FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Grandezze vettoriali

Antonio Zoccoli
Università di Bologna
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e
Fondazione Giuseppe Occhialini

Pesaro, 30 Marzo 2010

http://www.fondazioneocchialini.it

Cinematica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La **meccanica** studia i moti dei corpi e le leggi che li governano.
- **Cinematica**: approccio descrittivo. Studio delle grandezze fisiche e dei metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto, **senza curarsi delle cause** che li determinano.
- **Punto materiale**: è l'oggetto mobile più semplice. Ha **dimensioni trascurabili nel contesto considerato**.
  - P. es.: nel sistema solare la Terra può essere considerata un punto materiale, in quanto ha dimensioni piccole rispetto alle orbite dei pianeti e i suoi moti di rotazione, precessione, ecc. possono essere tralasciati nella descrizione del moto di rivoluzione.

Cinematica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Oggetti estesi**: possono essere suddivisi in tante parti, sufficientemente piccole per il dettaglio richiesto, e considerati come **sistemi di punti materiali**.
- **Il moto è relativo**: si può descrivere il moto soltanto quando si è stabilito rispetto a che cosa il movimento è valutato.
- **Sistema di Riferimento** (**SdR**): sistema di corpi, **in quiete gli uni rispetto agli altri** (distanza reciproca immutata nel tempo), rispetto a cui si descrive il moto.
- **Terna cartesiana di riferimento**: terna cartesiana, fissa rispetto al SdR, utilizzata per descrivere quantitativamente il moto.

Moto su una linea

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

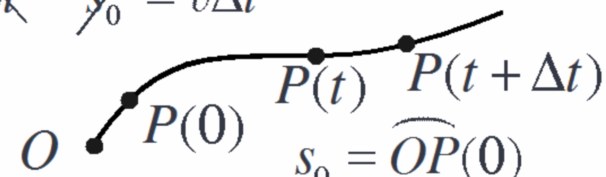
- La velocità è un concetto introdotto per descrivere la **"rapidità"** con cui un punto materiale si sposta.
- **Moto uniforme**: è il moto di un punto materiale che **percorre archi di traiettoria di ugual lunghezza in intervalli di tempo uguali**. La legge oraria si può perciò scrivere soltanto nella forma:

  $$s(t) = vt + s_0$$

  dove s_0 è il valore di s all'istante $t = 0$ e v **è un parametro (costante)**. Se la funzione $s(t)$ non fosse di **primo grado in t** gli archi di traiettoria percorsi in intervalli di tempo uguali potrebbero non essere uguali.
- L'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo Δt è:

$$\Delta s = s\left(t + \Delta t\right) - s\left(t\right) = v\left[\cancel{t} + \Delta t\right] + \cancel{s_0} - \cancel{vt} - \cancel{s_0} = v\Delta t$$

funzione moltiplicazione



$$s_0 = \overset{\frown}{OP}(0)$$
$$s(t) = \overset{\frown}{OP}(t)$$
$$s(t+\Delta t) = \overset{\frown}{OP}(t+\Delta t)$$

Unità di misura

FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Per studiare il moto di un corpo e le forze che agiscono su di esso occorre misurare contemporaneamente posizione, tempo e massa.

Unità di misura (dopo una lunga storia):

-Lunghezza: metro

-Tempo: secondo

-Massa: kg

Moto su una linea

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

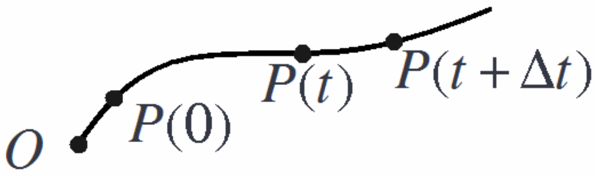
$$\Delta s = v\Delta t$$

- Segue che il parametro v si può esprimere come:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$$ (**velocità nel moto uniforme**)

ed è perciò tanto più grande quanto più lungo è l'arco di traiettoria percorso in un intervallo di tempo fissato.

- Chiamiamo perciò **velocità** del moto uniforme tale parametro v.



$$s_0 = \overset{\frown}{OP}(0)$$
$$s(t) = \overset{\frown}{OP}(t)$$
$$s(t+\Delta t) = \overset{\frown}{OP}(t+\Delta t)$$

- Nel **moto vario** (cioè **non-uniforme**) possiamo definire la **velocità media**:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- tuttavia v_m dipende, oltre che da t, anche da Δt (durante il tempo Δt la velocità può cambiare).

- Introduciamo allora la **velocità istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La velocità istantanea è la derivata di s rispetto a t.

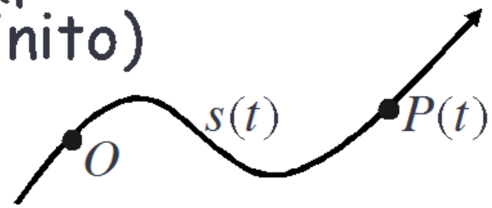
Moto nello spazio

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo un punto materiale che si muove (la sua posizione P si modifica nel tempo: $P=P(t)$) o, in maniera equivalente, il suo vettore posizionale:

$$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

- **Traiettoria**: linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto.
- Scegliendo sulla traiettoria un'**origine** O e un **verso**, si indica con s la lunghezza dell'arco OP (positiva se P segue O nel verso di percorrenza definito)
- **Legge oraria**: è la funzione $\boxed{s = s(t)}$.



- Da **traiettoria** e **legge oraria** si ha una descrizione completa del moto del punto (**descrizione intrinseca**).

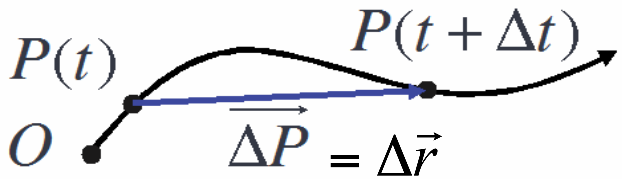
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- In un **moto curvilineo** la **direzione** del moto **varia nel tempo**. v contiene informazioni sulla rapidità di spostamento, ma non sulla direzione.

- Si può compendiare in un'unica grandezza fisica la rapidità del moto e la sua direzione.

- Consideriamo lo spostamento di un punto P in un intervallo Δt, ma invece di misurare lo spostamento lungo la traiettoria, consideriamo lo spostamento **"in linea d'aria"**, ovvero il segmento orientato:

$$\overrightarrow{\Delta P} = P(t+\Delta t) - P(t) = \Delta\vec{r}$$

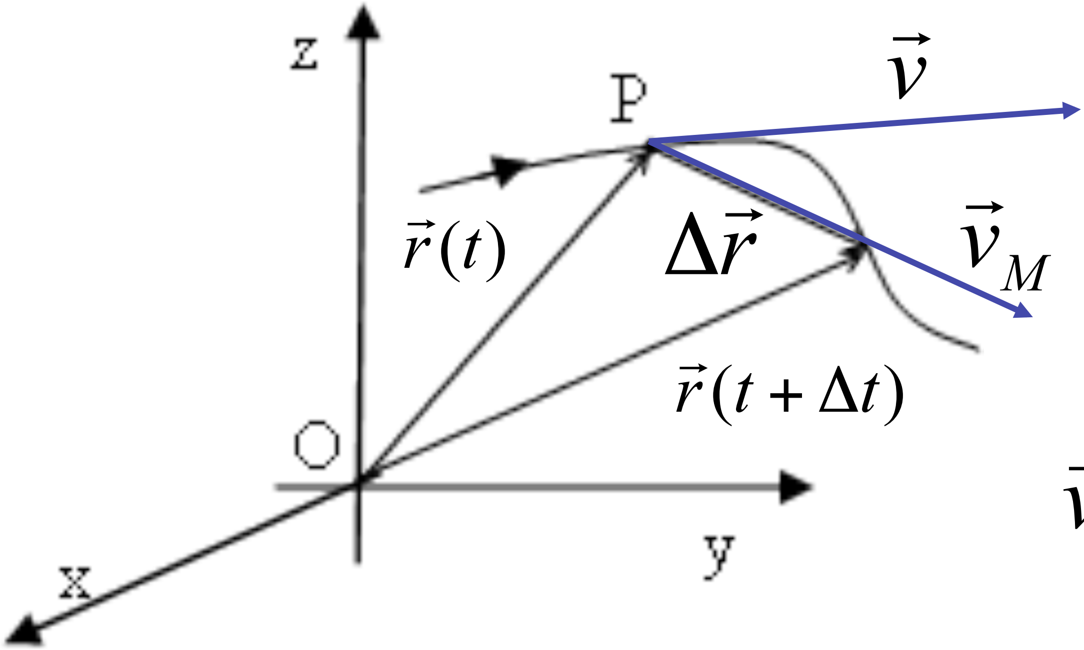


- Possiamo ora definire la **velocità media vettoriale**:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}}$$

Moto nello spazio

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}_M = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

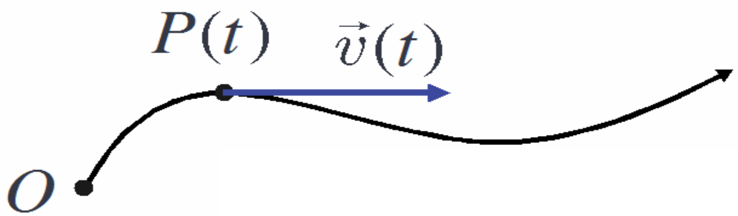
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Essa ha la stessa direzione dello spostamento e modulo tanto più grande quanto maggiore lo spostamento ("in linea d'aria") compiuto in un intervallo di tempo fissato.
- Si può definire anche la **velocità istantanea vettoriale**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}$$

che dunque è la derivata del punto (o del vettore posizionale) rispetto al tempo.

