Vettori

Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 4 aprile 2011

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Vettori

- Un vettore è una **entità matematica astratta**:
  - Utilizzata per **rappresentare entità fisiche concettualmente molto diverse tra loro**, quali:
    - Spostamento rettilineo di un punto;
    - Velocità;
    - Accelerazione;
    - Quantità di moto;
    - Momento della quantità di moto;
    - Forza;
    - Momento di una forza;
    - Campo elettrico;
    - Campo magnetico;
    - Momento di dipolo elettrico;
    - Momento di dipolo magnetico;
    - Densità di corrente.

Vettori in Matematica

- In matematica un vettore è un **elemento** di una particolare **struttura algebrica**, denominata **Spazio Vettoriale**.
- **Struttura algebrica**: insieme S (chiamato **insieme sostegno**) munito di una o più **leggi di composizione** (operazioni), le quali:
  - Possono essere, **unarie**, **binarie**, ecc.
  - Sono caratterizzate dall'avere proprietà quali **commutatività** e **associatività**, ecc.
- Le entità matematiche sono spesso **astrazioni** di entità concrete utilizzate nelle scienze sperimentali (fisica, biologia, economia, ecc.):
  - I vettori sono astrazioni di entità concrete utilizzate soprattutto nella fisica (spostamento rettilineo di un punto, forza, ecc.).

Grandezze Fisiche

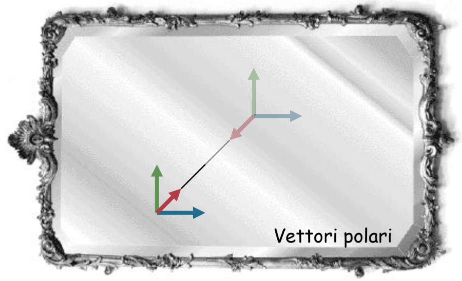
- **Grandezze scalari**: completamente specificate assegnando un **valore numerico** e una **unità di misura**.
  - Esempi: lunghezza, tempo, superficie, volume, massa, densità, temperatura, carica elettrica, densità di carica, potenziale, lavoro, energia, flusso, intensità di corrente, resistenza, resistività, capacità, induttanza, impedenza, ecc.
- **Grandezze vettoriali**: completamente specificate assegnando un **valore numerico** (detto **norma** o modulo), una **direzione**, un **verso** e una **unità di misura**.
  - Esempi: spostamento rettilineo di un punto, velocità, accelerazione, quantità di moto, momento della quantità di moto, forza, momento di una forza, campo elettrico, campo magnetico momento di dipolo elettrico, momento di dipolo magnetico, densità di corrente, ecc.
- **Grandezze tensoriali**: la loro specificazione è ancora più complicata
  - Esempi: rotazione, tensore di inerzia, tensore degli sforzi, tensore energia-impulso del campo elettromagnetico, tensore di curvatura, ecc.

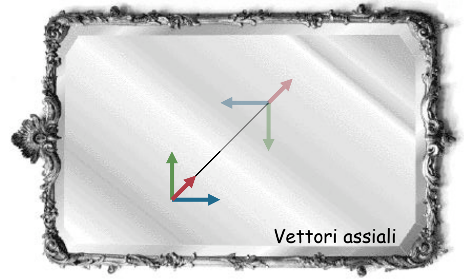
Vettori in Fisica

- In fisica si distinguono 2 diversi tipi di vettore:
  - **Vettori ordinari**:
    - Non è definito un particolare punto si applicazione.
    - Esempio: **spostamento rettilineo di un punto**.
  - **Vettori applicati**:
    - Insieme di un vettore ordinario e di un **punto di applicazione**.
    - Esempio: **forza**.

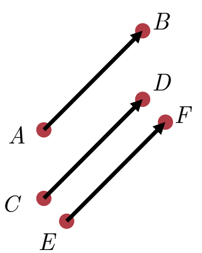
Vettori in Fisica (II)

- In fisica si classificano i vettori in 2 categorie a seconda del loro **comportamento per riflessione speculare**:
  - **Vettori polari**:
    - **Cambiano verso** i vettori **perpendicolari** allo specchio.
    - Esempio: spostamento rettilineo di un punto, forza, campo elettrico.
  - **Vettori assiali** (o pseudo-vettori):
    - **Cambiano verso** i vettori **paralleli** allo specchio.
    - Esempio: campo magnetico, momento di una forza, momento della quantità di moto.





Definizione di Vettore (I)



$$\vec{v} = \overrightarrow{B-A} = \overrightarrow{D-C} = \overrightarrow{F-E}$$

- **Prototipo**: spostamento rettilineo di un punto.
  - Spostamento di un punto da A a B $\xleftrightarrow[\text{su}]{1-1}$ segmento orientato che congiunge A con B.
  - Esistono infiniti segmenti orientati che rappresentano spostamenti rettilinei di egual lunghezza, paralleli ed equiversi.
    - Chiamiamo **vettore** $\vec{v}$ il **"quid" comune** a tali segmenti orientati (Vailati-Enriquez).
    - Oppure, definiti equipollenti due segmenti orientati di egual lunghezza, paralleli ed equiversi, definiamo **vettore** $\vec{v}$ la **classe di equivalenza** dei segmenti orientati rispetto alla relazione di equipollenza (Frege-Russel).

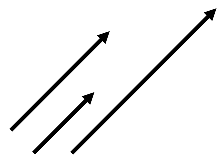
Notazioni equivalenti:

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \underline{v} = \bar{v}$$

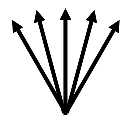
possono essere utilizzate nei testi scritti a mano

Definizione di Vettore (II)

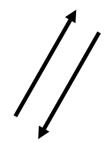
- **Norma** (o **modulo**): distanza tra origine A e vertice B. Si indica con $\left\|\vec{v}\right\| = \left|\vec{v}\right| = v$.
- **Direzione**: orientamento nello spazio della retta su cui giace il segmento orientato AB.
- **Verso**: senso di percorrenza.



