



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Relatività, Energia e Ambiente

Prof. Domenico Galli

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Introduzione alla Relatività Ristretta V parte

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Polo Scolastico "L. Donati" Fossombrone, 4 Maggio 2010



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Quantità di Moto ed Energia

Richiami di dinamica classica.

Introduzione alla Relatività
Ristretta. V parte. 2
Domenico Galli

Quantità di Moto

- Si definisce **quantità di moto** \vec{Q} di un **punto materiale** il prodotto:

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

- Per un **sistema materiale qualsiasi** (costituito da n punti materiali) è invece la somma vettoriale:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

- In particolare, per 2 punti:

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 3
Domenico Galli

Il Secondo Principio

- Un punto materiale, sottoposto a una o più forze, si muove con **accelerazione** \vec{a} , **vettorialmente proporzionale alla risultante** \vec{F} di tali forze:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (m \text{ costante})$$

- dove m è un coefficiente scalare di proporzionalità (detto **massa inerziale**) **caratteristico del punto materiale considerato** e indipendente dalla sua posizione e dalla sua velocità.
- Poiché sperimentalmente \vec{F} e \vec{a} risultano avere sempre lo stesso verso, segue che $m > 0$.
- Se m non fosse costante l'espressione $\vec{F} = m\vec{a}$ non sarebbe corretta.



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 4
Domenico Galli

Il Secondo Principio (II)

- Se la massa m è costante, si ha:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{Q} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m\vec{a}$$

- Per cui il secondo principio della dinamica si può scrivere:

$$\vec{F} = \dot{Q} \quad (\text{II principio - Legge di Newton})$$

- In realtà questa espressione è **più generale** dell'espressione $\vec{F} = m\vec{a}$ e **vale anche nel caso in cui m varia nel tempo**:
 - m potrebbe cambiare in seguito a **reazioni chimiche** (razzo) o **nucleari** o a causa di **effetti relativistici** (velocità molto elevata).

Il Terzo Principio

- Ogni volta che il corpo A esercita una forza sul corpo B , il corpo B esercita una forza sul corpo A

- vettorialmente opposta;
- con la **stessa retta di azione**.

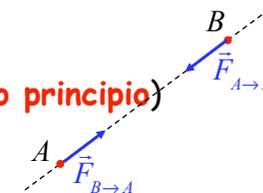
- (**principio di azione e reazione** o **terzo principio**)

- Esempi:

- rinculo di una pistola.
- barca a remi (si muove spingendo indietro l'acqua con i remi).
- autoveicoli (si muovono spingendo indietro la strada mediante la forza di attrito).
- aerei (si muovono spingendo indietro l'aria).

- N.B.: azione e reazione si esercitano sempre su corpi diversi.

- N.B.: Il III principio **non vale per le forze inerziali**.

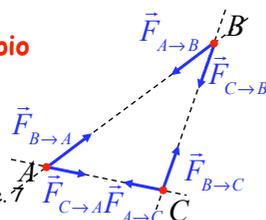


Forze Interne

- Forze interne**: forze di interazione esercitate da una parte del sistema meccanico in studio su di un'altra parte dello stesso sistema.
- Per il **III principio** esse sono a due a due opposte, con la medesima retta d'azione.
- Costituiscono, a due a due, **coppie di braccio nullo**. Segue per la risultante e il momento risultante delle forze interne:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(i)} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(O)}^{(i)} = \vec{0} \quad \forall O \end{cases}$$

(equivalente al **III principio della dinamica**)



Forze Esterne

- Quanto detto **non vale per le forze esterne**.
 - Alcune forze esterne possono essere di origine inerziale.
 - Si considerano le forze che corpi esterni esercitano sul nostro sistema ma non le forze che il nostro sistema esercita sui corpi esterni.
- Se la risultante e il momento risultante delle forze esterne sono entrambi nulli, si dice che il **sistema è isolato**.

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e)} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(O)}^{(e)} = \vec{0} \quad \forall O \end{cases} \quad (\text{ sistema isolato })$$

- Non sempre, tuttavia, i sistemi sono isolati.

