FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Introduzione alla Relatività Ristretta IV parte

http://www.fondazioneocchialini.it

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 27 Aprile 2010

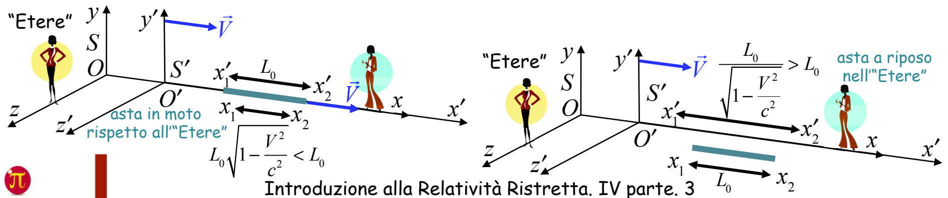
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Conseguenze delle Trasformazioni di Lorentz

Contrazione delle lunghezze
e dilatazione dei tempi.

La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz

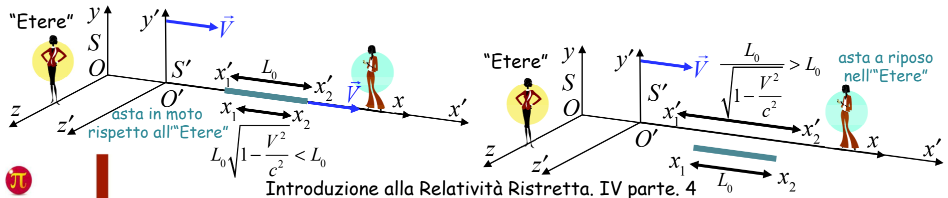
- L'idea di una contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto nasce per spiegare il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley (**contrazione di Fitzgerald-Lorentz**).
- L'idea era quella di una contrazione degli oggetti in **moto rispetto all'"Etere Luminifero"**.
- Si pensava a una effettiva **deformazione** dei corpi.
- La ragione della contrazione era attribuita a **effetti elettromagnetici** dovuti a una sorta di **interazione** tra il materiale del corpo in movimento e quello dell'"Etere Luminifero".



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz (II)

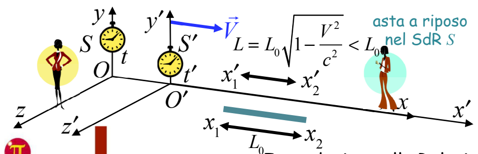
- La **massima lunghezza** si sarebbe osservata nel **SdR dell'"Etere Luminifero"**.
- L'**osservatore** dell'**"Etere Luminifero"** sarebbe stato l'**unico** osservatore che ha il "privilegio" di **vedere contratti tutti gli oggetti** che si muovono rispetto a lui.
  - Gli altri osservatori avrebbero dovuto vedere **allungati** gli **oggetti** che si trovano nell'**etere** (perché si accorcia il metro con cui misurano, tarato nel SdR dell'etere).

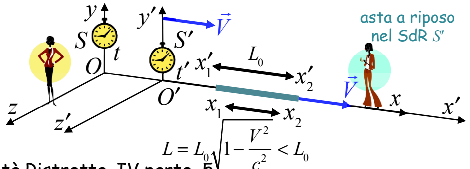


FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

La Contrazione Relativistica delle Lunghezze

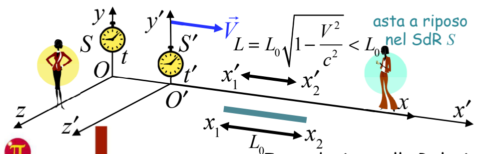
- Vedremo ora, sulla base delle Trasformazioni di Lorentz, che una **contrazione delle lunghezze**, nella direzione del moto relativo dei 2 SdR, si può osservare effettivamente:
- Si tratta tuttavia di una contrazione dovuta alla **natura dello spazio-tempo**:
  - in particolare, alle sue **proprietà di trasformazione** nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
  - la **distanza** tra **due punti nello spazio dipende** dal **SdR**.

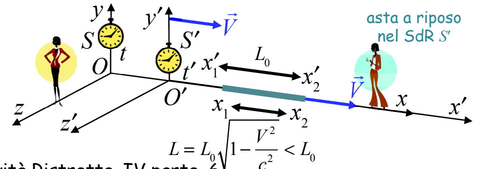




La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (II)

- **Non** ci sono **SdR privilegiati**:
  - I SdR inerziali sono tutti tra loro **equivalenti**.
  - Se un osservatore nel SdR S vede un'asta nel SdR S' accorciata, parimenti un osservatore nel SdR S' vede un'asta nel SdR S accorciata (**reciprocità**).
- La **massima lunghezza** si osserva nel SdR in cui l'asta è a **riposo**.