Medesima direzione, medesimo verso, norme diverse.



Medesima norma direzione diversa.



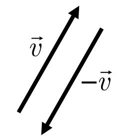
Medesima norma, medesima direzione, verso opposto.

Uguaglianza di Vettori

- Due vettori si dicono **uguali** se, e soltanto se, hanno:
  - la **medesima norma**,
  - la **medesima direzione**,
  - il **medesimo verso**.
- Se due vettori non sono uguali si dicono **disuguali**, ma **non** è possibile definire una **relazione d'ordine** in quanto non si può trovare un criterio per affermare che un vettore è maggiore o minore di un altro.

Vettore Opposto e Vettore Nullo

- Dato un vettore $\vec{v}$, si definisce **vettore opposto** $-\vec{v}$ un vettore avente **stessa direzione**, **stessa norma** ma **verso opposto**.

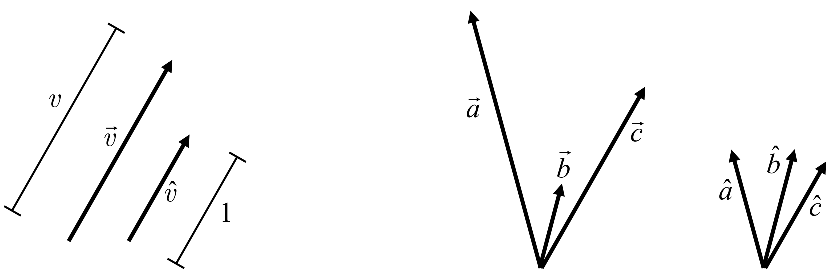


- Si chiama **vettore nullo** $\vec{0}$ un vettore che ha **norma nulla** (in questo caso **direzione** e **verso** sono **indeterminati**).

Versori

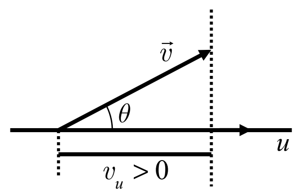
- Si chiamano **versori** i vettori di **norma unitaria**.
- Per ogni vettore $\vec{v}$ **non nullo** esiste un versore $\hat{v}$ che ha la stessa direzione orientata.

$$\hat{v} = \text{vers}\,\vec{v}$$

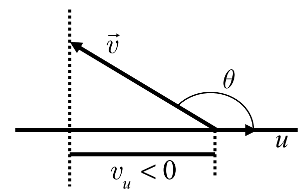


Componente di un Vettore Rispetto a una Direzione (I)

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce **la componente** di $\vec{v}$ su u e si indica con v_u lo **scalare** (**positivo** o **negativo**) ottenuto dal prodotto della norma di $\vec{v}$ per il coseno dell'angolo θ che il vettore forma con la direzione orientata u.

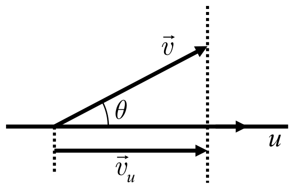


$$v_u = \|\vec{v}\| \cos\theta$$

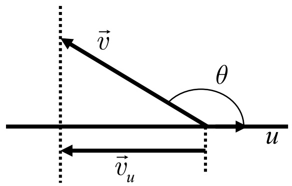


Componente di un Vettore Rispetto a una Direzione (II)

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce **il componente** di $\vec{v}$ su u e si indica con $\vec{v}_u$ il **vettore** che ha per norma il valore assoluto del**la** corrispondente componente v_u e per verso: lo stesso verso di u se $v_u > 0$; il verso contrario se $v_u < 0$.

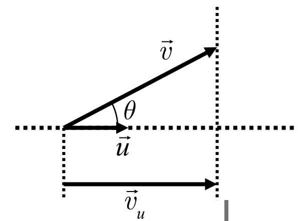


$$\left\|\vec{v}_u\right\| = \left|v_u\right| = \left\|\vec{v}\right\| \left|\cos\theta\right|$$



Componente di un Vettore Rispetto a un Altro Vettore o a un Versore

- Si definisce **il** componente o **la** componente **di un vettore** $\vec{v}$ **su di un altro vettore** $\vec{u}$ (o su di un versore $\hat{u}$) come il componente o la componente di $\vec{v}$ rispetto alla direzione orientata di $\vec{u}$ o $\hat{u}$.



Somma di Vettori

- Prototipo: spostamento rettilineo di un punto.
- Se considero due spostamenti successivi dello stesso punto: prima da A a B, poi da B a C.
- Il risultato (**somma** dei due vettori) è lo spostamento da A a C (**regola del triangolo**):

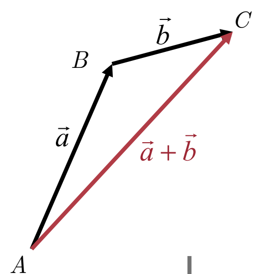
$$\overrightarrow{C-A} = \overrightarrow{C-B} + \overrightarrow{B-A}$$

- Ovvero, indicando:

$$\vec{a} = \overrightarrow{B-A}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{C-B}$$

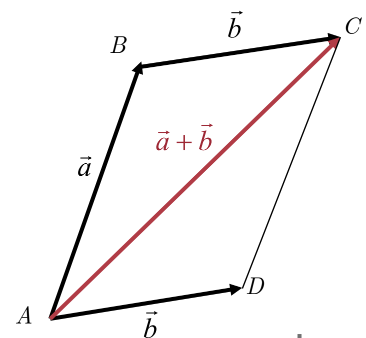
risulta:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{C-A}$$