- La direzione di $\vec{v}$ è **tangente alla traiettoria** nel punto $P(t)$



FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Una descrizione alternativa consiste nell'assegnare le 3 coordinate cartesiane x, y e z del punto P in funzione del tempo (**descrizione cartesiana**).

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(equazioni parametriche con il tempo t come parametro)

- Le equazioni parametriche, **se il parametro è il tempo**, forniscono una **descrizione completa** del moto del punto, diversa ma equivalente alla descrizione intrinseca.

- Se si sceglie l'origine degli assi cartesiani nel punto fisso O e si considera il corrispondente vettore posizionale, si ha:

$$\boxed{\vec{r}(t) = P(t) - O = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}}$$

- Derivando rispetto al tempo l'espressione cartesiana della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

- essendo i versori cartesiani costanti, si ottiene l'**espressione cartesiana dell'accelerazione**:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k}}$$

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Rappresenta quantitativamente la **rapidità con cui varia la velocità di un punto**.
- Possiamo quindi definire **accelerazione media** il rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- e **accelerazione istantanea** il limite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{P} = \frac{d^2 P}{dt^2}$$

Grandezze fisiche

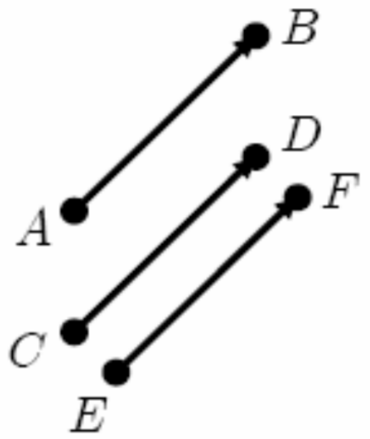
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Grandezze scalari**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* e una *unità di misura*.
  - Esempi: lunghezza, tempo, superficie, volume, massa, temperatura, carica elettrica, ecc.
- **Grandezze vettoriali**: completamente specificate assegnando un *valore numerico* (detto modulo o norma), una *direzione*, un *verso* e una *unità di misura*.
  - Esempi: spostamento rettilineo di un punto, velocità, accelerazione, forza, momento di una forza, momento di dipolo elettrico, ecc.
- **Grandezze tensoriali**: la loro specificazione è ancora più complicata
  - Esempi: rotazione, tensore di inerzia, ecc.

Cos'è un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Prototipo**: spostamento rettilineo di un punto.
  - Spostamento di un punto da A a B $\xleftrightarrow[\text{su}]{1-1}$ segmento orientato che congiunge A con B.
  - Esistono infiniti segmenti orientati che rappresentano spostamenti rettilinei di egual lunghezza, paralleli ed equiversi.
    - Chiamiamo **vettore** $\vec{v}$ il "**quid**" **comune** a tali segmenti orientati (Vailati-Enriquez).
    - Oppure, definiti equipollenti due segmenti orientati di egual lunghezza, paralleli ed equiversi, definiamo **vettore** $\vec{v}$ la **classe di equivalenza** dei segmenti orientati rispetto alla relazione di equipollenza (Frege-Russel).



$$\vec{v} = B - A = D - C = F - E$$

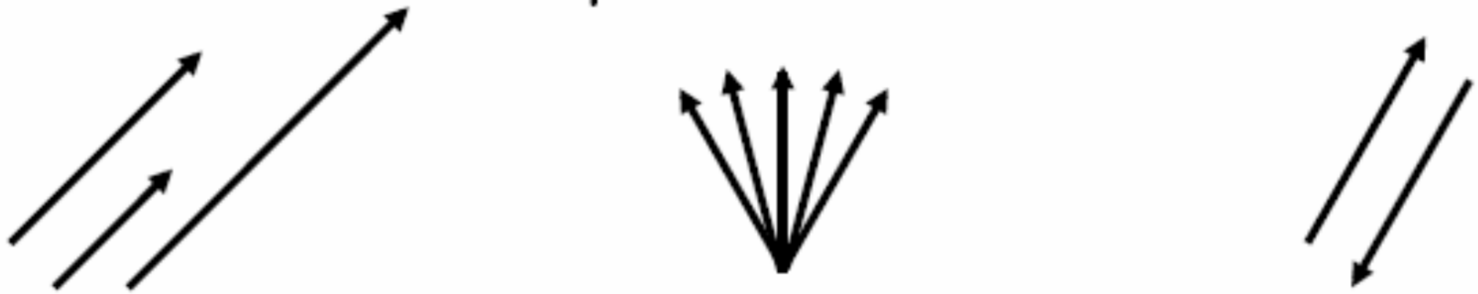
Notazioni equivalenti:

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \underline{v} = \overline{v}$$

Caratteristiche di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Modulo** (o **norma**): distanza tra origine A e vertice B. Si indica con $\left\|\vec{v}\right\| = \left|\vec{v}\right| = v$
- **Direzione**: orientamento nello spazio della retta su cui giace il segmento orientato AB.
- **Verso**: senso di percorrenza.



- Medesima direzione, medesimo verso, moduli diversi.
- Medesimo modulo direzione diversa.
- Medesimo modulo, medesima direzione, verso opposto.

Uguaglianza tra vettori

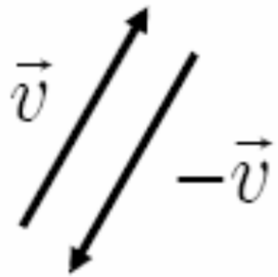
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Due vettori si dicono **uguali** se, e soltanto se, hanno:
  - il **medesimo modulo**,
  - la **medesima direzione**,
  - il **medesimo verso**.
- Se due vettori non sono uguali si dicono **disuguali**, ma **non** è possibile definire una **relazione d'ordine** in quanto non si può trovare un criterio per affermare che un vettore è maggiore o minore di un altro.

Vettore opposto e vettore nullo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$, si definisce **vettore opposto** $-\vec{v}$ un vettore avente stessa direzione, stesso modulo ma verso opposto.



- Si chiama **vettore nullo** $\vec{0}$ un vettore che ha modulo nullo (in questo caso direzione e verso sono indeterminati).

Cos'è un versore

- Si chiamano **versori** i vettori di modulo unitario.

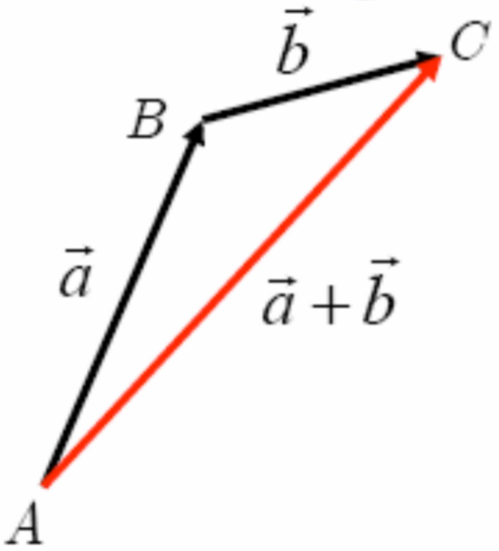
- Per ogni vettore $\vec{v}$ **non nullo** esiste un versore che ha la stessa direzione orientata:

$$\hat{v} = \mathrm{vers}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{1}{\left\|\vec{v}\right\|}\vec{v}$$