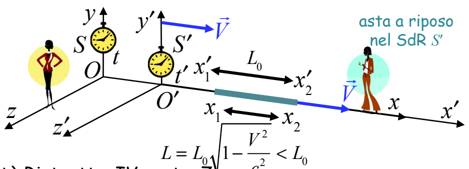


La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (III)

- Supponiamo che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0, sia posta in **quiete** nel SdR S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate x_1' e x_2':
  - essendo l'asta in **quiete** nel **SdR S'**, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

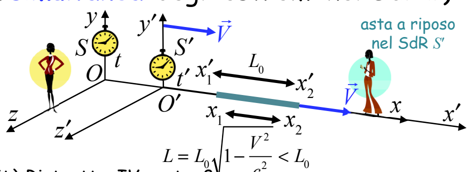
Dove coordinate x_1' e x_2', essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (IV)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in **moto** nel **SdR S**, la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t_m, segnato dagli **orologi del SdR S**.
  - Flash e pellicola in quiete nel SdR S.
  - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** nel SdR S.

$$L = x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right)$$ (misura **simultanea** degli estremi nel SdR S)

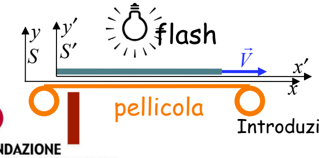


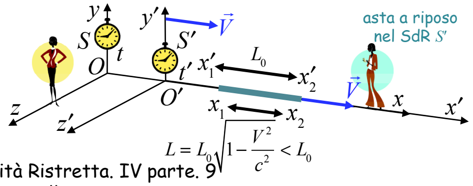
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (V)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**diritte** o **inverse**):

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S** e non in S', per cui noi conosciamo t e non t'.

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ \boxed{x' = \gamma\left(x - Vt\right)} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$





La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VI)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

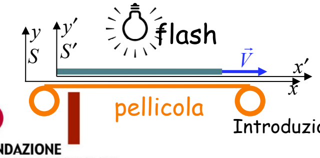
$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

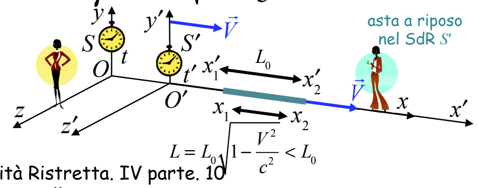
$$\begin{cases} x_1' = \gamma\left(x_1 - Vt_1\right) \\ x_2' = \gamma\left(x_2 - Vt_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \gamma\left[x_1\left(t_m\right) - Vt_m\right] \\ x_2' = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) - Vt_m\right] \end{cases}$$

da cui:

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) \cancel{-Vt_m} - x_1\left(t_m\right) \cancel{+Vt_m}\right] = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right)\right]$$

$$L = x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x_2' - x_1'\right) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < L_0$$





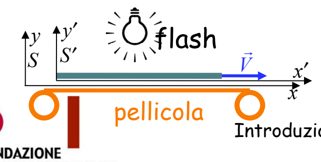
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VII)

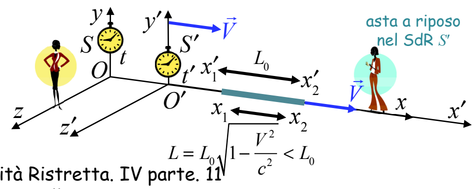
- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **più corta nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < L_0}$$

(**contrazione relativistica delle lunghezze**)

- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



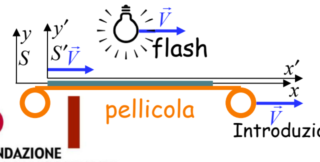


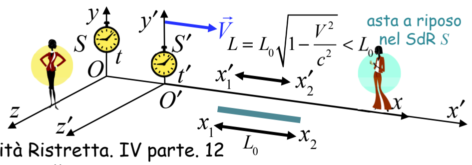
Reciprocità

- Supponiamo ora che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0, sia posta in **quiete** nel SdR **S**, mentre il SdR S' si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S, abbiano coordinate x_1 e x_2:
  - essendo l'asta in **quiete** nel **SdR S**, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2 - x_1$$

Dove coordinate x_1 e x_2, essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.

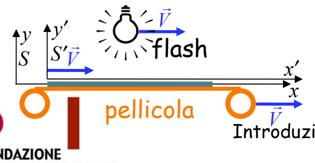


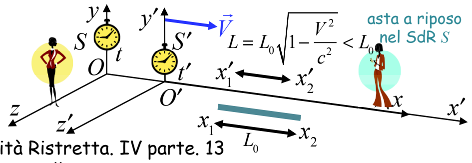


Reciprocità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S'.
- Poiché l'asta è in **moto** rispetto al **SdR S'**, la posizione dei due estremi, $x'_1(t)$ e $x'_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t'_m, segnato dagli **orologi del SdR S'**.
  - Flash e pellicola in quiete in S'.
  - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** in S'.

$$L = x'_2\left(t'_m\right) - x'_1\left(t'_m\right)$$ (misura **simultanea** degli estremi nel SdR S')



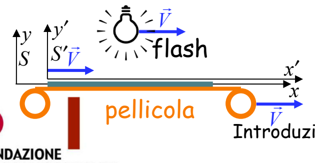


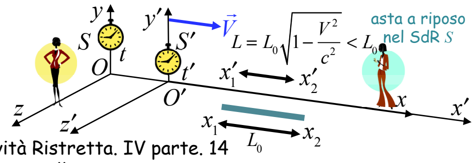
Reciprocità (III)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ \boxed{x = \gamma\left(x' + Vt'\right)} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S'** e non in S, per cui noi conosciamo t' e non t.