Regola del Parallelogrammo

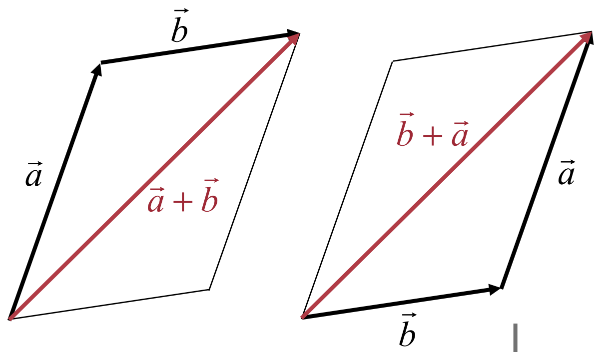
- La **regola del parallelogrammo equivalente** alla **regola del triangolo**.
- La somma $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{C-A}$ è la **diagonale** del parallelogrammo $ABCD$, avente per lati i segmenti orientati $\overrightarrow{B-A}$ e $\overrightarrow{D-A}$.



Proprietà Commutativa della Somma di Vettori

- Risulta:

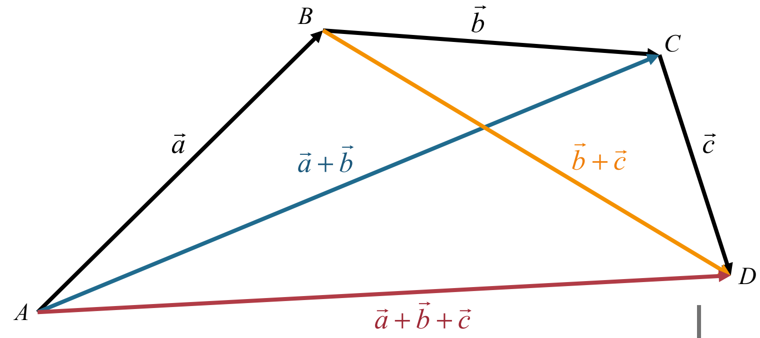
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$



Proprietà Associativa della Somma di Vettori

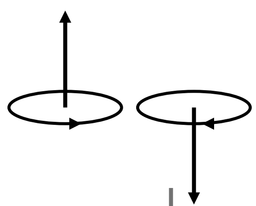
- Risulta:

$$\left.\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}&=\overrightarrow{D-A}\\ \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)&=\overrightarrow{D-A}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$



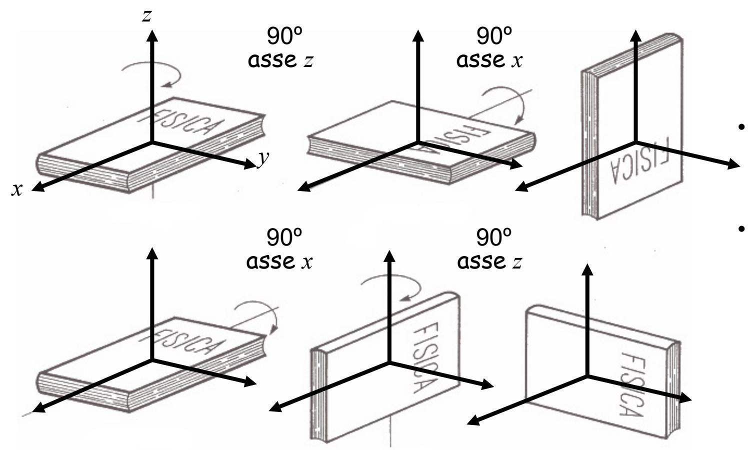
Rotazioni (I)

- Una **traslazione** è rappresentata da un vettore.
- Una **rotazione** è essa pure rappresentata da un vettore? (vedremo che la risposta è **NO**).
- Tuttavia, a prima vista potremmo pensare di rappresentare una rotazione mediante:
  - Una direzione (asse di rotazione);
  - Un numero (angolo di rotazione);
  - Un verso (a seconda che la rotazione avvenga in senso orario o antiorario).



Rotazioni (II)

- Verifichiamo se le rotazioni godono della **proprietà commutativa**:

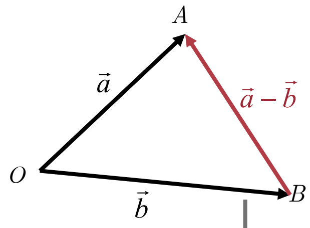


- Il risultato è diverso se si scambia l'ordine delle rotazioni.
- Non vale la proprietà commutativa
- Le rotazioni **non** sono rappresentate da **vettori** (sono rappresentate da **tensori**).

Differenza di Vettori

- È l'operazione inversa della somma.
- Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si chiama **differenza** fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con $\vec{a}-\vec{b}$ quel vettore che sommato a $\vec{b}$ dà come risultato $\vec{a}$:

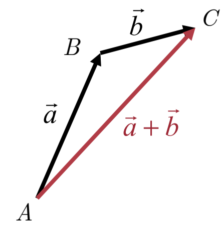
$$\vec{a} = \overrightarrow{A-O}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{B-O}$$
$$\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{A-B}$$

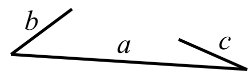


Disuguaglianza Triangolare

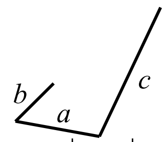
- La norma della somma (o della differenza) di due vettori è in generale **diverso** dalla somma (o dalla differenza) delle norme.
- Per la **disuguaglianza triangolare** si ha:

$$\left|\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\right| \le \|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$$
$$\left|\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|\right| \le \|\vec{a}-\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$$

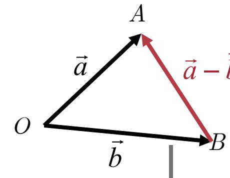




$a > b + c$



$a < |b-c|$



Prodotti tra Vettori e Scalari

- **Prodotto di un vettore per uno scalare**:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{a}\in V\end{array}\right\}\ \vec{c}=\alpha\,\vec{a}\in V$$