Prima Equazione Cardinale della Dinamica

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad \text{Quantità di moto}$$

- Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

- Infine sfruttando il II principio si ha:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{\mathcal{R}}$$

Prima Equazione Cardinale della Dinamica (II)

- Separando le forze esterne dalle forze interne:

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}^{(i)} + \vec{\mathcal{R}}^{(e)} = \vec{\mathcal{R}}^{(e)}$$

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{\mathcal{R}}^{(e)}$$

(prima equazione cardinale della dinamica)

- Se la **risultante delle forze esterne è nulla**, si **conserva** (cioè rimane costante nel tempo) la **quantità di moto**:

$$\vec{\mathcal{R}}^{(e)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} \equiv \text{cost}$$

(principio di conservazione della quantità di moto)

Lavoro ed Energia

- I **principi della dinamica** sono **sufficienti** per determinare il moto di un sistema meccanico.
- Tuttavia risulta conveniente l'introduzione di **nuove grandezze fisiche** (lavoro ed energia) in quanto:
 - semplificano la soluzione di molti problemi dinamici.
 - Spesso si può determinare lo stato finale di un sistema senza bisogno di risolvere equazioni del moto (p. es.: problemi d'urto).
 - consentono di estendere la nostra comprensione fisica ad ambiti più ampi (termodinamica, meccanica relativistica, ecc.).
- Intuitivamente si può dire che l'**energia** è la **capacità di produrre lavoro** e che il **lavoro** è il **processo attraverso il quale una certa quantità di energia si trasferisce da un corpo a un altro**.

(definizione intuitiva ma autoreferenziale).

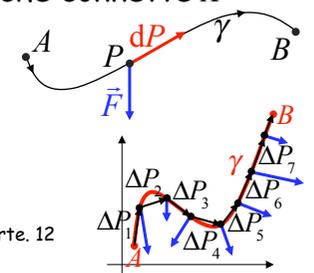
Lavoro

- Si definisce **lavoro infinitesimo** dL compiuto da una forza \vec{F} il **prodotto scalare**:

$$dL = \vec{F} \cdot dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ dP = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{cases}$$
 dove dP è lo **spostamento** infinitesimo del **punto di applicazione** della forza.
- Il **lavoro** $L_{\gamma(A,B)}$ di una forza \vec{F} il cui punto di applicazione si sposta lungo la linea γ che connette A con B è l'integrale di linea:

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot dP$$



Teorema delle Forze Vive

- Consideriamo un punto materiale P , di massa m , soggetto alla forza \vec{F} .

$$\begin{aligned} \delta L &= \vec{F} \cdot dP = m \vec{a} \cdot dP = m \vec{a} \cdot \frac{dP}{dt} dt = \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} dt \end{aligned}$$

- Se le masse sono costanti (approssimazione non relativistica):

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

Teorema delle forze vive (II)

- Definita l'**energia cinetica**:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

si ha:

$$\delta L = \frac{dT}{dt} dt$$

$$L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \delta L = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dT}{dt} dt = [T(t)]_{t_A}^{t_B} = T(t_B) - T(t_A) = T_B - T_A$$

$$L_{\gamma(A,B)} = T_B - T_A \quad (\text{teorema delle forze vive})$$

- Il **lavoro** compiuto da **tutte le forze** che agiscono su di un sistema meccanico, nel passaggio da una configurazione A a una configurazione B è **uguale** alla corrispondente **variazione dell'energia cinetica** di tale sistema.

Forze Conservative

- Alcune forze **posizionali** (cioè che dipendono soltanto dalla posizione) hanno la caratteristica di essere **conservative**.
- Il **lavoro di una forza conservativa non dipende dal percorso**, ma soltanto dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale B .
- Per ogni forza conservativa è definita una funzione delle coordinate, detta **Energia Potenziale** $V(x, y, z)$, tale che il lavoro di una forza conservativa è dato da:

$$L_{\gamma(A,B)} = V_A - V_B$$

Forze Conservative (II)

- In un sistema meccanico sottoposto a **vincoli ideali** e a **forze attive conservative**, l'**energia meccanica totale E** si conserva:

$$E = T + V \equiv \text{cost}$$

(**principio di conservazione dell'energia meccanica**)



Quantità di Moto ed Energia

Dinamica relativistica.

Introduzione alla Relatività
Ristretta. V parte. 17
Domenico Galli

La Generalizzazione Relativistica delle Leggi della Meccanica

- **Principio d'inerzia** ereditato dalla meccanica classica:
 - Definisce la classe dei SdR inerziali e ne postula l'esistenza.
- **Covarianza** rispetto alle **trasformazioni di Lorentz**:
 - La nuova legge così soddisferà, automaticamente, il principio di relatività ed il postulato dell'invarianza della velocità della luce.
- Validità del **principio di corrispondenza**:
 - Grandezze e le leggi fisiche, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel limite di velocità piccole rispetto a quella della luce.