Reciprocità (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

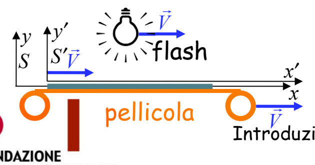
$$\begin{cases} x_1 = \gamma\left(x'_1 + Vt'_1\right) \\ x_2 = \gamma\left(x'_2 + Vt'_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma\left[x'_1\left(t'_m\right) + Vt'_m\right] \\ x_2 = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) + Vt'_m\right] \end{cases}$$

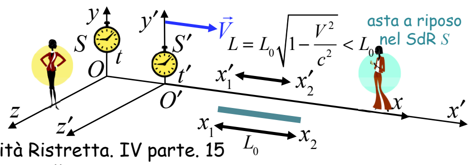
$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$x_2 - x_1 = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) \cancel{+Vt'_m} - x'_1\left(t'_m\right) \cancel{-Vt'_m}\right] = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) - x'_1\left(t'_m\right)\right]$$

$$L = x'_2\left(t'_m\right) - x'_1\left(t'_m\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x_2 - x_1\right) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$



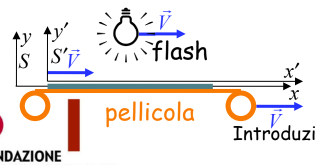


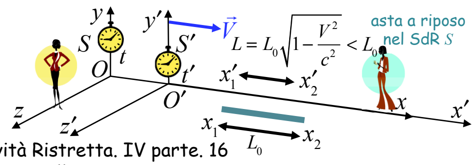
Reciprocità (V)

- L'asta è **più corta nel SdR S'**.
- Dunque, non ostante noi abbiamo invertito le parti, (asta a riposo nel SdR S, invece che asta a riposo nel SdR S') per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **sempre più corta nel SdR**, nel quale l'asta è in **moto**.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



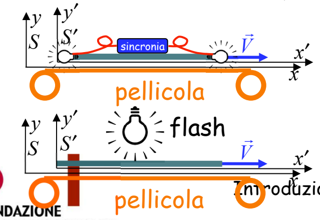


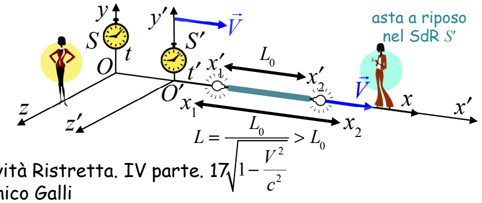
Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità

- Supponiamo, **come nel primo caso esaminato**, che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0, sia posta in **quiete** nel SdR S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate x_1' e x_2':
  - essendo l'asta in **quiete** nel **SdR S'**, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

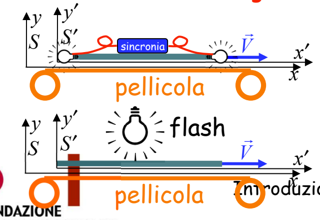
Dove coordinate x_1' e x_2', essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.

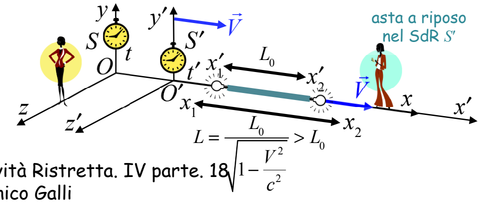




Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in **moto** nel **SdR S**, la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**.
- **A differenza del caso precedente**, supponiamo di mettere **sull'asta** (solidale a essa) un dispositivo **lampeggiatore** (orologio), collegato con **2 fili di ugual lunghezza** a due **lampade poste alle 2 estremità dell'asta** e con il lampo delle due lampade impressioniamo una **pellicola in quiete nel SdR del laboratorio**:
  - Il lampo si ha nell'istante t'_m, segnato dall'**orologio** (sulla sbarra) **del SdR S'**.
  - Pellicola in quiete in S.
  - Cioè **misura degli estremi in S simultaneamente in S'**.

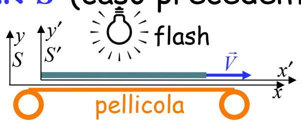




Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (III)

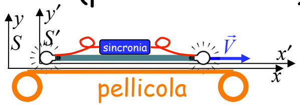
- Misura degli estremi dell'asta **nel SdR S, simultaneamente nel SdR S** (caso precedente):

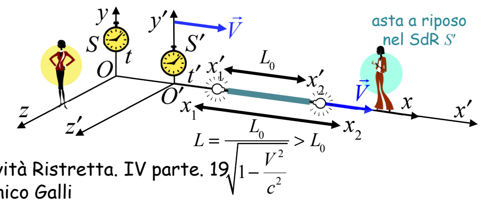
$$L = x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right)$$



- Misura degli estremi dell'asta **nel SdR S, simultaneamente nel SdR S'** (presente caso):

$$L = x_2\left(t'_m\right) - x_1\left(t'_m\right)$$



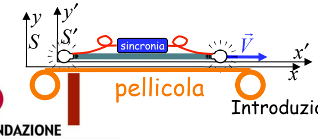


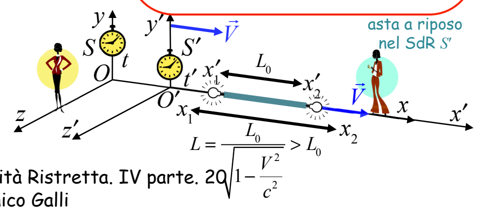
Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (IV)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ \boxed{x = \gamma\left(x' + Vt'\right)} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S'** e non in S, per cui noi conosciamo t' e non t.





Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (V)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

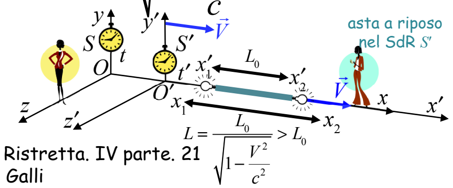
$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \gamma\left(x_1' + Vt_1'\right) \\ x_2 = \gamma\left(x_2' + Vt_2'\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1\left(t_m'\right) = \gamma\left[x_1' + Vt_m'\right] \\ x_2\left(t_m'\right) = \gamma\left[x_2' + Vt_m'\right] \end{cases}$$

da cui:

$$x_2\left(t_m'\right) - x_1\left(t_m'\right) = \gamma\left[x_2' + \cancel{Vt_m'} - x_1' - \cancel{Vt_m'}\right] = \gamma\left(x_2' - x_1'\right)$$

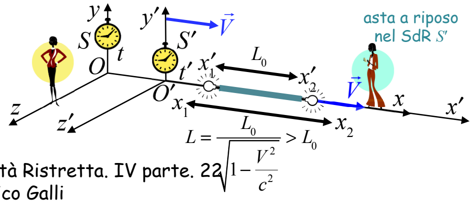
$$L = x_2\left(t_m'\right) - x_1\left(t_m'\right) = \gamma\left(x_2 - x_1\right) = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (VI)

- Dunque, questa volta, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, e a causa della **differente scelta** di **simultaneità**, l'asta è **più lunga nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

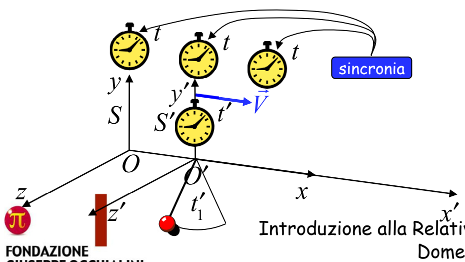
$$L = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} > L_0$$

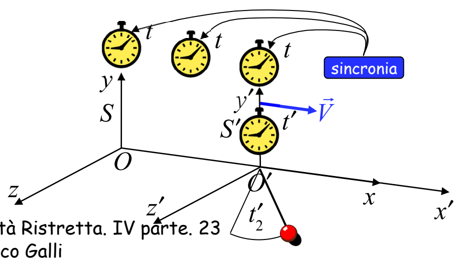


La Dilatazione Relativistica dei Tempi

- Consideriamo la misura della **durata di un evento** che ha luogo in una **posizione x' fissa** nel **SdR S'** (per esempio il **sempieriodo** dell'**oscillazione di un pendolo**).
- L'orologio posto in x' (fermo rispetto a S') misura il tempo t'_1 quando l'evento ha inizio e t'_2 quando l'evento termina.
- La durata dell'evento misurata da S' è quindi

$$T_0 = t_2' - t_1'$$

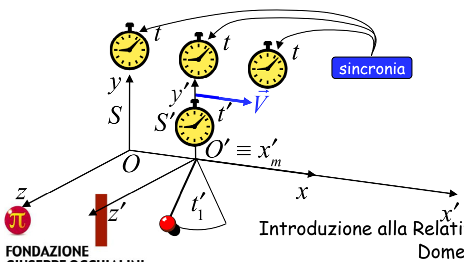


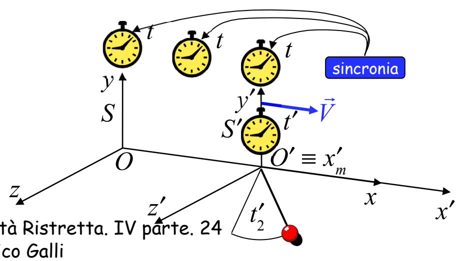


La Dilatazione Relativistica dei Tempi (II)

- Vogliamo ora determinare il semiperiodo del pendolo nel SdR S, rispetto al quale il SdR S' si muove con velocità V.
- Poiché il pendolo è in **moto** nel **SdR S**, la **posizione del pendolo** nei due istanti t_1 e t_2, è **diversa**: $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$.
- Occorre stabilire **in quali posizioni** si **misurano i 2 tempi**. Supponiamo di misurare i 2 tempi, nella posizione x'_m, fissa **nel SdR S'**, a cui però corrisponderanno 2 posizioni diverse nel SdR S:

$$T = t_2\left(x_m'\right) - t_1\left(x_m'\right)$$ (misure **nella stessa posizione** nel SdR S')



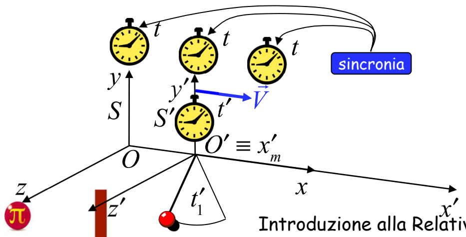


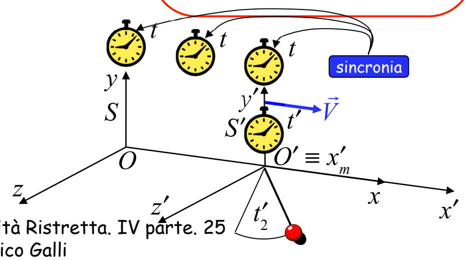
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (III)

- Le relazioni tra i tempi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**diretta** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right)} \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure dei tempi sono **nello stessa posizione in S'** e non in S, per cui noi conosciamo x' e non x.