- **Prodotto scalare** tra due vettori:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\in V\\ \vec{b}\in V\end{array}\right\}\ c=\vec{a}\bullet\vec{b}\in\mathbb{R}$$

- **Prodotto vettoriale** tra due vettori:

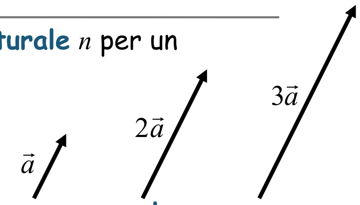
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\in V\\ \vec{b}\in V\end{array}\right\}\ \vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}\in V$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} = \text{insieme dei numeri reali}\\ V = \text{spazio vettoriale}\end{array}\right.$$

Prodotto di un Vettore per uno Scalare

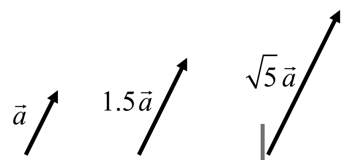
- Si può definire il **prodotto** di un numero **naturale** n per un **vettore** $\vec{a}$ come una somma ripetuta:

$$\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n\text{ volte}}=n\vec{a}$$



- Generalizzando, si definisce **prodotto** di un **numero reale** α per un **vettore** $\vec{a}$ e si indica con il simbolo $\alpha\vec{a}$ il vettore che ha per norma il prodotto $|\alpha|\|\vec{a}\|$, per direzione la stessa direzione di $\vec{a}$, e, per verso, lo stesso verso di $\vec{a}$ se $\alpha > 0$, il verso contrario se $\alpha < 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{a}\in V\end{array}\right\}\alpha\vec{a}\in V \qquad \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} = \text{insieme dei numeri reali}\\ V = \text{spazio vettoriale}\end{array}\right.$$

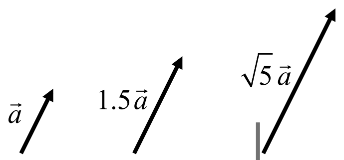


Prodotto di un Vettore per uno Scalare (II)

- Il prodotto di un vettore per uno scalare è **commutativo**, **associativo**, **distributivo**, sia **rispetto alla somma di scalari**, sia **rispetto alla somma di vettori**:

$$\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$$
$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$$
$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$
$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$
$$\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$$
$$\vec{a}\frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|} = \hat{a} = \mathrm{vers}\,\vec{a}$$

$$\begin{cases}\alpha,\beta\in\mathbb{R}\\ \vec{a},\vec{b}\in V\end{cases}$$



Prodotto Scalare fra Due Vettori

- Associa a due vettori uno scalare (p. es., associa a forza e spostamento il lavoro).
- Si definisce **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a}\bullet\vec{b}$ il prodotto della **norma** di uno dei due vettori per **la componente** dell'altro nella sua direzione:

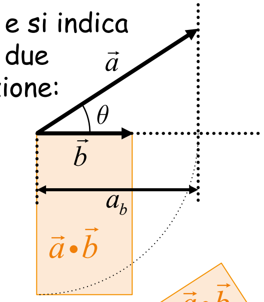
$$\vec{a}\bullet\vec{b} = a_b\, b = a\, b_a$$

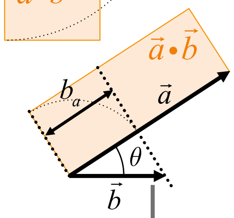
$$\begin{cases}a_b = a\cos\theta\\ b_a = b\cos\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_b\, b = \left(a\cos\theta\right)b\\ a\, b_a = a\left(b\cos\theta\right)\end{cases}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta = a\,b\cos\theta$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\left\|\vec{a}\right\| = 0 & oppure\\ \left\|\vec{b}\right\| = 0 & oppure\\ \vec{a}\perp\vec{b}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\in V\\ \vec{b}\in V\end{array}\right\}\vec{a}\bullet\vec{b}\in\mathbb{R}$$



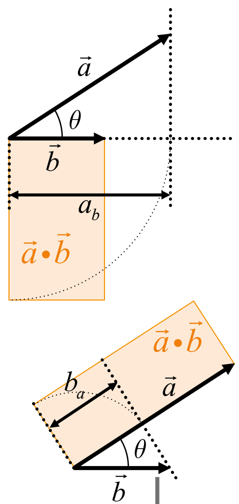


Prodotto Scalare fra due Vettori (II)

- Il prodotto scalare gode delle proprietà **commutativa** e **distributiva** rispetto alla somma di vettori.

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{a}$$
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\vec{c} = \vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}$$
$$\left(m\vec{a}\right)\bullet\vec{b} = \vec{a}\bullet\left(m\vec{b}\right) = m\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V\\ m\in\mathbb{R}\end{cases}$$



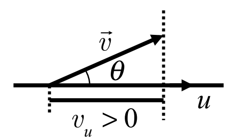
Componente di un Vettore nella Direzione di un Versore o di un Altro Vettore

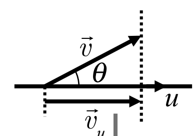
- **La** componente e **il** componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del **versore** $\hat{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \vec{v}\bullet\hat{u} \qquad \vec{v}_u = \left(\vec{v}\bullet\hat{u}\right)\hat{u}$$

- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del **vettore** generico $\vec{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad \vec{v}_u = \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{\left(\vec{v}\bullet\vec{u}\right)\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$$





Quadrato e Norma di un Vettore

- Si chiama **quadrato di un vettore** il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$\vec a^2 = \vec a \bullet \vec a = \|\vec a\|\|\vec a\|\cos 0 = \|\vec a\|^2$$

