell'energia*, e più in generale anche la liberazione di *energia nelle reazioni nucleari* e la *produzione di nuove particelle* nelle collisioni ad alta energia.

Alla prima categoria appartengono alcuni dei fenomeni che hanno luogo nell'*interazione fra particelle e antiparticelle*: per esempio, in un urto fra elettrone e positrone si può avere la «scomparsa» della massa (a riposo delle due particelle) e la creazione di *due* fotoni (che hanno massa a riposo nulla), la cui energia totale corrisponde a quella disponibile inizialmente:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma.$$

Si può dimostrare che non può avere luogo l'apparentemente analogo processo in cui si produce *un solo fotone*. Infatti, la conservazione dell'energia totale  $E$  è necessariamente accompagnata, in ogni sistema inerziale, da quella della quantità di moto totale  $\mathbf{Q}$ ; nel sistema del centro di massa della coppia elettrone-positrone,  $\mathbf{Q}$  è nulla, mentre non esiste alcun riferimento nel quale un solo fotone possa avere quantità di moto nulla. Tali considerazioni non si applicano, invece, nei casi in cui la sola particella presente nello stato finale ha *massa diversa da zero*, come avviene, ad esempio, negli acceleratori a fasci incrociati di particelle e antiparticelle di alta energia (con processi simili a quelli descritti nel paragrafo 15-9-2).

Fra i processi in cui si «materializza l'energia» rientra la *produzione di coppie* elettrone-positrone nell'interazione di fotoni di alta energia con la materia.

$$\gamma + \dots \rightarrow e^+ + e^- + \dots$$

Naturalmente, questo processo può avvenire solo se l'energia del fotone è superiore alla somma delle energie a riposo delle due particelle.

### 15-11-3 Difetto di massa ed energia di legame

Sappiamo che l'energia totale e la quantità di moto totale di un sistema di particelle si conservano in ogni sistema di riferimento inerziale. Nel riferimento del loro centro di massa, in cui la quantità di moto totale è nulla, l'energia ha il suo minimo valore  $E_0$ ; per il sistema nel suo complesso questa energia, corrispondente all'energia interna della Meccanica classica, può essere considerata come l'energia a riposo  $M_0c^2$ , associata alla massa (a riposo)  $M_0$  del sistema. Ad essa contribuiscono sia le energie a riposo dei singoli costituenti sia quelle cinetiche e di interazione. Come già anticipato nel paragrafo 4-15, negli stati legati,  $M_0$  è inferiore alla somma delle masse dei singoli costituenti, a causa dell'energia di interazione (negativa) dovuta alle forze attrattive che tengono insieme il sistema. La differenza  $\Delta m$  fra queste quantità si chiama «*difetto di massa*» e l'energia corrispondente  $B = \Delta mc^2$  è appunto l'*energia di legame* della struttura. Essa coincide con l'energia che si deve fornire al sistema per separarne i costituenti, portandoli a riposo a grande distanza ognuno dagli altri. La sua entità dipende dal tipo di interazione respon-

sabile del legame della struttura: è particolarmente interessante farne un confronto nelle due situazioni tipiche dell'interazione nucleare e di quella elettromagnetica.

Il nucleo dell'atomo di deuterio, detto *deutone* (un neutrone e un protone), è la più semplice struttura nucleare legata, che può sussistere per effetto dell'*interazione nucleare*; la massa del deutone è  $m_d = 3,343 \cdot 10^{-27}$  kg. Tale valore è minore della somma delle masse dei due componenti: infatti, poiché le masse del protone e del neutrone sono  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$  kg e  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$  kg, sommando si ottiene  $m_p + m_n = 3,348 \cdot 10^{-27}$  kg. La massa mancante è diventata energia di interazione: l'energia di legame di tale sistema risulta quindi  $B = \Delta mc^2 = 3,57 \cdot 10^{-13}$  J = 2,22 MeV. Essa costituisce una frazione  $f = B/m_d c^2 \approx 0,12\%$  dell'energia totale del sistema.

L'atomo di idrogeno, costituito di un protone e di un elettrone, è invece il più semplice sistema legato dall'*interazione elettromagnetica*. L'energia di legame, misurata ad esempio con esperimenti di ionizzazione, è di 13,6 eV, cioè molto più piccola di quella del deutone: corrisponde a un difetto di massa uguale a una frazione  $f \approx 1,45 \cdot 10^{-6}\%$  della massa totale, valore difficilmente rivelabile con gli strumenti normalmente utilizzati nelle misurazioni di masse. Ciò spiega perché nelle *reazioni chimiche*, nelle quali avvengono riarrangiamenti di strutture atomiche e molecolari caratterizzate da energie di legame di tale ordine di grandezza, non sia mai stata riscontrata una violazione della conservazione della massa. In realtà, *ciò che si conserva in tutte le reazioni, sia chimiche sia nucleari, è l'energia totale, e non la somma delle masse.*

Il grande divario fra i valori del parametro  $f$ , nel caso dei legami nucleari e in quello dei legami elettromagnetici, spiega anche perché, per ottenere una data quantità di energia mediante un reattore nucleare, si utilizzi una quantità di combustibile (nucleare) molto più piccola di quella equivalente di petrolio (che invece brucia in un ordinario processo di combustione chimica).

## RIEPILOGO DI ALCUNE RELAZIONI SIGNIFICATIVE

Fattori relativistici: 
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\gamma \geq 1); \quad \beta = \frac{v^*}{c} \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

Dilatazione degli intervalli temporali: 
$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \equiv \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Contrazione delle lunghezze: 
$$L = \frac{L_p}{\gamma} \equiv L_p \sqrt{1 - \beta^2}$$

Trasformazioni di Lorentz: 
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v^*t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v^*}{c^2}x\right) \\ y' = y; \quad z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni delle velocità:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v^*}{1 - v_x v^*/c^2} \\ v'_y = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_x v^*/c^2} \\ v'_z = \frac{v_z/\gamma}{1 - v_x v^*/c^2} \end{cases}$$

Quantità di moto:  $\mathbf{q} = \gamma m \mathbf{v}$

Energia di una particella libera:  $E = \gamma m c^2$ ; energia a riposo  $E_0 = m c^2$

Energia cinetica:  $K = m c^2 (\gamma - 1)$

Energia di particelle con massa nulla:  $E = q c$