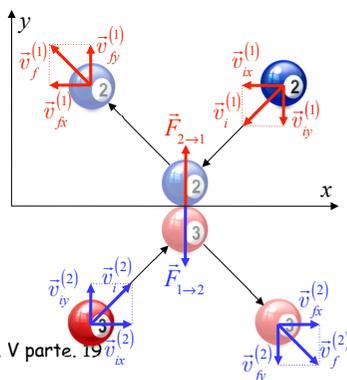
Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 18
Domenico Galli

Conservazione della Quantità di Moto

- Consideriamo l'urto elastico in figura tra due sfere di uguale massa m .
- Consideriamo un SdR S in cui le due sfere abbiano inizialmente velocità opposte:

$$\vec{v}_i^{(1)} = -\vec{v}_i^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{i} + b\hat{j} \\ \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{i} - b\hat{j} \end{cases}$$

- Quando le due sfere urtano, per i loro centri passa una retta parallela all'asse y .
- La forza d'urto F è perciò parallela all'asse y .
- Nell'urto si invertono perciò le componenti y delle velocità, mentre le componenti x restano invariate.



Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 19
Domenico Galli

Conservazione della Quantità di Moto (II)

- In termini matematici:

$$\begin{cases} \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{i} - b\hat{j} & \vec{v}_f^{(1)} = -a\hat{i} + b\hat{j} \\ \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{i} + b\hat{j} & \vec{v}_f^{(2)} = a\hat{i} - b\hat{j} \end{cases}$$

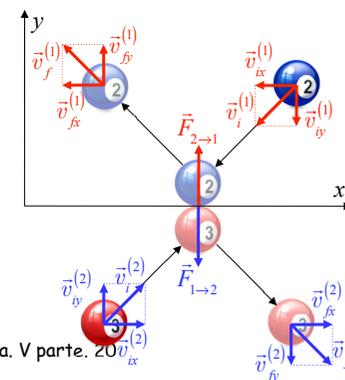
- La quantità di moto totale prima dell'urto è:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_i &= m\vec{v}_i^{(1)} + m\vec{v}_i^{(2)} = \\ &= m[-a\hat{i} - b\hat{j}] + m[a\hat{i} + b\hat{j}] = \vec{0} \end{aligned}$$

- Mentre dopo l'urto è:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_f &= m\vec{v}_f^{(1)} + m\vec{v}_f^{(2)} = \\ &= m[-a\hat{i} + b\hat{j}] + m[a\hat{i} - b\hat{j}] = \vec{0} \end{aligned}$$

- Dunque la quantità di moto **si conserva** nell'urto.

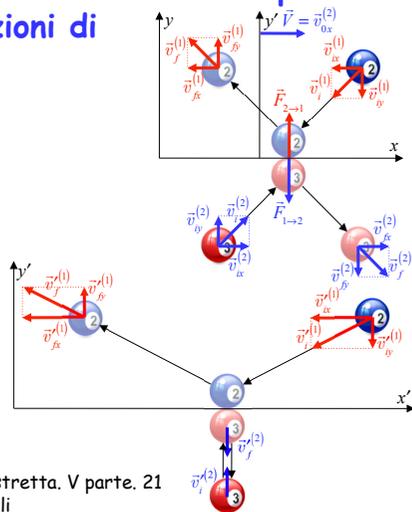


Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 20
Domenico Galli

Trasformazioni di Galileo

- Consideriamo ora lo stesso urto, visto in un **SdR S'** che si muove lungo l'asse x , con **velocità $V = a$** rispetto a S , utilizzando le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} v'_{ix} = v_{ix} - V = -a - a = -2a \\ v'_{iy} = v_{iy} = -b \\ v'_{ix} = v_{ix} - V = a - a = 0 \\ v'_{iy} = v_{iy} = b \\ v'_{fx} = v_{fx} - V = -a - a = -2a \\ v'_{fy} = v_{fy} = b \\ v'_{ix} = v_{ix} - V = a - a = 0 \\ v'_{fy} = v_{fy} = -b \end{cases}$$