Somma di vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Prototipo: spostamento rettilineo di un punto.
- Se considero due spostamenti successivi dello stesso punto: prima da A a B, poi da B a C.
- Il risultato (**somma** dei due vettori) è lo spostamento da A a C (**regola del triangolo**):



$$C - A = (C - B) + (B - A)$$

Ovvero, indicando:

$$\vec{a} = B - A,\ \vec{b} = C - B$$

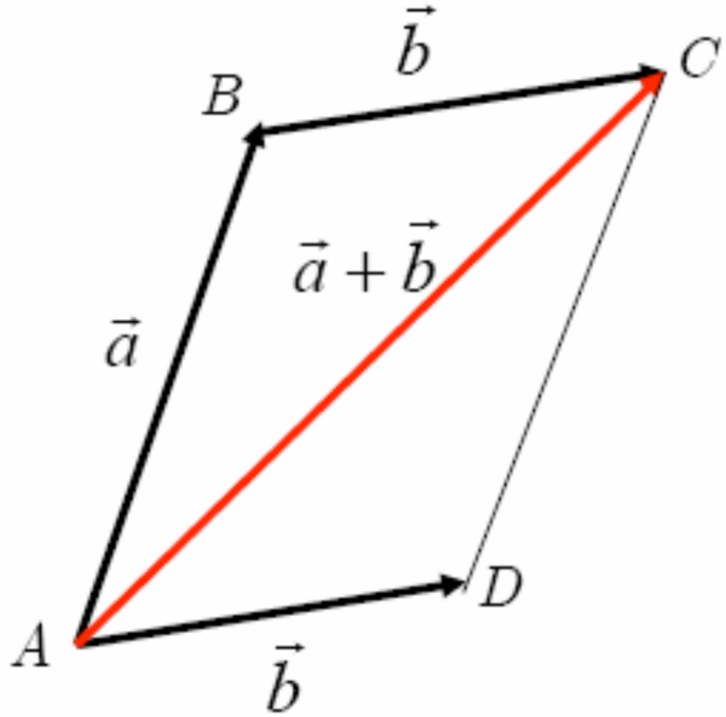
Sarà:

$$\vec{a} + \vec{b} = C - A$$

Regola del parallelogramma

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

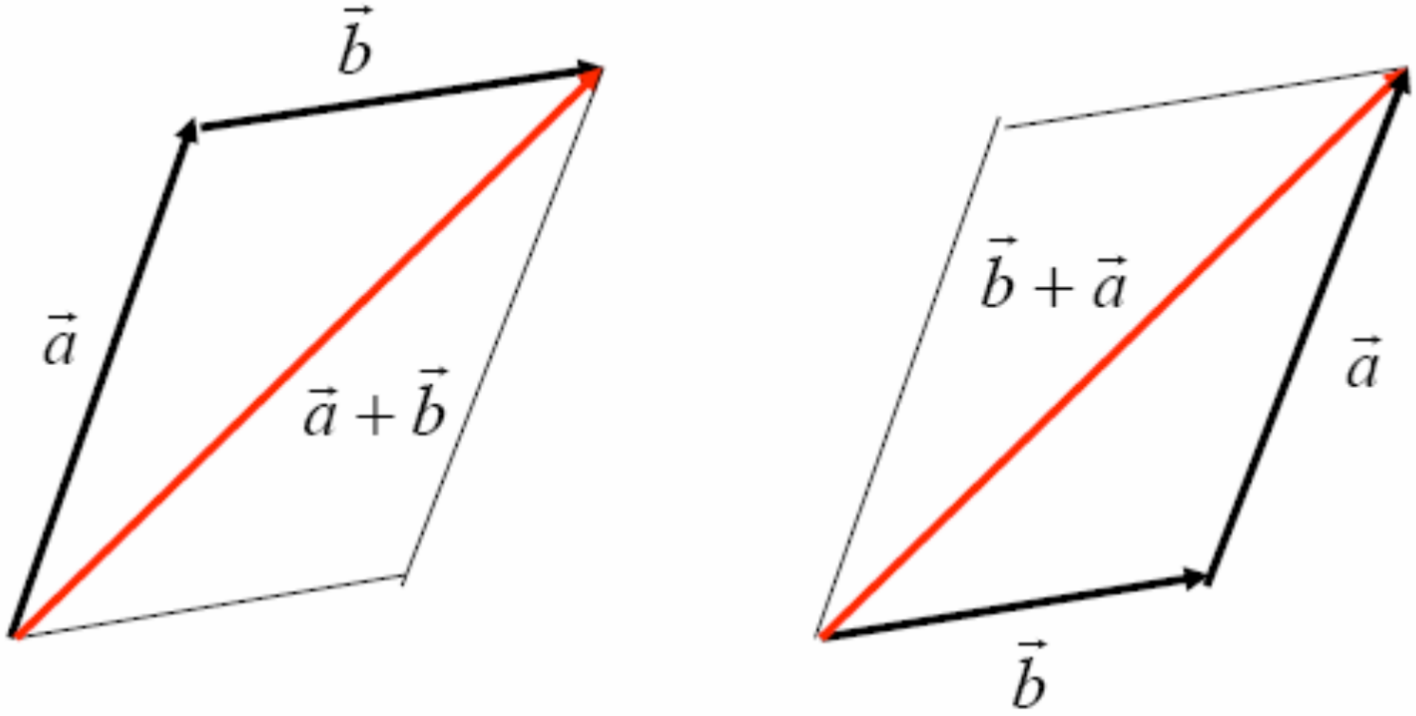
- La somma $\vec{a}+\vec{b}=C-A$ è la **diagonale** del parallelogrammo $ABCD$ avente per lati i segmenti orientati $B-A$ e $D-A$.



Commutatività della somma di vettori

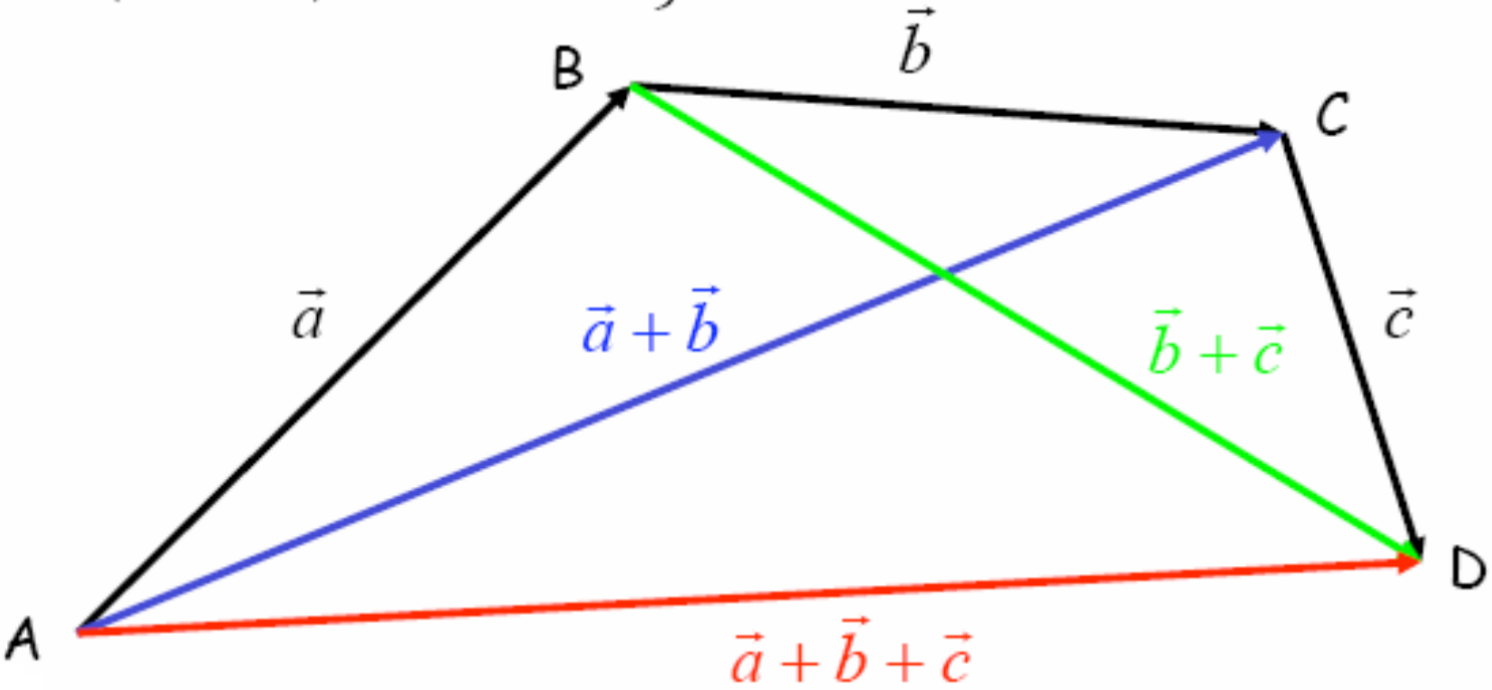
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



Associatività della somma di vettori

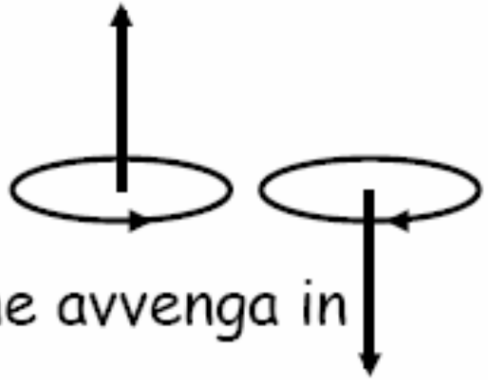
$$\left.\begin{array}{l}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=D-A\\ \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=D-A\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$