La Dilatazione Relativistica dei Tempi (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 istanti:

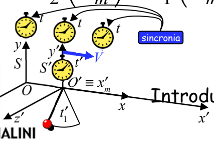
$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

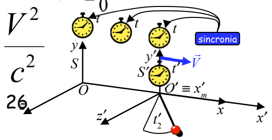
$$\begin{cases} t_1 = \gamma\left(t'_1 + \dfrac{V}{c^2}x'_1\right) \\ t_2 = \gamma\left(t'_2 + \dfrac{V}{c^2}x'_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1\left(x'_m\right) = \gamma\left(t'_1 + \dfrac{V}{c^2}x'_m\right) \\ t_2\left(x'_m\right) = \gamma\left(t'_2 + \dfrac{V}{c^2}x'_m\right) \end{cases}$$

da cui:

$$t_2\left(x'_m\right) - t_1\left(x'_m\right) = \gamma\left[t'_2 + \cancel{\frac{V}{c^2}x'_m} - t'_1 - \cancel{\frac{V}{c^2}x'_m}\right] = \gamma\left(t'_2 - t'_1\right)$$

$$T = t_2\left(x'_m\right) - t_1\left(x'_m\right) = \gamma\left(t'_2 - t'_1\right) = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} > T_0$$





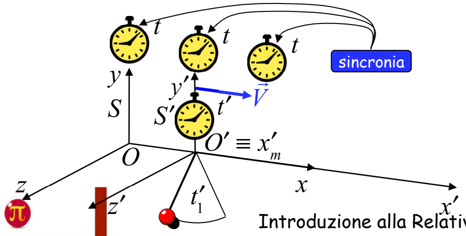
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (V)

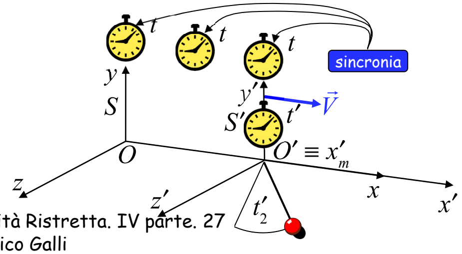
- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo è **più lungo nel SdR S**, nel quale il pendolo è in **moto**:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} > T_0$$

(**dilatazione relativistica dei tempi**)

- Il SdR in cui la **il periodo del pendolo** è **minimo** è il SdR in cui il pendolo è **a riposo** (**tempo proprio**).





Reciprocità

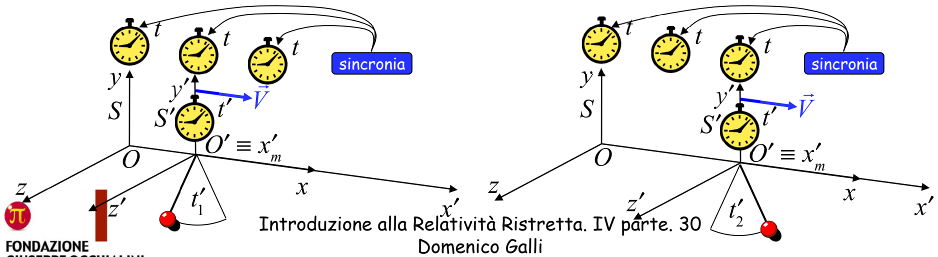
- L'effetto di dilatazione dei tempi deve essere completamente **reciproco** e **non** determinare il **privilegio** di nessun SdR rispetto agli altri.
- Cosideriamo un SdR S' in moto relativo rispetto al SdR S.
- Un **orologio fisso in S'** è visto in moto da un osservatore in S il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Tuttavia è vero anche che un **orologio fisso in S** è visto in moto da un osservatore in S' il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Come si possono **conciliare** queste due affermazioni?
  - Qual è l'orologio che veramente rimane indietro rispetto all'altro?
  - Qual è l'orologio che invece va avanti rispetto all'altro?

Reciprocità (II)

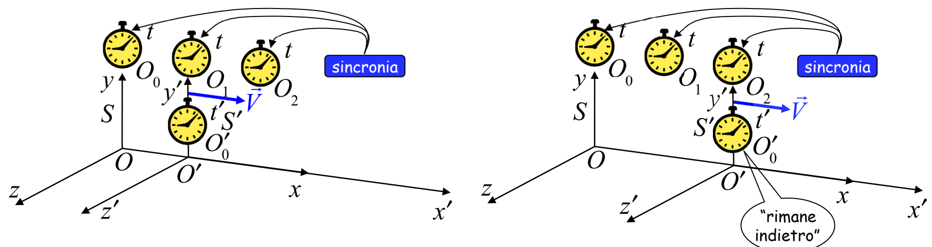
- La chiave della risposta sta nel **procedimento di confronto degli orologi**.
- Per confrontare i tempi in un certo istante, occorre potere disporre di **due orologi che in quell'istante si trovano nella stessa posizione**:
  - Altrimenti non è possibile definire **univocamente** la **simultaneità** della misura del tempo da parte dei 2 orologi.
- Occorre dunque potere disporre, almeno in uno dei 2 SdR, di una **successione di orologi sincronizzati** tra loro.
  - P. es. mediante un dispositivo di sincronismo che comanda tutti gli orologi della successione mediante cavi elettrici della stessa lunghezza.
- Nell'altro SdR è sufficiente un **orologio singolo**.

Reciprocità (III)

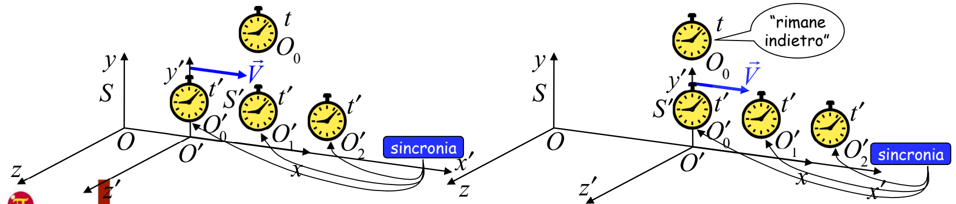
- Nel **nostro calcolo** abbiamo supposto di misurare sia il tempo t_1, sia il tempo t_2 nel punto alla coordinata x'_m, che è **fisso nel SdR S'** ma che **si muove nel SdR S**.
- Questo significa che abbiamo bisogno di **un solo orologio** nel SdR S' ma di **almeno 2 orologi** nel SdR S.
- L'orologio che rimane **indietro** è quello nel SdR S' cioè l'**orologio singolo** che viene confrontato con 2 orologi.