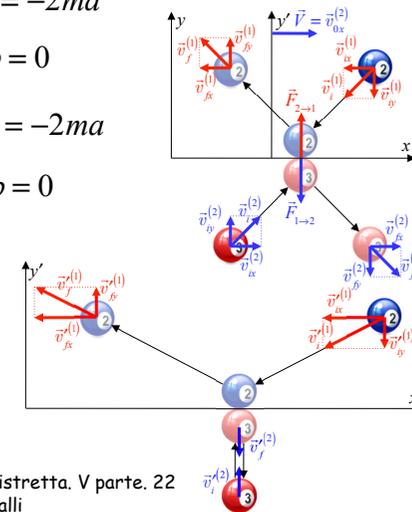
Trasformazioni di Galileo (II)

- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = mv'_{ix} + mv'_{ix} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{iy} = mv'_{iy} + mv'_{iy} = -mb + mb = 0 \\ Q'_{fx} = mv'_{fx} + mv'_{fx} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{fy} = mv'_{fy} + mv'_{fy} = +mb - mb = 0 \end{cases}$$

- Confrontando:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} = Q'_{fy} \end{cases} \Rightarrow \vec{Q}'_i = \vec{Q}'_f$$



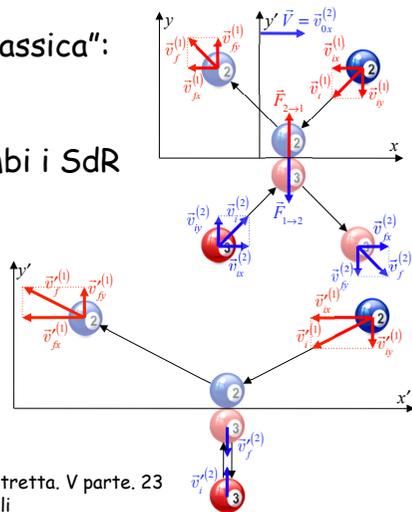
Trasformazioni di Galileo (III)

- La quantità di moto **si conserva** nell'urto anche nel **SdR S'**.

- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

si conserva nell'urto in entrambi i SdR considerati.

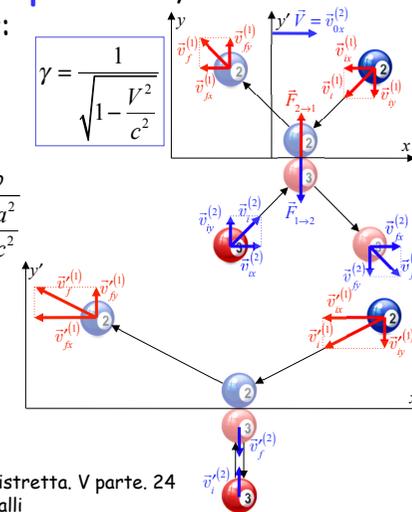


Trasformazioni di Lorentz

- Consideriamo ora lo stesso urto, visto nel **SdR S'** che si muove, con **velocità $V = a$** rispetto a S , utilizzando le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} v'_{ix} = \frac{v_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}} = \frac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'_{iy} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'_{ix} = \frac{v_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}} = \frac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2} a} = 0 \\ v'_{iy} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{ix}} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a}{c^2} a} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

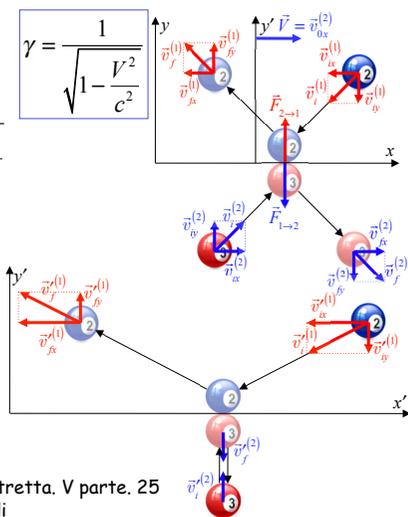


Trasformazioni di Lorentz (II)

- Analogamente, per le velocità finali:

$$\begin{cases} v_{fx}^{(1)} = \frac{v_{fx}^{(1)} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{fx}^{(1)}} = \frac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v_{fy}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{fy}^{(1)}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{fx}^{(1)}} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{fx}^{(2)} = \frac{v_{fx}^{(2)} - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_{fx}^{(2)}} = \frac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2} a} = 0 \\ v_{fy}^{(2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{fy}^{(2)}}{1 - \frac{V}{c^2} v_{fx}^{(2)}} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a}{c^2} a} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$



Trasformazioni di Lorentz (III)

- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} v_{ix}^{(1)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v_{ix}^{(2)} = 0 \\ v_{iy}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v_{iy}^{(2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = \frac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \frac{1}{\gamma} \frac{-mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{\gamma} \frac{mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{ix}^{(1)} = \frac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v_{ix}^{(2)} = 0 \\ v_{iy}^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} & v_{iy}^{(2)} = \frac{1}{\gamma} \frac{-b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = \frac{-2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \frac{1}{\gamma} \frac{mb}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{\gamma} \frac{-mb}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Trasformazioni di Lorentz (IV)

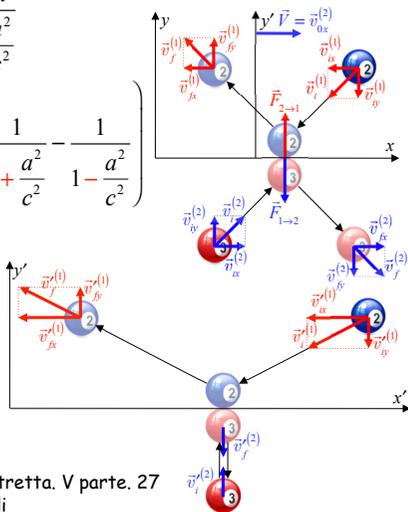
- Da cui:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\frac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \frac{mb}{\gamma} \left(-\frac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\frac{2ma}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \frac{mb}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{a^2}{c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \right) \end{cases}$$

- Perciò:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = Q'_{fx} \\ Q'_{iy} \neq Q'_{fy} \end{cases} \Rightarrow \vec{Q}'_i \neq \vec{Q}'_f$$



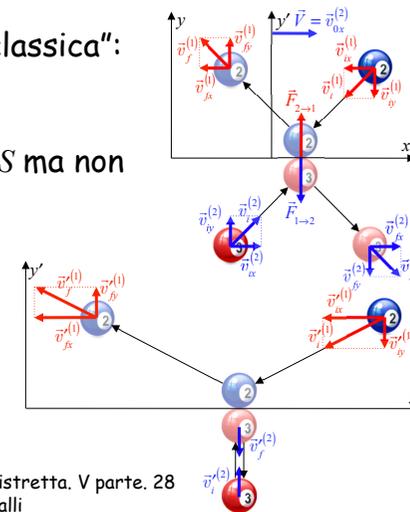
Trasformazioni di Lorentz (V)

- La quantità di moto **non si conserva** nell'urto nel SdR S'.

- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

si conserva nell'urto nel SdR S ma non nel SdR S'.



Quantità di Moto Relativistica

- Cerchiamo allora una **nuova definizione** di quantità di moto che:
 - Sia **invariante per trasformazioni di Lorentz**;
 - Si **riduca all'espressione classica** nel **limite $v \ll c$** (principio di corrispondenza).
- Occorre che la componente y della quantità di moto sia **indipendente** dalla componente x della velocità del SdR in cui si osserva l'urto.

Quantità di Moto Relativistica (II)

- La componente y della quantità di moto classica si scrive, per un singolo punto materiale:
- $$Q_y = mv_y = m \frac{\Delta y}{\Delta t}$$
- Δy **non cambia** passando a un SdR in moto relativo lungo x , mentre **cambia** Δt .
 - Potremmo allora prendere il **tempo proprio** τ invece del tempo t , perché $\Delta \tau$ **non cambia**.

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$Q_y = m \frac{\Delta y}{\Delta \tau} = m \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y = \frac{m v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Quantità di Moto Relativistica (III)

- Definiamo allora la **quantità di moto relativistica**:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

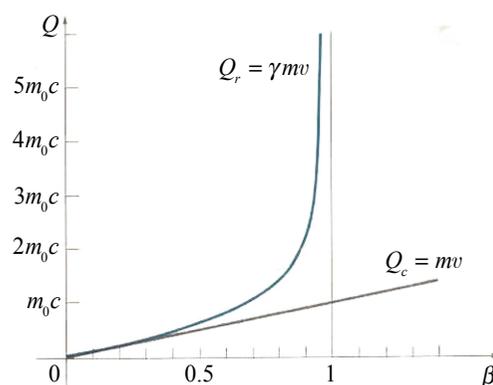
- Poiché

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \ll c} 1$$

si ha:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} \xrightarrow{v \ll c} m \vec{v}$$

- Dunque il principio di **corrispondenza** è soddisfatto.