Rotazioni

FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

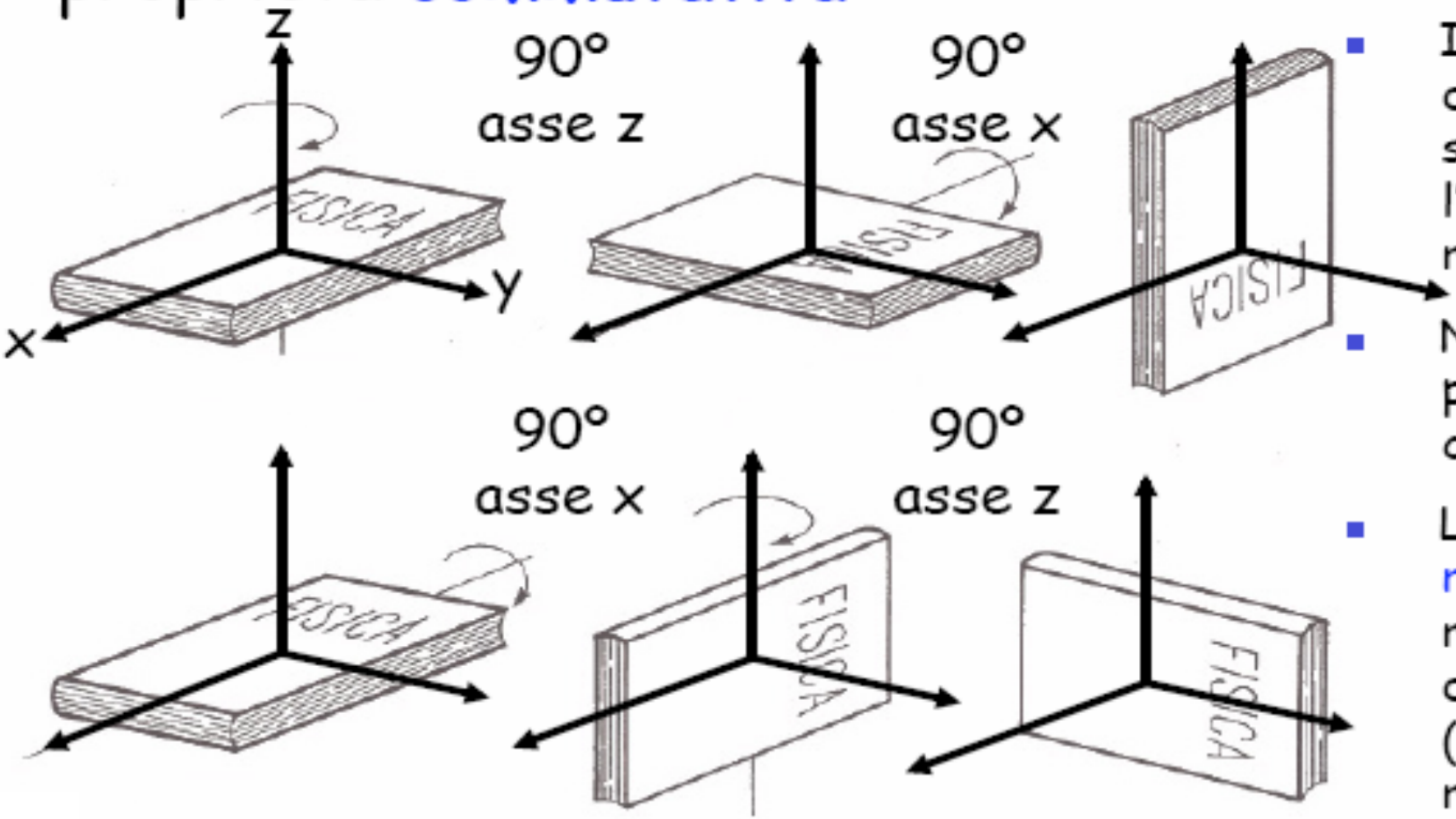
- Una **traslazione** è rappresentata da un vettore.
- Una **rotazione** è essa pure rappresentata da un vettore? (vedremo che la risposta è **NO**).
- Tuttavia, a prima vista potremmo pensare di rappresentare una rotazione mediante:
  - Una direzione (asse di rotazione);
  - Un numero (angolo di rotazione);
  - Un verso (a seconda che la rotazione avvenga in senso orario o antiorario).



Rotazioni

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

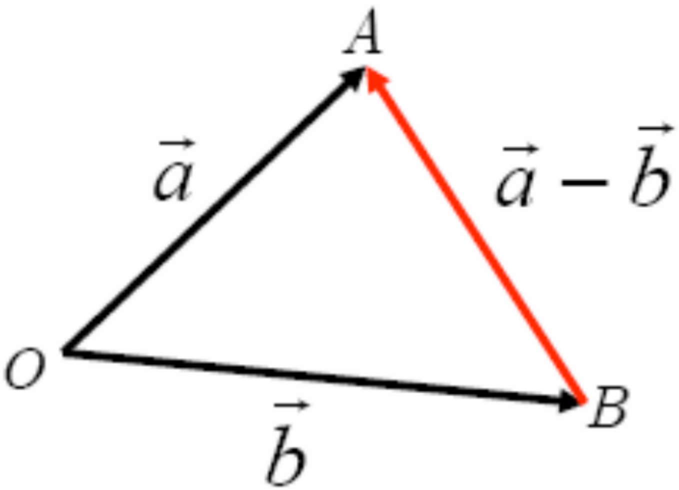
- Verifichiamo se le rotazioni godono della proprietà **commutativa**:



- Il risultato è diverso se si scambia l'ordine delle rotazioni.
- Non vale la proprietà commutativa
- Le rotazioni **non** sono rappresentate da **vettori** (sono rappresentate da **tensori**).

Differenza tra vettori

- È l'operazione inversa della somma
- Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si chiama **differenza** fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con $\vec{a}-\vec{b}$ quel vettore che sommato a $\vec{b}$ dà come risultato $\vec{a}$.



$$\vec{a} = A - O$$

$$\vec{b} = B - O$$

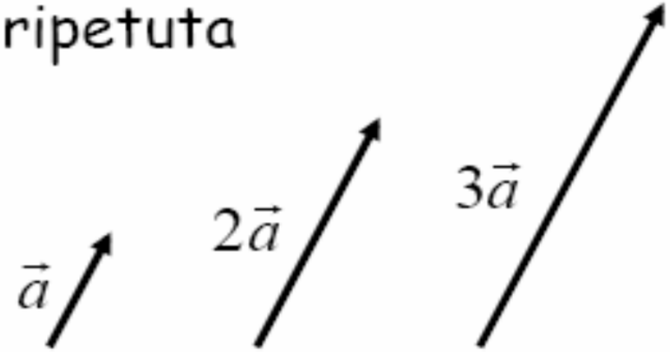
$$\vec{a} - \vec{b} = A - B$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può definire il **prodotto** di un numero **naturale** n per un **vettore** $\vec{a}$ come una somma ripetuta

$$\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n\ \text{volte}}=n\vec{a}$$



- Generalizzando, si definisce **prodotto** di un **numero reale** θ e un **vettore** $\vec{a}$ e si indica con il simbolo $\alpha\vec{a}$ il vettore che ha per modulo il prodotto $|\alpha|\|\vec{a}\|$, per direzione la stessa direzione di $\vec{a}$, e, per verso, lo stesso verso di $\vec{a}$ se $\theta>0$, il verso contrario se $\theta<0$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{a}\in V\end{array}\right\}\alpha\vec{a}\in V$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto di un vettore per uno scalare è commutativo, associativo, distributivo, sia rispetto alla somma di scalari, sia rispetto alla somma di vettori.

$$\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$$

$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$$

$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$$

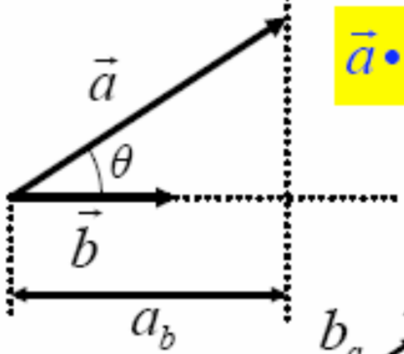
$$\vec{a}\frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|} = \hat{a} = \mathrm{vers}\,\vec{a}$$

$$\begin{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \end{cases}$$

Prodotto scalare tra due vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

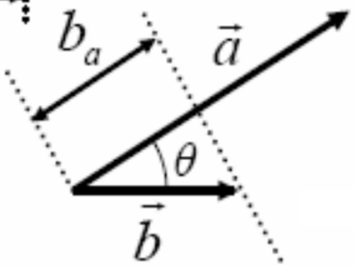
- Associa a due vettori uno scalare (p. es., associa a forza e spostamento il lavoro).
- Si definisce **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} \bullet \vec{b}$ il prodotto del modulo di uno dei due vettori per **la** componente dell'altro sulla sua direzione.



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_b\, b = a\, b_a$$

$$\begin{cases} a_b = a\cos\theta \\ b_a = b\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_b\, b = (a\cos\theta)\, b \\ a\, b_a = a\,(b\cos\theta) \end{cases}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta = a\, b\cos\theta$$



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{a}\| = 0 \quad oppure \\ \|\vec{b}\| = 0 \quad oppure \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$$

Proprietà del prodotto scalare

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto scalare gode delle proprietà **commutativa** e **distributiva** rispetto alla somma di vettori.

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$$

$$\left(m\vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(m\vec{b}\right) = m\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

Quadrato di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si chiama **quadrato di un vettore** il prodotto scalare di un vettore per se stesso:

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\cos 0 = \|\vec{a}\|^2$$

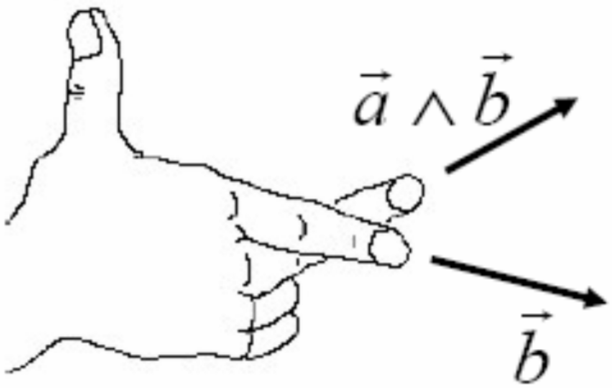
- Il **modulo** (o **norma**) di un vettore si può perciò scrivere:

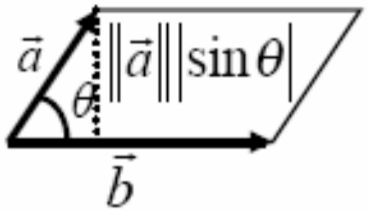
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

Prodotto vettoriale

- Si definisce **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il vettore che ha per modulo l'area del parallelogrammo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di direzione perpendicolare a entrambi i vettori e verso determinato dalla "**regola della mano destra**" (pollice: primo vettore; indice: secondo vettore; medio: prodotto vettoriale).

$\vec{a}$





$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{b}\| \left(\|\vec{a}\| \sin\theta \right)$$

$$\boxed{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{a}\| = 0 \quad oppure \\ \|\vec{b}\| = 0 \quad oppure \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \end{cases}$$

Proprietà del prodotto vettoriale

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il prodotto vettoriale gode delle proprietà **anticommutativa** e **distributiva** rispetto alla somma e alla differenza di vettori.

$$\begin{cases} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

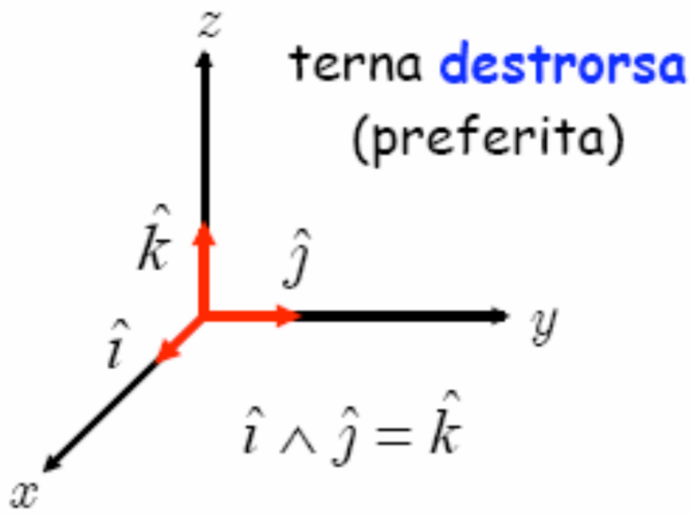
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

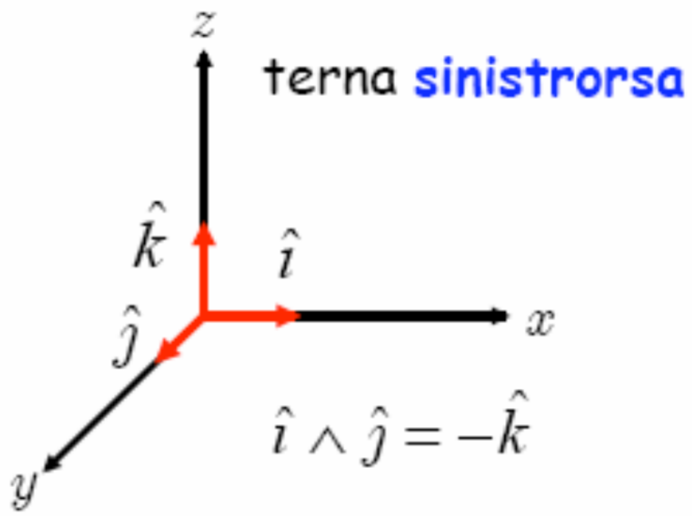
$$(m\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m\vec{b}) = m(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$(\vec{a} \pm \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} \pm \vec{b} \wedge \vec{c}$$

Rappresentazione cartesiana di un vettore

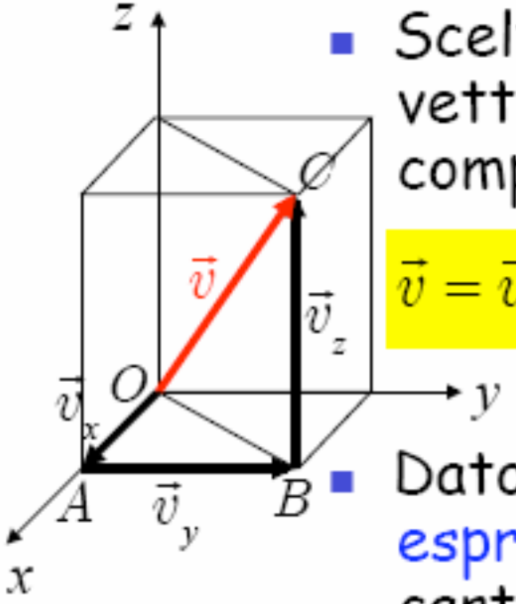
- **Terna cartesiana ortogonale**: 3 rette orientate (o assi) x, y e z, a due a due perpendicolari, aventi un punto in comune O detto **origine**.
- **Versori cartesiani**: versori corrispondenti agli assi x, y e z, indicati con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.
- **(Le) componenti cartesiane** e **(i) componenti cartesiani**: le componenti e i componenti di un vettore sugli assi cartesiani.





Rappresentazione cartesiana di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



- Scelta una terna cartesiana ortogonale, qualunque vettore $\vec{v}$ è uguale alla somma dei suoi 3 componenti cartesiani.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = v_x\hat{i} \\ \vec{v}_y = v_y\hat{j} \\ \vec{v}_z = v_z\hat{k} \end{cases}$$

- Dato un vettore, esso ha una differente espressione cartesiana per ogni differente terna cartesiana che si considera.

- Tuttavia, **fissata** una terna cartesiana ortogonale, vi è una corrispondenza biunivoca tra vettori e terne ordinate di numeri reali (le componenti cartesiane). $\vec{v} \xleftrightarrow[su]{1-1} (v_x, v_y, v_z)$

Rappresentazione cartesiana di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Fissata una terna cartesiana ortogonale:
  - Due vettori sono **uguali** se e soltanto se sono uguali le 3 corrispondenti componenti cartesiane.
  - Un vettore è **nullo** se e soltanto se sono nulle tutte e 3 le componenti cartesiane.
- Le operazioni tra vettori possono essere eseguite, oltre che nella **forma intrinseca** che abbiamo visto finora, anche nella **forma cartesiana**, utilizzando cioè le espressioni cartesiane dei vettori.

Integrale di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Integrale indefinito o funzione primitiva:

$$\vec{w} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

- Integrale definito

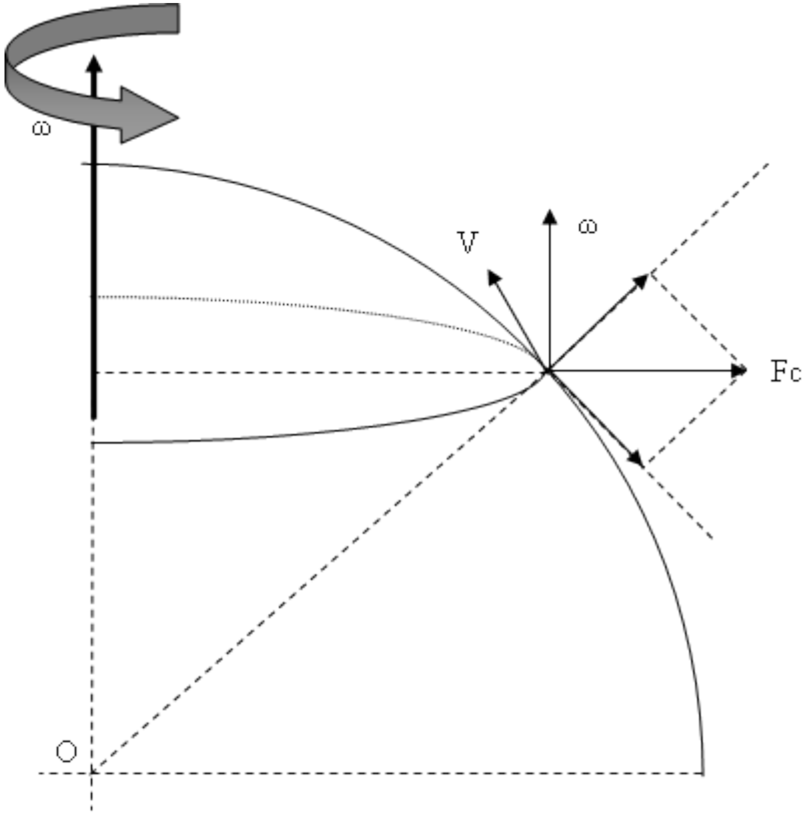
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{w}(t_2) - \vec{w}(t_1)$$