- La **norma** (o **modulo**) di un vettore si può perciò scrivere:

$$\|\vec a\| = \sqrt{\vec a^2} = \sqrt{\vec a \bullet \vec a}$$

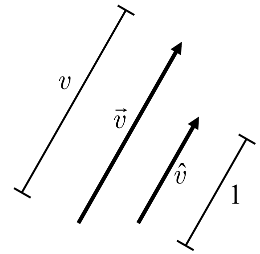
Versori

- Il versore $\hat v$ associato al vettore $\vec v$ si può scrivere:

$$\hat v = \text{vers}\,\vec v = \overbrace{\frac{1}{\|\vec v\|}}^{\text{scalare}} \overbrace{\vec v}^{\text{vettore}}$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

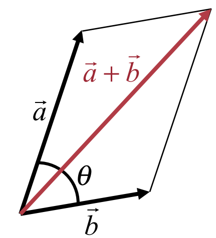
Inverso dello scalare $\|\vec v\|$



Norma della Somma e della Differenza

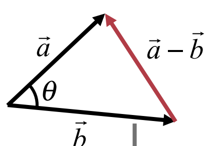
- Risulta:

$$\|\vec a + \vec b\| = \sqrt{\left(\vec a + \vec b\right)^2} = \sqrt{\left(\vec a + \vec b\right)\bullet\left(\vec a + \vec b\right)} =$$
$$= \sqrt{\vec a \bullet \vec a + \vec a \bullet \vec b + \vec b \bullet \vec a + \vec b \bullet \vec b}$$



$$\|\vec a + \vec b\| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

$$\|\vec a - \vec b\| = \sqrt{\left(\vec a - \vec b\right)^2} = \sqrt{\left(\vec a - \vec b\right)\bullet\left(\vec a - \vec b\right)} =$$
$$= \sqrt{\vec a \bullet \vec a - \vec a \bullet \vec b - \vec b \bullet \vec a + \vec b \bullet \vec b}$$



$$\|\vec a - \vec b\| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Prodotto Vettoriale fra due Vettori

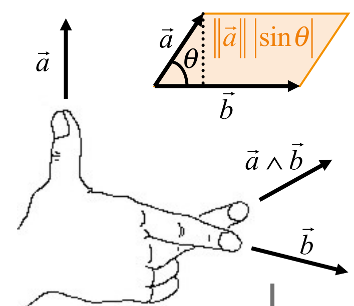
- Si definisce **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec a$ e $\vec b$, e si indica $\vec a \wedge \vec b$, il vettore che:
  - Ha per **norma** l'**area** del parallelogrammo formato dai vettori $\vec a$ e $\vec b$;
  - Ha **direzione perpendicolare** a **entrambi** i vettori;
  - Ha **verso** determinato dalla "**regola della mano destra**" (pollice: primo vettore; indice: secondo vettore; medio: prodotto vettoriale).

$$\|\vec a \wedge \vec b\| = \|\vec b\|\left(\|\vec a\|\left|\sin\theta\right|\right)$$

$$\|\vec a \wedge \vec b\| = \|\vec a\|\|\vec b\|\left|\sin\theta\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec a \in V \\ \vec b \in V\end{array}\right\}\vec a \wedge \vec b \in V$$

$$\vec a \wedge \vec b = \vec 0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll}\|\vec a\| = 0 & oppure \\ \|\vec b\| = 0 & oppure \\ \vec a \parallel \vec b & \end{array}\right.$$



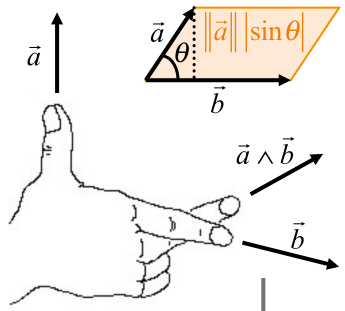
Prodotto Vettoriale fra due Vettori (II)

- Il prodotto vettoriale gode delle proprietà **anticommutativa** e **distributiva** rispetto alla somma e alla differenza di vettori.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$$

$$\left(m\vec{a}\right)\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\left(m\vec{b}\right)=m\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) \qquad \begin{cases}\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V\\ m\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c}\pm\vec{b}\wedge\vec{c}$$

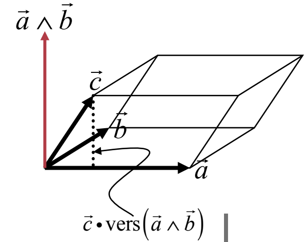


Doppio Prodotto Misto

- È dato da: $\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}$
- È uguale, a meno del segno, al **volume del parallelepipedo** avente per lati $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
- Tale parallelepipedo ha per base e altezza:

$$\left.\begin{aligned}B&=\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|\\ h&=\vec{c}\bullet\mathrm{vers}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad V=\underbrace{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|\mathrm{vers}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)}_{\vec{a}\wedge\vec{b}}\bullet\vec{c}$$

$$V=\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}\right|$$



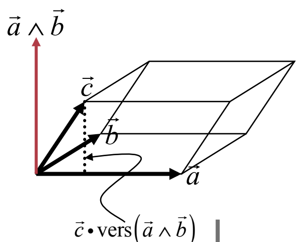
Doppio Prodotto Misto (II)

- Il doppio prodotto misto ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}\bullet\vec{a}=\vec{c}\wedge\vec{a}\bullet\vec{b}$$
$$\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{b}\wedge\vec{c}$$

- La prima segue dal fatto che nei 3 casi il volume è il medesimo.
- La seconda si ottiene utilizzando la prima e la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\bullet\vec{c}=\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\bullet\vec{a}=\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)$$



Dal Calcolo Vettoriale ai Teoremi sui Triangoli

- Teorema di **Carnot** o dei **coseni**:

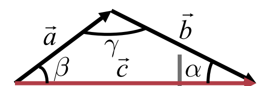
$$\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}\quad\Rightarrow\quad\vec{b}^2=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{c}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\bullet\vec{c}$$
$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos\beta$$