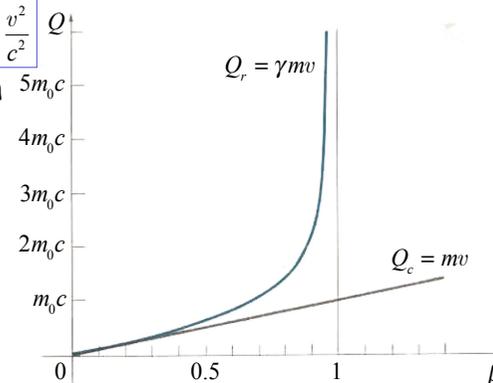


Quantità di Moto Relativistica (IV)

- La **quantità di moto relativistica** così definita:

$$\vec{Q} = \gamma m \vec{v} = mc \gamma \vec{\beta} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

si conserva negli urti in tutti i SdR inerziali.



Massa Relativistica

- Possiamo anche esprimere la quantità di moto relativistica (detta m_0 la "massa classica"):

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

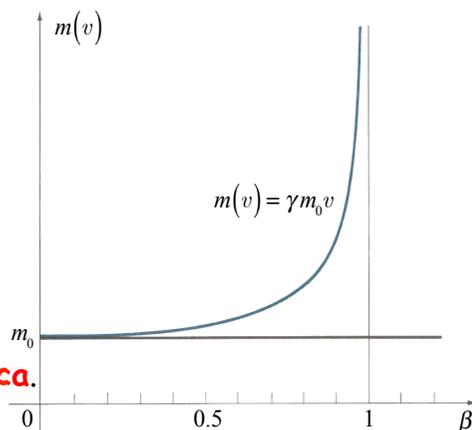
come:

$$\vec{Q} = m(v) \vec{v}$$

dove la quantità:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

è detta **massa relativistica**.



Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 33
Domenico Galli

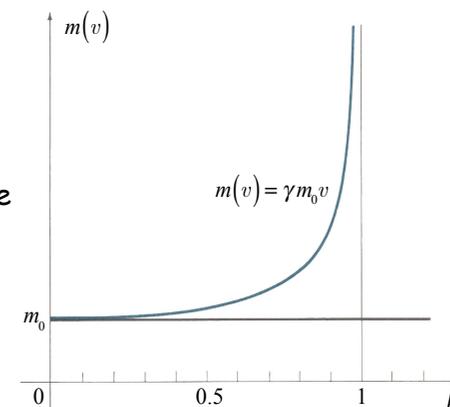
Massa Relativistica (II)

- Nell'espressione della **massa relativistica**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- la "massa classica" m_0 è anche la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

- m_0 è perciò detta **massa a riposo** o **massa invariante**:
 - è invariante per trasformazioni di Lorentz in quanto per definizione è la massa nel SdR in cui il corpo è in quiete.



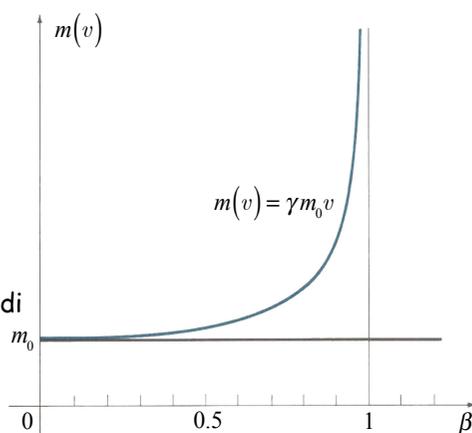
Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 34
Domenico Galli

Massa Relativistica (III)

- **L'aumento relativistico della massa:**

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- è stato verificato in vari esperimenti di deflessione di elettroni;
- è verificato inoltre nel funzionamento di tutti gli **acceleratori di particelle**.



Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 35
Domenico Galli

Energia Relativistica

- Consideriamo l'identità matematica:

$$1 = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

- La quantità $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2$ è un **invariante** per trasformazioni di Lorentz, essendo sempre uguale a 1.
- Moltiplicando la ambo i membri della relazione $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$ per $m_0^2 c^4$ (pure invariante) si ottiene:

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4$$

Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 36
Domenico Galli

Energia Relativistica (II)

- Ricordando che $Q = \gamma m_0 v = m_0 c \gamma \beta$, ovvero:

$$Q^2 = m_0^2 c^2 \gamma^2 \beta^2$$

si ottiene l'invariante:

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 c^4 \beta^2 \gamma^2 = m_0^2 c^4$$

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

- Consideriamo ora nel primo termine la quantità $\gamma m_0 c^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x$$

Energia Relativistica (III)