Reciprocità (IV)

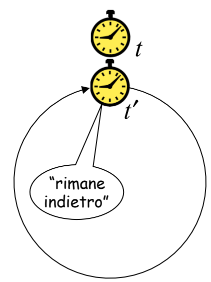


- In generale rimane **indietro** l'**orologio singolo** che viene confrontato con la successione di orologi.



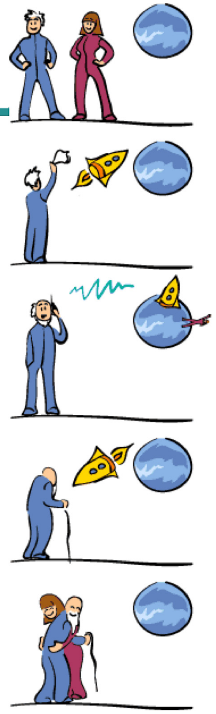
Reciprocità (V)

- Che cosa succede se si prendono 2 orologi:
  - Uno fisso in un certo SdR inerziale;
  - Uno che, partendo dallo stesso punto, descrive una **traiettoria chiusa** e ritorna al punto di partenza?
- In questo caso il calcolo è più complicato perché l'orologio in moto si trova in un **SdR non-inerziale** (non è in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto a un SdR inerziale).
- Tuttavia si può dimostrare che **rimane indietro l'orologio in moto**.
- La **reciprocità non vale** perché uno dei due SdR non è inerziale.



Paradosso dei Gemelli

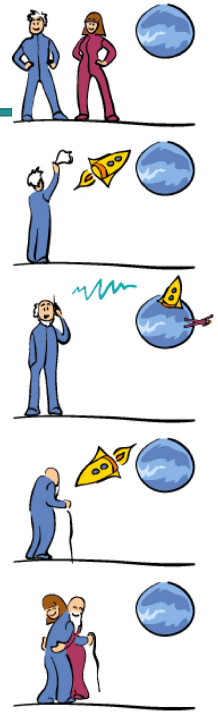
- **Uno dei due gemelli** parte a bordo di una **navicella spaziale** e compie un lungo viaggio con velocità costante e prossima a quella della luce, lasciando l'**altro gemello** sulla **Terra**.
- Dopo alcuni anni egli ritorna sulla Terra e si ricongiunge al fratello. Per tutto il tempo in cui è stato sulla navicella, il gemello viaggiatore ha vissuto in un mondo in cui lo **scorrere del tempo** e tutti i fenomeni, compresi i **processi biologici** dell'**invecchiamento**, erano **rallentati**.
- Al suo ritorno sulla Terra egli sarà quindi rimasto **più giovane del fratello**.



Paradosso dei Gemelli (II)

- Se il **gemello viaggiatore** ha viaggiato per 10 anni (secondo quanto indicato dall'orologio della navicella) a una velocità $v = 0.9\,c$, per il **gemello sulla Terra** sono passati:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{10\,\text{anni}}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = 22.94\,\text{anni}$$



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Quadrivettori

Lo spazio-tempo a 4 dimensioni.

Trasformazioni di Lorentz e Rotazioni

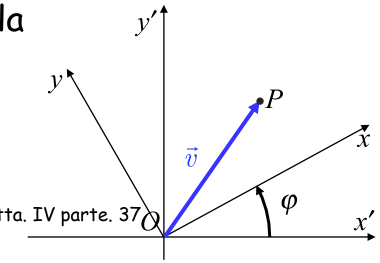
- Consideriamo ora le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- Esse descrivono la trasformazione delle 4 coordinate ct, x, y e z conseguenti al **cambiamento di SdR**, da un SdR inerziale a un altro.
- **Confrontiamo** queste relazioni con quelle relative a una **rotazione nello spazio ordinario**.

Rotazioni nello Spazio Ordinario

- Supponiamo che nello **spazio ordinario** a 3 dimensioni siano **ruotati gli assi cartesiani** di un **angolo φ**, p. es. attorno all'**asse z**.
- Scriviamo ora le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione delle coordinate di un punto** conseguente a tale rotazione.
- Oppure, il che è equivalente, le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione delle componenti di un vettore** conseguente a tale rotazione.

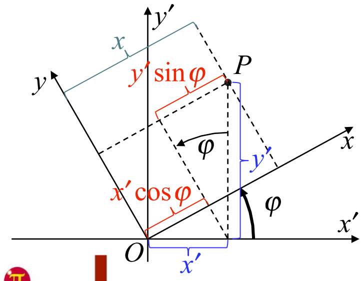


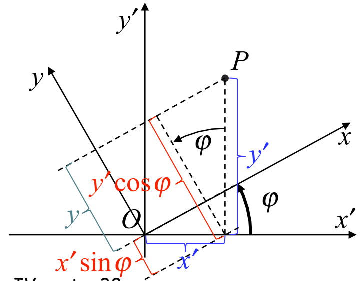
Rotazioni nello Spazio Ordinario (II)

- Come si vede dalle figure si ha:

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

(trasformazioni **inverse**)