- Teorema dei **seni**:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\quad\Rightarrow\quad\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\wedge\vec{b}+\underbrace{\vec{b}\wedge\vec{b}}_{=0}=\vec{c}\wedge\vec{b}$$
$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{b}\quad\Rightarrow\quad ab\sin\gamma=cb\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

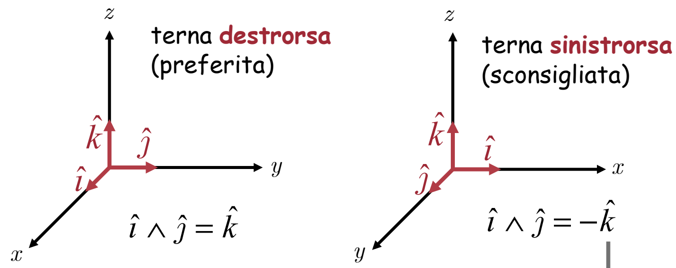
- Teorema delle **proiezioni**:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\quad\Rightarrow\quad\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\vec{c}=\vec{c}\bullet\vec{c}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}=\vec{c}\bullet\vec{c}$$
$$ac\cos\beta+bc\cos\alpha=c^2\quad\Rightarrow\quad a\cos\beta+b\cos\alpha=c$$



Rappresentazione Cartesiana di Vettori

- **Terna cartesiana ortogonale**: 3 rette orientate (o **assi**) x, y e z, a due a due **perpendicolari**, aventi un **punto in comune** O detto **origine**.
- **Versori cartesiani**: versori corrispondenti agli assi x, y e z, indicati con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.
- (**Le**) **componenti cartesiane** e (**i**) **componenti cartesiani**: le componenti e i componenti di un vettore sugli assi cartesiani.

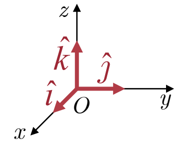


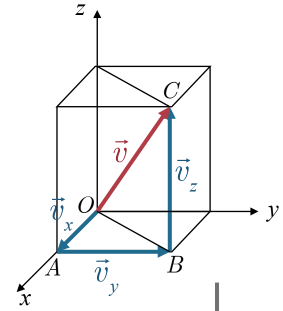
Rappresentazione Cartesiana di Vettori (II)

- **Una volta scelta** (ad arbitrio) una terna cartesiana ortogonale, **qualunque vettore** $\vec{v}$ si può scrivere come la **somma** dei suoi 3 componenti cartesiani:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = v_x\,\hat{\imath} \\ \vec{v}_y = v_y\,\hat{\jmath} \\ \vec{v}_z = v_z\,\hat{k} \end{cases}$$





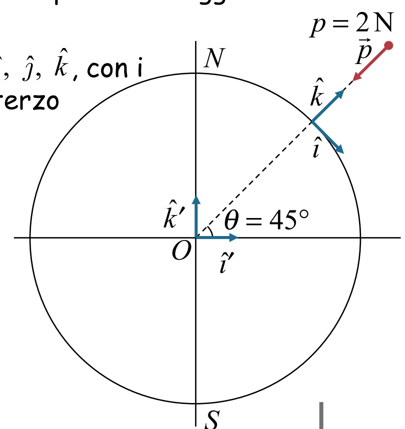
Rappresentazione Cartesiana di Vettori (III)

- Dato un **vettore ben definito**, esso ha una **differente espressione cartesiana per ogni differente terna cartesiana** che si considera.
- Nell'esempio in figura consideriamo la forza peso di un oggetto di peso pari a 2 Newton.
- Usando la terna cartesiana ortogonale $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, con i primi due assi sul piano orizzontale e il terzo asse verticale, si ha:

$$\vec{p} = -2\,\mathrm{N}\,\hat{k}$$

- Usando invece la terna cartesiana $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$, $\hat{k}'$, con i primi due assi sul piano perpendicolare all'asse terrestre e il terzo asse lungo l'asse terrestre, si ha:

$$\vec{p} = -\sqrt{2}\,\mathrm{N}\,\hat{\imath}' - \sqrt{2}\,\mathrm{N}\,\hat{k}'$$



Rappresentazione Cartesiana di Vettori (IV)

- Tuttavia, **fissata** una **terna** cartesiana ortogonale, vi è una **corrispondenza biunivoca** tra **vettori** e **terne ordinate** di numeri reali (le componenti cartesiane):

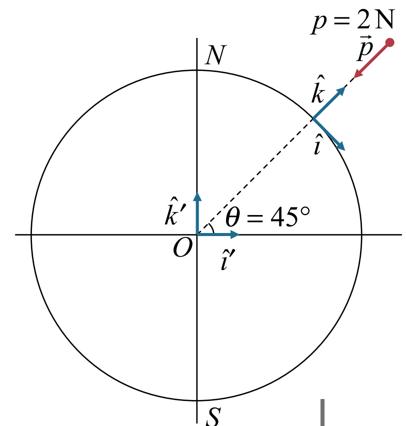
$$\vec{v}\,[\in V] \xleftrightarrow[su]{1-1} (v_x, v_y, v_z)\,[\in \mathbb{R}^3]$$

- Nell'esempio in figura, fissata la terna cartesiana ortogonale $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, si ha:

$$\vec{p} \longleftrightarrow (0, 0, -2\,\mathrm{N})$$

- Fissata invece la terna cartesiana $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$, $\hat{k}'$, si ha:

$$\vec{p} \longleftrightarrow (-\sqrt{2}\,\mathrm{N}, 0, -\sqrt{2}\,\mathrm{N})$$



Rappresentazione Cartesiana di Vettori (V)

- **Fissata** una terna cartesiana ortogonale:
  - Due vettori sono **uguali** se e soltanto se sono uguali le 3 corrispondenti componenti cartesiane.
  - Un vettore è **nullo** se e soltanto se sono nulle tutte e 3 le componenti cartesiane.
- Le operazioni tra vettori possono essere eseguite, oltre che nella **forma intrinseca** che abbiamo visto finora, anche nella **forma cartesiana**, utilizzando cioè le espressioni cartesiane dei vettori.