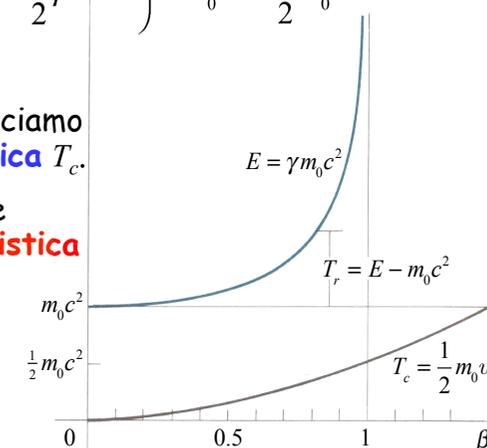
- Nel limite non relativistico $v \ll c$ si ha:

$$\gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

- Nel **II termine** riconosciamo l'**energia cinetica classica** T_c .

- Possiamo allora definire l'**energia totale relativistica** come:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Energia Relativistica (IV)

- Potremo scrivere la precedente identità invariante:

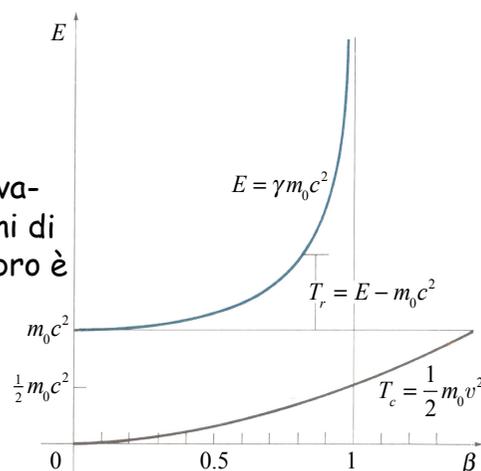
$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

come:

$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

- Essendo il II membro invariante per trasformazioni di Lorentz, anche il I membro è **invariante**:

$$E'^2 - Q'^2 c^2 = E^2 - Q^2 c^2$$



Energia Relativistica (V)

- I 3 termini dell'equazione:

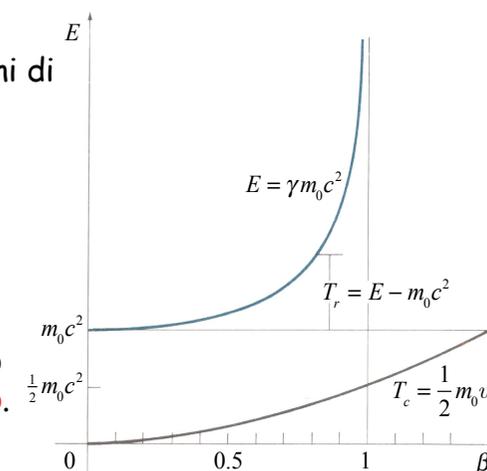
$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

hanno tutti le dimensioni di un'energia al quadrato.

- Il termine:

$$E_0 = m_0 c^2$$

è l'energia che il corpo possiede quando la sua velocità è nulla. È detto perciò **energia a riposo**.



Energia Relativistica (VI)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x$$

- L'**energia cinetica relativistica** si può scrivere come:

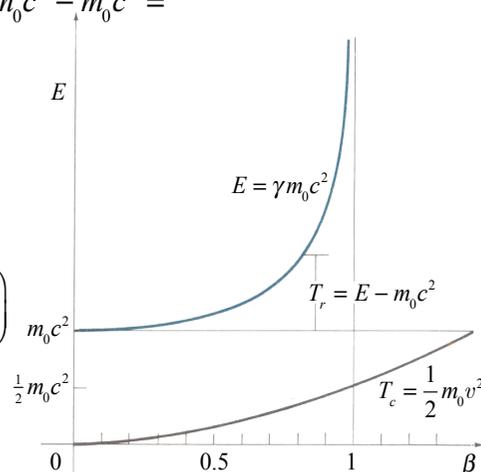
$$T_r = E - E_0 = E - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2$$