- Derivata e integrale possono essere effettuate mediante le espressioni cartesiane

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,\mathrm{d}t = \hat{\imath}\int_{t_1}^{t_2} v_x\,\mathrm{d}t + \hat{\jmath}\int_{t_1}^{t_2} v_y\,\mathrm{d}t + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} v_z\,\mathrm{d}t$$

Forza di Coriolis



La velocità è diretta lungo
un meridiano nell'emisfero Nord
La forza di Coriolis può essere
scomposta normalmente e
tangenzialmente alla superficie
terrestre

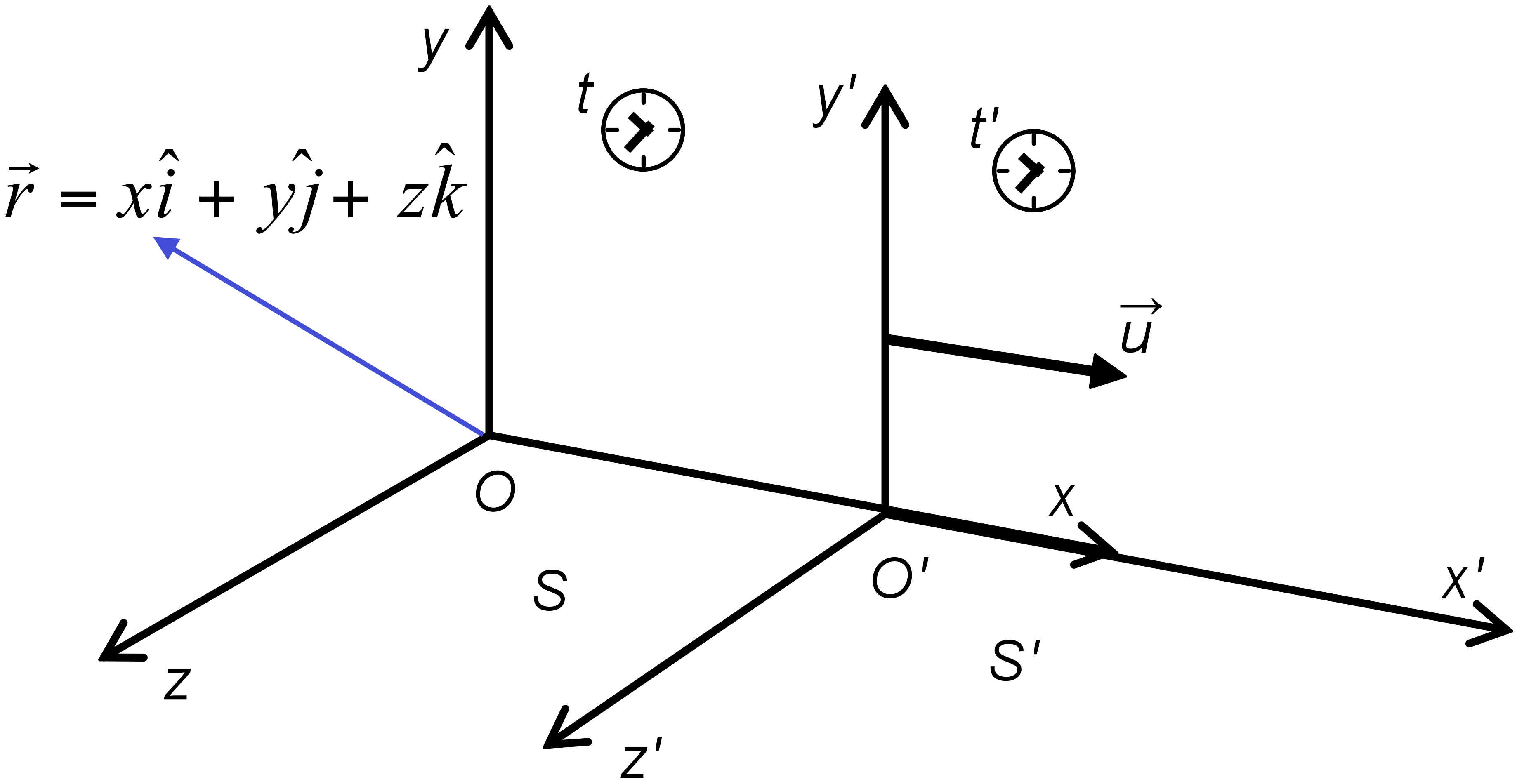
$$\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Principio di relatività

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- **Principio di Relatività: Non esiste un SdR privilegiato. Le leggi della Fisica sono uguali in tutti i SdR.**
  - La diatriba tra punto di vista **tolemaico** (geocentrico) e **copernicano** (eliocentrico) è **superata** nella fisica moderna: i due punti di vista non sono in antitesi (è altrettanto corretto dire che la Terra si muove rispetto al Sole o che il Sole si muove rispetto alla Terra). **La descrizione copernicana è più semplice ma non più "vera"**: con opportuni strumenti di calcolo si può pure descrivere il moto dei pianeti nel SdR terrestre.

La relatività galileiana e il problema dell'etere



La relatività galileiana e il problema dell'etere

- La trasformazione di coordinate dal sistema di riferimento inerziale "fisso" *S* a quello "mobile" *S*′ , che trasla rispetto a *S* con moto rettilineo uniforme, è, in fisica classica, descritto dalle cosiddette trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - u\,t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

- Queste relazioni, apparentemente ricavabili dalla semplice identità geometrica che esprime il crescere della distanza tra i piani *yz* e *y*′ *z*′ linearmente col tempo, sottendono in verità un'ipotesi di fondo sulle proprietà dello spazio-tempo: nella fisica classica le misure di lunghezza spaziale e di intervallo temporale sono quantità assolute, indipendenti dal sistema di riferimento, cioè dal moto dell'osservatore che compie le misure: se in *S* si osservano due eventi successivi separati da una distanza spaziale Δx e da un intervallo temporale Δt, si suppone che anche in *S*′ i due eventi vengano rilevati a distanza Δx l'uno dall'altro e con un ritardo temporale Δt. E' proprio su questa visione dello spazio e del tempo, consistente con il nostro senso comune della realtà, che la teoria della relatività di Einstein avrà le sue più radicali (e suggestive) ripercussioni.

La relatività galileiana e il problema dell'etere

- Dalle trasformazioni di coordinate si ricavano, derivando una e due volte rispetto al tempo ogni membro delle prime tre equazioni, le corrispondenti trasformazioni della velocità e dell'accelerazione (compiamo questa operazione assumendo, di nuovo, che l'incremento temporale infinitesimo Δt sia lo stesso nei due sistemi di riferimento; non sarà così nella relatività ristretta):

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

- Nel caso più generale in cui la velocità ha componenti lungo tutti e tre gli assi, la trasformazione delle velocità, scritta in forma vettoriale, diventa

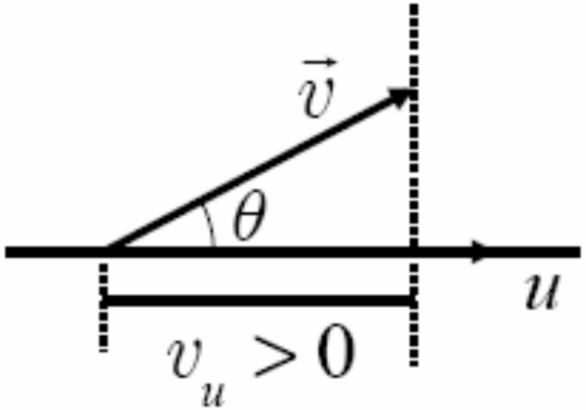
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}.$$

Backup slides

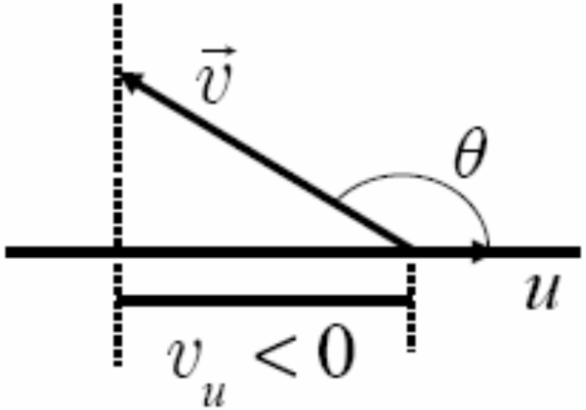
Proiezione di un vettore lungo una direzione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce la componente di $\vec{v}$ su u e si indica con v_u il prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il coseno dell'angolo θ che il vettore forma con la direzione orientata u.