Rotazioni nello Spazio Ordinario (III)

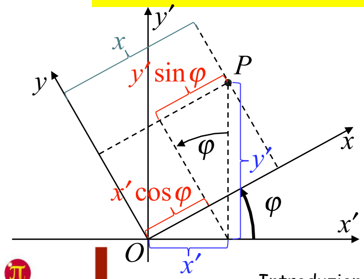
- Per ottenere le **trasformazioni dirette** è sufficiente sostituire le variabili con gli apici a quelle senza apici e viceversa e sostituire all'angolo φ l'angolo $-\varphi$:

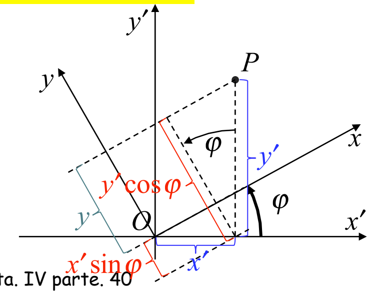
$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi \to -\varphi \\ \cos\varphi \to \cos\varphi \\ \sin\varphi \to -\sin\varphi \\ ct \to ct',\ ct' \to ct \\ x \to x',\ x' \to x \\ y \to y',\ y' \to y \\ z \to z',\ z' \to z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (IV)

- Le trasformazioni dirette e inverse che descrivono una rotazione attorno all'asse z sono quindi:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$





Rotazioni nello Spazio Ordinario (V)

- Osserviamo che le rotazioni non modificano la distanza d del punto P dall'origine O:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

$$d' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right)^2 + \left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2\cos^2\varphi + y^2\sin^2\varphi \cancel{-2xy\cos\varphi\sin\varphi} + x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi \cancel{+2xy\sin\varphi\cos\varphi}} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + y^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \sqrt{x^2 + y^2} = d$$

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = d^2$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (VI)

- Questo risultato può essere generalizzato a una **generica rotazione nello spazio 3-dimensionale**:

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

- La **distanza di un punto P dall'origine O** è un **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.
- Il **modulo di un vettore** è **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.

Rapidità

- Vediamo ora di scrivere le trasformazioni di Lorentz in una forma simile.
- Definiamo una nuova grandezza **adimensionale** (numero puro) chiamata **rapidità**:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right]$$

- Si ha:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1-\beta\right)}\right]$$

Rapidità (II)

- Dunque la **rapidità** si può anche scrivere come:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1-\beta\right)}\right]$$

- Inoltre si ha:

$$-\varphi = -\ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1+\beta\right)}\right] = \ln\left[\gamma\left(1-\beta\right)\right]$$

$$e^{\varphi} = \gamma\left(1+\beta\right) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

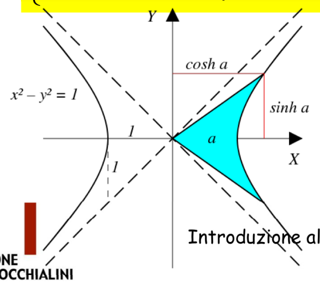
$$e^{-\varphi} = \gamma\left(1-\beta\right) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

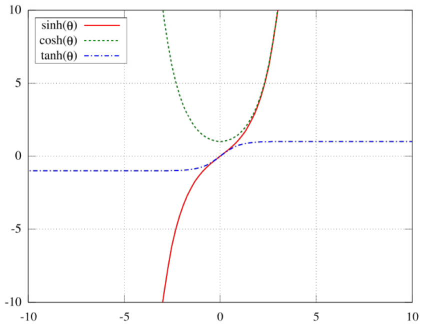
Funzioni Iperboliche

- Introduciamo ora le **funzioni iperboliche**:

$$\begin{cases} \sinh\varphi = \dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} \\ \cosh\varphi = \dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \\ \tanh\varphi = \dfrac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}} \end{cases}$$

$$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$$





Rapidità e Funzioni Iperboliche

- Utilizzando le funzioni iperboliche si ha:

$$e^{\varphi} = \gamma\left(1+\beta\right)$$

$$e^{-\varphi} = \gamma\left(1-\beta\right)$$

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(\cancel{1}+\beta\right)-\gamma\left(\cancel{1}-\beta\right)}{2} = \gamma\beta$$

$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(1+\cancel{\beta}\right)+\gamma\left(1-\cancel{\beta}\right)}{2} = \gamma$$

Trasformazioni di Lorentz

- Utilizzando le **funzioni iperboliche** e la **rapidità**, si possono scrivere le trasformazioni di Lorentz nella forma:

$$\begin{cases} \gamma\beta = \sinh\varphi \\ \gamma = \cosh\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct-\beta x\right) = \gamma ct - \gamma\beta x = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = \gamma\left(x-\beta ct\right) = \gamma x - \gamma\beta ct = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (II)

- Osserviamo che le trasformazioni di Lorentz non modificano la quantità $s^2 = c^2t^2 - x^2$:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$s' = \sqrt{c^2t'^2 - x'^2} = \sqrt{\left(ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi\right)^2 - \left(-ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{c^2t^2\cosh^2\varphi + x^2\sinh^2\varphi \cancel{-2ctx\cosh\varphi\sinh\varphi} - c^2t^2\sinh^2\varphi - x^2\cosh^2\varphi \cancel{+2ctx\sinh\varphi\cosh\varphi}} =$$

$$= \sqrt{c^2t^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right) - x^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right)} = \sqrt{c^2t^2 - x^2} = s$$

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 = s^2$$

Trasformazioni di Lorentz (III)

- Confrontiamo ora le **Trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right]$$

con le **rotazioni attorno all'asse z**:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (IV)

- Osserviamo che **rotazioni** e **trasformazioni di Lorentz** sono **analoghe nella forma**:
  - Le **rotazioni** attorno all'asse z "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate x e y;
  - Le **trasformazioni di Lorentz** "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate ct e x.
- Le trasformazioni di Lorentz sono analoghe a **rotazioni tra lo spazio e il tempo**.