- Come abbiamo visto:

$$T_r = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \xrightarrow{v \ll c}$$

$$\xrightarrow{v \ll c} m_0c^2 \left(\lambda + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - \lambda \right)$$

$$T_r \xrightarrow{v \ll c} T_c = \frac{1}{2}m_0v^2$$



Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 41
Domenico Galli

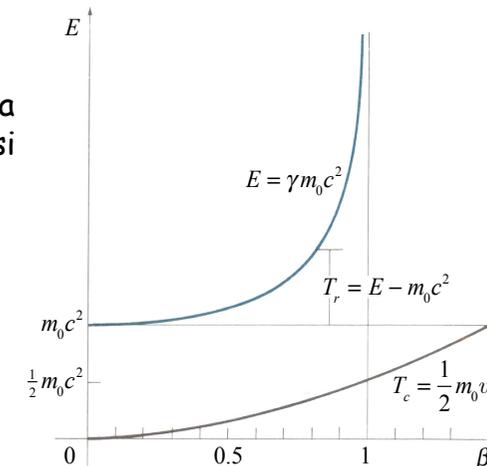
Energia Relativistica (VII)

- Si osservi inoltre che, dalle 2 definizioni:

$$\begin{cases} \vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda e ricavando Q si ottiene:

$$\vec{Q} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$



Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 42
Domenico Galli

Energia Relativistica (VIII)

- Un corpo in **quiete** possiede un'energia **non nulla**:
 - Meccanica classica: l'energia è definita a meno di una **costante additiva arbitraria**.
 - La **relatività fissa** il valore di tale **costante** attribuendole un significato ben definito:
 - quantità di **energia contenuta nella massa** del corpo.
- Una parte dell'**energia a riposo**, o tutta, può **trasformarsi** in energia cinetica o in un'altra forma di energia.
- **Nuova legge di conservazione**.
 - **Generalizza** le due leggi classiche di conservazione:
 - Massa,
 - Energia meccanica.

Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 43
Domenico Galli

Conservazione dell'Energia Relativistica

- Nella **Fisica Classica** l'**energia meccanica** si conserva.
- Nella **Chimica Classica** si conserva la **massa (principio di Lavoisier)**.
- Nella **Fisica Relativistica** massa ed energia meccanica possono **non** conservarsi:
 - È possibile **conversione** di massa in energia o viceversa.
- Tuttavia si conserva la **somma dell'energia meccanica e della massa** (moltiplicata per c^2).

Introduzione alla Relatività Ristretta. V parte. 44
Domenico Galli

Conservazione dell'Energia Relativistica (II)

- Nei processi (relativistici) tra **nuclei** o **particelle** subnucleari le **trasformazioni di massa in energia cinetica** avvengono continuamente:
 - P. es., una particella può decadere in due particelle più leggere (somma masse < massa madre) e più veloci:
 - parte della **massa** della particella madre si è trasformata in **energia cinetica**.
 - Viceversa facendo scontrare 2 protoni ad altissima energia in un acceleratore di particelle si possono **ottenere particelle di massa molto superiore** alla somma delle masse dei 2 protoni:
 - parte dell'**energia cinetica** si è trasformata in **massa**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia

- Vogliamo ora trovare come cambiano quantità di moto ed energia nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
- Abbiamo definito la quantità di moto relativistica come:

$$Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

- Inoltre, dalle definizioni di energia e tempo proprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \Rightarrow E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (II)

- Dalle espressioni:

$$E = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \quad Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

considerando che m_0 , c e $\Delta \tau$ sono **invarianti** per trasformazioni di Lorentz, si vede che le 4 grandezze:

$$\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right)$$

si debbono trasformare, per trasformazioni di Lorentz, come le grandezze:

$$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

- Dunque la quaterna ordinata $\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right)$ è un **quadrivettore** dello spazio di Minkowsky.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (III)

- Dunque dalle trasformazioni delle coordinate troviamo le trasformazioni di energia e quantità di moto:

$$\begin{cases} ct \rightarrow \frac{E}{c} \\ x \rightarrow Q_x \\ y \rightarrow Q_y \\ z \rightarrow Q_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta Q_x \right) \\ Q'_x = \gamma \left(Q_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (IV)

- Avremo in conclusione, per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta Q_x \right) \\ Q'_x = \gamma \left(Q_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{E}{c} = \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta Q'_x \right) \\ Q_x = \gamma \left(Q'_x + \beta \frac{E'}{c} \right) \\ Q_y = Q'_y \\ Q_z = Q'_z \end{cases}$$

Il Secondo Principio della Dinamica

- Detto anche "**legge di Newton**", in **meccanica classica** (essendo m costante) si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- In **meccanica relativistica** occorre considerare che la massa dipende dalla velocità:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

- **Forza e accelerazione non** hanno più la **stessa direzione**.
- La forza ha una componente parallela all'accelerazione e una componente parallela alla velocità.