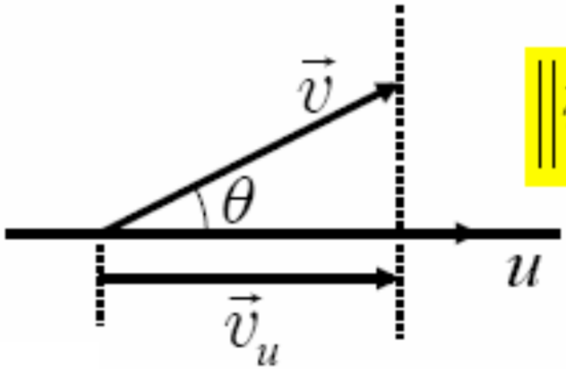
$$v_u = \left\|\vec{v}\right\| \cos\theta$$



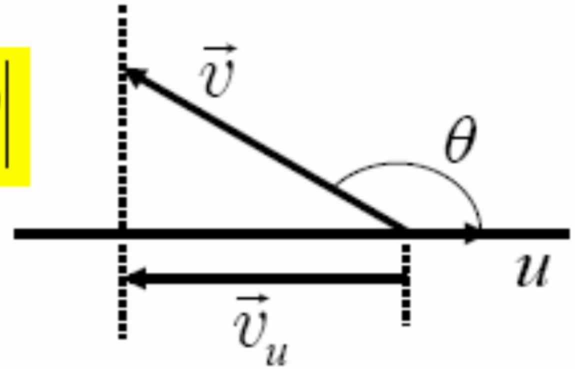
Proiezione di un vettore lungo una direzione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v}$ e una qualsiasi direzione orientata u, si definisce <u>il</u> componente di $\vec{v}$ su u e si indica con $\vec{v}_u$ il vettore che ha per modulo il valore assoluto del<u>la</u> corrispondente componente v_u e per verso: lo stesso verso di u se $v_u > 0$; il verso contrario se $v_u < 0$.



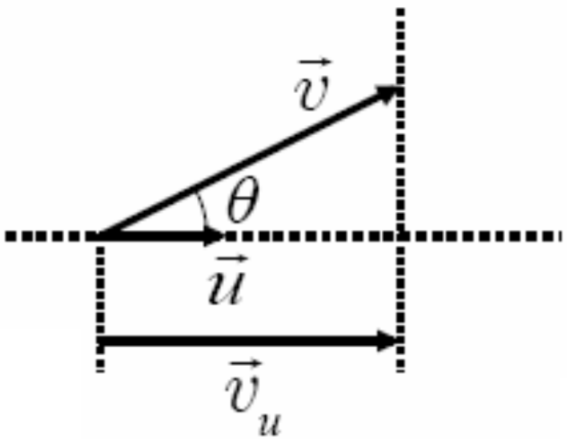
$$\left\|\vec{v}_u\right\| = \left|v_u\right| = \left\|\vec{v}\right\| \left|\cos\theta\right|$$



Proiezione di un vettore lungo un altro vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

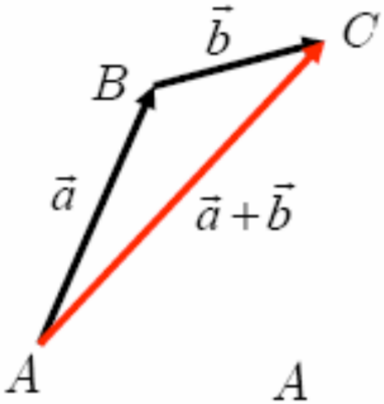
- Si definisce il componente o la componente di un vettore $\vec{v}$ su un altro vettore $\vec{u}$ (o su un versore $\hat{u}$) come il componente o la componente di $\vec{v}$ rispetto alla direzione orientata di $\vec{u}$ o $\hat{u}$.



Disuguaglianza triangolare

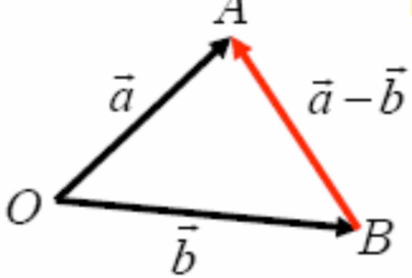
- Il modulo della somma (o della differenza) di due vettori è in generale **diverso** dalla somma (o dalla differenza) dei moduli.

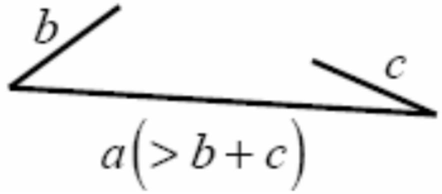
- Per la **disuguaglianza triangolare** si ha:

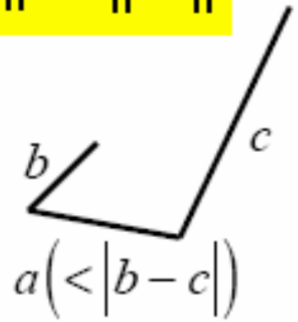


$$\Big|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\Big| \le \|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

$$\Big|\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\Big| \le \|\vec{a}-\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$





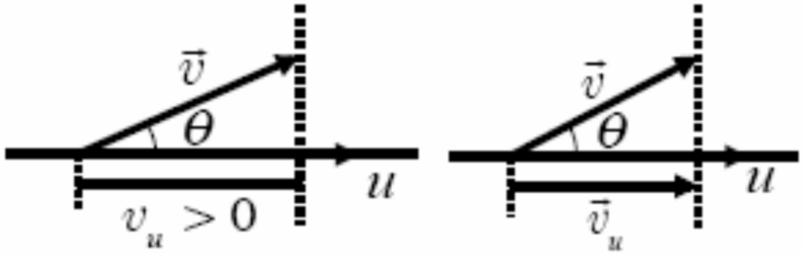


Componente di un vettore della direzione di un versore o di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del versore $\hat{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \vec{v} \bullet \hat{u} \qquad \vec{v}_u = \left(\vec{v} \bullet \hat{u}\right)\hat{u}$$

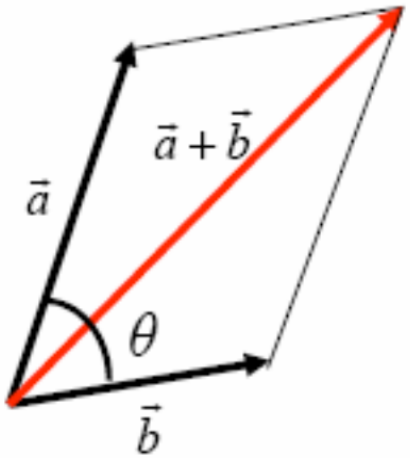


- La componente e il componente di un vettore $\vec{v}$ nella direzione del vettore generico $\vec{u}$ si possono scrivere:

$$v_u = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad \vec{v}_u = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{\left(\vec{v} \bullet \vec{u}\right)\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$$

Modulo della somma o differenza tra vettori

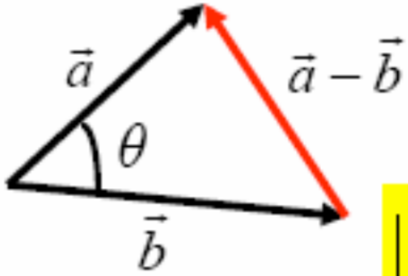
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI



$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}=$$

$$=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}}$$

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$



$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}=$$

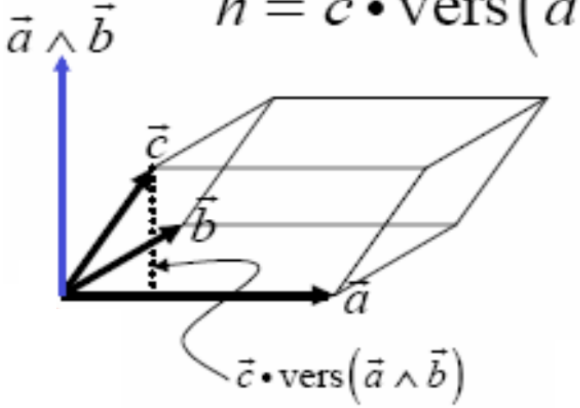
$$=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}-\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}\bullet\vec{b}}$$

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

Doppio prodotto misto

- È dato da: $\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c}$
- È uguale, a meno del segno, al **volume del parallelepipedo** avente per lati $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
- Tale parallelepipedo ha per base e altezza:

$$\left.\begin{aligned} B &= \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \\ h &= \vec{c} \bullet \mathrm{vers}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \underbrace{\left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \mathrm{vers}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)}_{\vec{a} \wedge \vec{b}} \bullet \vec{c}$$



$$V = \left| \vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} \right|$$

Doppio prodotto misto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Il doppio prodotto misto ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \bullet \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \bullet \vec{b}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c}$$