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (V)

- Le differenze stanno nell'uso delle **funzioni circolari** per le **rotazioni** e delle **funzioni iperboliche** per le **trasformazioni di Lorentz**.
- Inoltre (e conseguentemente) c'e' un **segno** relativo diverso nella espressione dell'**invariante**:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 & \text{(rotazioni)} \\ s^2 = c^2t^2 - x^2 & \text{(trasformazioni di Lorentz)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Spazio-Tempo

- Possiamo quindi pensare di formare **punti** e **vettori** in uno spazio a **4 dimensioni** (Spazio-Tempo), con le componenti:

$$\left(ct, x, y, z\right)$$

- Un punto dello Spazio-tempo è detto **evento**.
- Potremo inoltre definire un **invariante** generale (l'**analogo del modulo** di un vettore in 3 dimensioni):

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Questo invariante non viene modificato né da una rotazione, né da una trasformazione di Lorentz.
  - Il fatto che questo invariante non si modifichi nelle trasformazioni di Lorentz è una espressione dell'**invarianza della velocità della luce** nel vuoto.

Spazio-Tempo (II)

- Una **rotazione ordinaria** modifica il nostro **punto di vista** spaziale:
  - può avvenire sui **piani** xy, yz e zx.
- Una **trasformazione di Lorentz** modifica il nostro **punto di vista** facendoci passare da un SdR inerziale a un altro SdR inerziale in moto rispetto al primo:
  - È una "rotazione" che può avvenire sui **piani** tx, ty e tz.
- L'idea di uno spazio-tempo 4-dimensionale è di **Hermann Minkowski** (1864-1909).
  - Questo particolare spazio è detto perciò **spazio di Minkowski**.

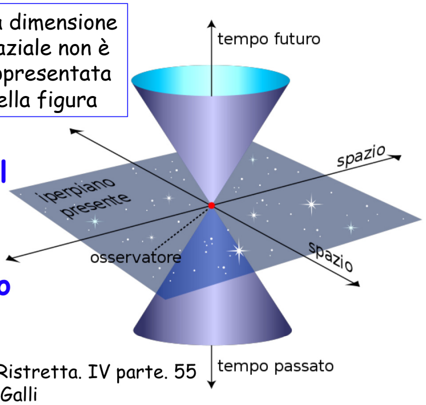
Spazio-Tempo (III)

- Un **punto materiale** è rappresentato da una linea nello **spazio-tempo**, denominata **linea d'universo**.
- Un oggetto che occupa spazio e che si estende per una certa durata di tempo occupa una specie di "**bolla**" nello spazio-tempo.
  - Quando ci muoviamo a **diverse velocità** vediamo questa bolla da un **diverso punto di vista**.

Spazio-Tempo (IV)

- Dato un evento (ct_0, x_0, y_0, z_0), la "**iper-superficie**" conica nello spazio-tempo a 4 dimensioni di equazione:
$$c^2\left(t-t_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2-\left(z-z_0\right)^2=0$$
(**cono di luce**) divide lo spazio-tempo in 3 regioni distinte:
  - **Passato assoluto**;
  - **Futuro assoluto**;
  - **Separazione assoluta**.
- La linea di universo di un **fotone** sta **sulla superficie del cono di luce**.
- La linea di universo di una **particella con massa** sta **entro il cono di luce**.

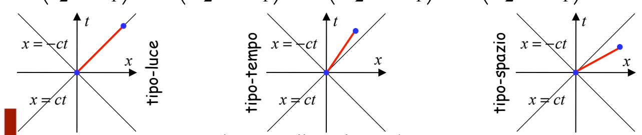
Una dimensione spaziale non è rappresentata nella figura

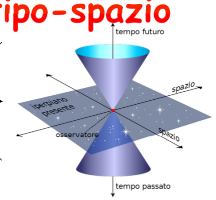


Spazio-Tempo (V)

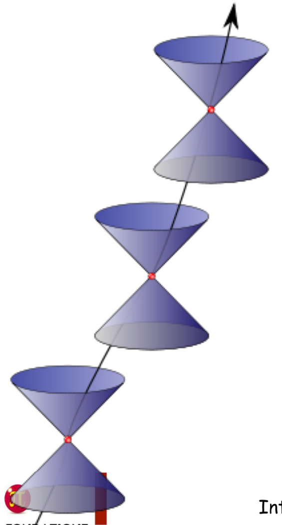
- La **proprietà** di un evento, per esempio (ct_2, x_2, y_2, z_2), di trovarsi **entro il cono di luce di un altro evento**, per esempio (ct_1, x_1, y_1, z_1), **non dipende dal SdR**. (è invariante per trasformazioni di Lorentz).
- Gli **intervalli** dello **spazio-tempo** si classificano in:

$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-luce}$$
$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2>\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-tempo}$$
$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2<\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-spazio}$$





Spazio-Tempo (VI)



- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-tempo** vi può essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-spazio** **non** vi può essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-luce** vi può essere un nesso con un segnale luminoso.
- L'intervallo tra due punti della **linea di universo** di un punto materiale è sempre di **tipo-tempo**.