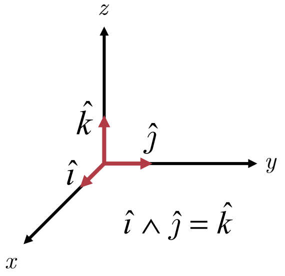
Relazioni tra i versori ortogonali

- Prodotti scalari:

$$\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}=1,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}=1,\quad \hat{k}\bullet\hat{k}=1$$
$$\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}=0,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{k}=0,\quad \hat{k}\bullet\hat{\imath}=0$$

- Prodotti vettoriali:

$$\hat{\imath}\wedge\hat{\imath}=\vec{0},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath}=\vec{0},\quad \hat{k}\wedge\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\wedge\hat{\imath}=\hat{\jmath}$$



Operazioni tra Vettori in Forma Cartesiana

- Risulta:

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)+\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x+b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y+b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z+b_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)-\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x-b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y-b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z-b_z\right)\hat{k}$$

$$\alpha\vec{a}=\alpha\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)=\left(\alpha a_x\right)\hat{\imath}+\left(\alpha a_y\right)\hat{\jmath}+\left(\alpha a_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\bullet\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=$$
$$=a_xb_x\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}}_{1}+a_xb_y\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_xb_z\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{k}}_{0}+a_yb_x\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_yb_y\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}}_{1}+a_yb_z\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{k}}_{0}+$$
$$+a_zb_x\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_zb_y\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_zb_z\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{k}}_{1}=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$a=\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Operazioni tra Vettori in Forma Cartesiana (II)

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\wedge\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=$$
$$=a_xb_x\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{\imath}}_{0}+a_xb_y\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}}_{\hat{k}}+a_xb_z\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{k}}_{-\hat{\jmath}}+a_yb_x\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{\imath}}_{-\hat{k}}+a_yb_y\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath}}_{0}+a_yb_z\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{k}}_{\hat{\imath}}+$$
$$+a_zb_x\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}}+a_zb_y\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{\jmath}}_{-\hat{\imath}}+a_zb_z\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{k}}_{0}=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\imath}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}=\det\left\|\begin{matrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{matrix}\right\|$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}=\left[\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\imath}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}\right]\bullet\left(c_x\hat{\imath}+c_y\hat{\jmath}+c_z\hat{k}\right)=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)c_x+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)c_y+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)c_z=$$
$$=a_yb_zc_x-a_zb_yc_x+a_zb_xc_y-a_xb_zc_y+a_xb_yc_z-a_yb_xc_z=\det\left\|\begin{matrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{matrix}\right\|$$

Operazioni tra Vettori in Forma Cartesiana (III)

- Nella rappresentazione cartesiana si possono anche facilmente dimostrare le **identità vettoriali**:

$$\begin{cases}\left(\vec a\wedge\vec b\right)\wedge\vec c=\left(\vec a\bullet\vec c\right)\vec b-\left(\vec b\bullet\vec c\right)\vec a & \forall\vec a,\vec b,\vec c\in V\\ \vec a\wedge\left(\vec b\wedge\vec c\right)=\left(\vec a\bullet\vec c\right)\vec b-\left(\vec a\bullet\vec b\right)\vec c & \forall\vec a,\vec b,\vec c\in V\end{cases}$$

- Infatti, prendendo, per esempio, la componente x della prima identità, si ha:

$$\begin{cases}\left[\left(\vec a\wedge\vec b\right)\wedge\vec c\right]_x=\left(\vec a\wedge\vec b\right)_y c_z-\left(\vec a\wedge\vec b\right)_z c_y=\\ \qquad=\left(\underline{a_z b_x}-\overline{\overline{a_x b_z}}\right)c_z-\left(\overline{a_x b_y}-\underline{a_y b_x}\right)c_y\\ \left[\left(\vec a\bullet\vec c\right)\vec b-\left(\vec b\bullet\vec c\right)\vec a\right]_x=\left(\cancel{a_x c_x}+\underline{a_y c_y}+\underline{\underline{a_z c_z}}\right)b_x-\left(\cancel{b_x c_x}+\overline{b_y c_y}+\overline{\overline{b_z c_z}}\right)a_x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\left[\left(\vec a\wedge\vec b\right)\wedge\vec c\right]_x=\left[\left(\vec a\bullet\vec c\right)\vec b-\left(\vec b\bullet\vec c\right)\vec a\right]_x$$

Vettori Variabili con il Tempo

- Uno scalare fisico (p. es. la temperatura) può variare nel tempo. In tal caso la variazione è descritta da una **funzione scalare del tempo**:

$$f:t\left[\in\mathbb{R}\right]\longrightarrow f\left(t\right)\in\mathbb{R}$$

- Analogamente un vettore fisico (p. es. la velocità) può variare nel tempo. In questo caso la variazione è descritta da una **funzione vettoriale del tempo**:

$$\vec v:t\left[\in\mathbb{R}\right]\longrightarrow\vec v\left(t\right)\in V$$

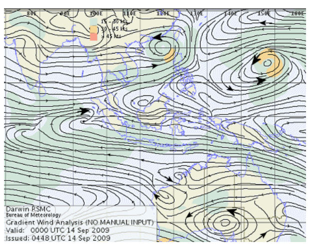
Vettori Variabili con la Posizione e Campi Vettoriali

- Uno scalare fisico (p. es. la temperatura) può variare con la posizione nello spazio. In tal caso la variazione è descritta da un **Campo Scalare** (ovvero da una funzione scalare delle 3 coordinate spaziali):

$$f:P\left(x,y,z\right)\left[\in\mathbb{R}^3\right]\longrightarrow f\left(P\right)=f\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}$$