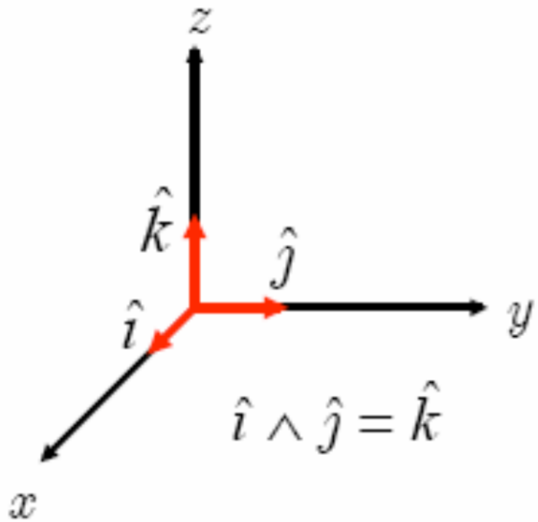
- La prima segue dal fatto che nei 3 casi il volume è il medesimo.
- La seconda si ottiene utilizzando la prima e la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \bullet \vec{a} = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$$

Terna di versori ortogonali

- Prodotti scalari

$$\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}=1,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}=1,\quad \hat{k}\bullet\hat{k}=1$$
$$\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}=0,\quad \hat{\jmath}\bullet\hat{k}=0,\quad \hat{k}\bullet\hat{\imath}=0$$



- Prodotti vettoriali

$$\hat{\imath}\wedge\hat{\imath}=\vec{0},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath}=\vec{0},\quad \hat{k}\wedge\hat{k}=\vec{0}$$
$$\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\wedge\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\wedge\hat{\imath}=\hat{\jmath}$$

Operazioni tra i versori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)+\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x+b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y+b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z+b_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)-\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=\left(a_x-b_x\right)\hat{\imath}+\left(a_y-b_y\right)\hat{\jmath}+\left(a_z-b_z\right)\hat{k}$$

$$\alpha\vec{a}=\alpha\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)=\left(\alpha a_x\right)\hat{\imath}+\left(\alpha a_y\right)\hat{\jmath}+\left(\alpha a_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\bullet\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\imath}}_{1}+a_xb_y\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_xb_z\underbrace{\hat{\imath}\bullet\hat{k}}_{0}+a_yb_x\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_yb_y\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{\jmath}}_{1}+a_yb_z\underbrace{\hat{\jmath}\bullet\hat{k}}_{0}+$$

$$+a_zb_x\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\imath}}_{0}+a_zb_y\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{\jmath}}_{0}+a_zb_z\underbrace{\hat{k}\bullet\hat{k}}_{1}=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$a=\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Operazioni tra i vettori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\wedge\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{\imath}}_{0}+a_xb_y\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}}_{\hat{k}}+a_xb_z\underbrace{\hat{\imath}\wedge\hat{k}}_{-\hat{\jmath}}+a_yb_x\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{\imath}}_{-\hat{k}}+a_yb_y\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath}}_{0}+a_yb_z\underbrace{\hat{\jmath}\wedge\hat{k}}_{\hat{\imath}}+$$

$$+a_zb_x\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}}+a_zb_y\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{\jmath}}_{-\hat{\imath}}+a_zb_z\underbrace{\hat{k}\wedge\hat{k}}_{0}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\imath}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}=\det\begin{Vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{Vmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}\bullet\vec{c}=\left[\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\imath}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}\right]\bullet\left(c_x\hat{\imath}+c_y\hat{\jmath}+c_z\hat{k}\right)=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)c_x+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)c_y+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)c_z=\det\begin{Vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{Vmatrix}$$

Operazioni tra i vettori espresse in forma cartesiana

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Si può anche mostrare che:

$$\begin{cases} \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right)\vec{a} \\ \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c} \end{cases}$$

- Infatti, prendendo, ad esempio la I componente:

$$\left[\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}\right]_x = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_y c_z - \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_z c_y =$$

$$= \left(a_z b_x - a_x b_z\right) c_z - \left(a_x b_y - a_y b_x\right) c_y$$

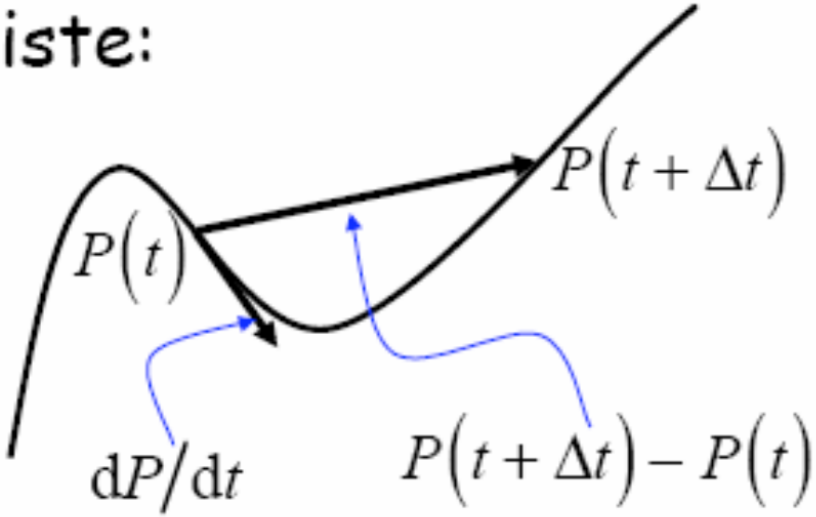
$$\left[\left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right)\vec{a}\right]_x = \left(\cancel{a_x c_x} + a_y c_y + a_z c_z\right) b_x - \left(\cancel{b_x c_x} + b_y c_y + b_z c_z\right) a_x$$

Derivata di un punto

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un punto mobile $P = P(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce derivata del punto P rispetto alla variabile t il limite, se esiste:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$



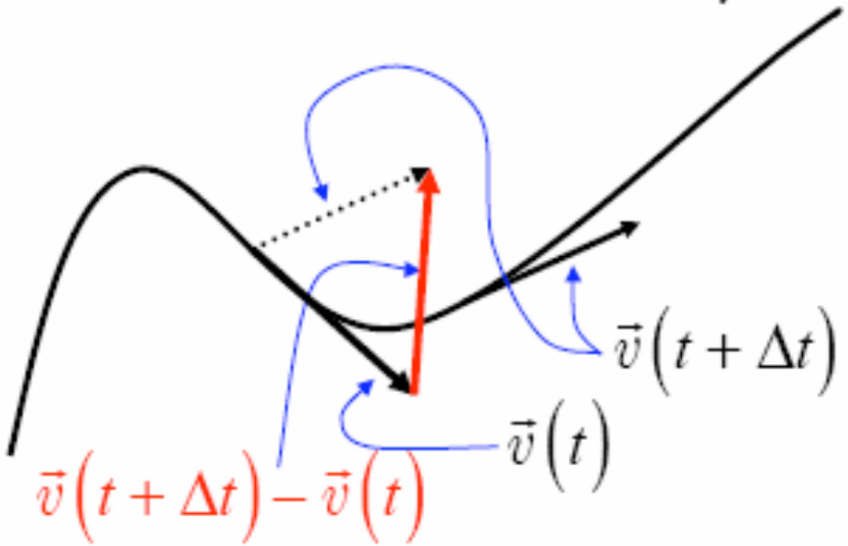
- $P(t+\Delta t) - P(t)$ è un vettore, per cui anche $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ è un vettore.

Derivata di un vettore

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dato un vettore $\vec{v} = \vec{v}(t)$, dove t è un parametro variabile (p. es. il tempo) si definisce derivata del vettore $\vec{v}$ rispetto alla variabile t il limite, se esiste:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



- Poiché $\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ è ancora un vettore, $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ è pure un vettore.

Derivata di un segmento orientato

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La derivata di un segmento orientato $B-A = B(t)-A(t)$ è uguale alla differenza delle derivate dei suoi punti estremi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B-A)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[B(t+\Delta t)-A(t+\Delta t)\right]-\left[B(t)-A(t)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[B(t+\Delta t)-B(t)\right]-\left[A(t+\Delta t)-A(t)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[B(t+\Delta t)-B(t)\right]-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t)-A(t)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

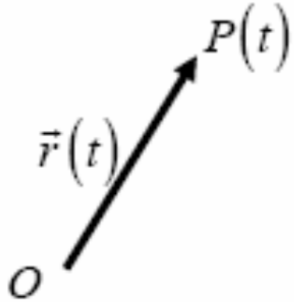
Vettore posizione

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Un caso interessante si ha quando si considera un segmento orientato $P(t)-O$ con un estremo fisso O (detto **vettore posizionale**):

$$\vec{r}(t) = P(t) - O$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(P(t) - O\right) = \frac{dP}{dt}$$



- La **derivata di un punto** è uguale alla **derivata** del suo **vettore posizionale**.

Regole di derivazione dei vettori

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha\vec{a}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{a} + \alpha\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$$