- Analogamente un vettore fisico (p. es. la velocità) può variare con la posizione nello spazio. In questo caso la variazione è descritta da un **Campo Vettoriale** (ovvero da una funzione vettoriale delle 3 coordinate spaziali):

$$\vec v:P\left(x,y,z\right)\left[\in\mathbb{R}^3\right]\longrightarrow\vec v\left(P\right)=\vec v\left(x,y,z\right)\in V$$



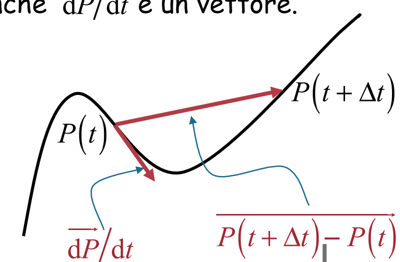
Campo vettoriale della velocità del vento

Derivata di un Punto

- Dato un punto mobile $P=P(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce **derivata del punto P rispetto alla variabile t** il limite, se esiste:

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{P\left(t+\Delta t\right)-P\left(t\right)}\right]\right\}$$

- $\overrightarrow{P\left(t+\Delta t\right)-P\left(t\right)}$ è un vettore, per cui anche $\overrightarrow{\mathrm{d}P}/\mathrm{d}t$ è un vettore.
- **La derivata di un punto è un vettore.**

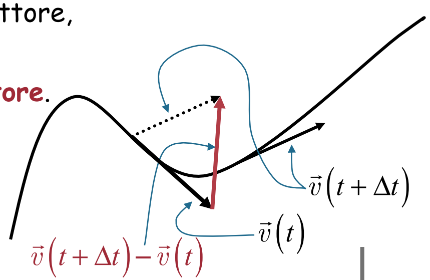


Derivata di un Vettore

- Dato un vettore $\vec{v}=\vec{v}(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce **derivata del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t** il limite, se esiste:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta t}\left[\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)\right]\right\}$$

- Poiché $\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ è ancora un vettore, $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ è pure un vettore.
- **La derivata di un vettore è un vettore.**



Derivata di un Segmento Orientato

- La derivata di un **segmento orientato** $\overrightarrow{B-A}=\overrightarrow{B(t)-A(t)}$ è uguale alla differenza delle derivate dei suoi punti estremi:

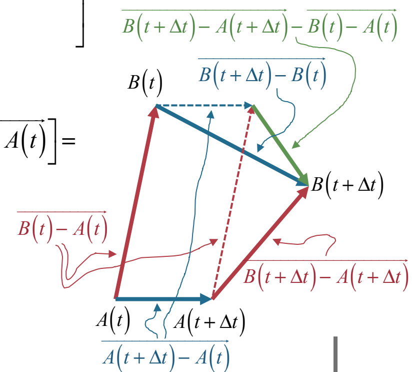
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{B-A}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\overbrace{\overrightarrow{B(t+\Delta t)-A(t+\Delta t)}}^{\text{segmento orientato al tempo } t+\Delta t}-\overbrace{\overrightarrow{B(t)-A(t)}}^{\text{segmento orientato al tempo } t}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{B(t+\Delta t)-B(t)}-\overrightarrow{A(t+\Delta t)-A(t)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{B(t+\Delta t)-B(t)}\right]-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\overrightarrow{A(t+\Delta t)-A(t)}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{B-A}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$



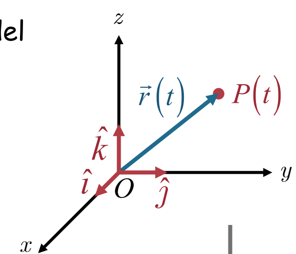
Vettore Posizionale

- Un caso interessante si ha quando si considera un segmento orientato $P(t)-O$ con un estremo **fisso** O (detto **vettore posizionale** o **raggio vettore**):

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{P(t)-O}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overrightarrow{P(t)-O}\right]=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

- La **derivata** di un **punto** è **uguale** alla **derivata** del suo **vettore posizionale**.



Regole di Derivazione dei Vettori

- Valgono le seguenti regole:

$$\begin{cases}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{a},\vec{b}\in V\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha\vec{a}\right)=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{a}+\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

- Le derivate dei vettori possono essere effettuate **mediante** le **espressioni cartesiane**:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

Funzione Primitiva o Integrale Indefinito

- Data una funzione scalare:

$$t\left[\in\mathbb{R}\right]\xrightarrow{f} f\left(t\right)\in\mathbb{R}$$

si definisce **integrale indefinito** o (meglio) **funzione primitiva** della funzione f la funzione F tale che f sia la derivata di F:

$$F=\int f\left(t\right)\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad f=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

- Analogamente, data una funzione vettoriale:

$$t\left[\in\mathbb{R}\right]\xrightarrow{\vec{v}} \vec{v}\left(t\right)\in V$$

si definisce **integrale indefinito** o (meglio) **funzione primitiva** della funzione $\vec{v}$ la funzione $\vec{w}$ tale che $\vec{v}$ sia la derivata di $\vec{w}$:

$$\vec{w}=\int \vec{v}\left(t\right)\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t}$$

Funzione Primitiva o Integrale Indefinito (II)

- La funzione primitiva (o integrale indefinito) si può calcolare **mediante le espressioni cartesiane**:

$$\vec{v}\left(t\right)=v_x\left(t\right)\hat{\imath}+v_y\left(t\right)\hat{\jmath}+v_z\left(t\right)\hat{k}$$

$$\int\vec{v}\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\hat{\imath}\int v_x\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\hat{\jmath}\int v_y\left(t\right)\,\mathrm{d}t+\hat{k}\int v_z\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli
Dipartimento di Fisica
domenico.galli@unibo.it
http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli
https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica