

Cinematica

Relatività, Energia e Ambiente
Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 2 maggio 2012

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

- La **meccanica** studia i moti dei corpi e le leggi che li governano.
- **Cinematica**: approccio descrittivo. Studio delle grandezze fisiche e dei metodi che servono per descrivere i possibili movimenti di un oggetto, **senza curarsi delle cause** che li determinano.
- **Punto materiale**: è l'oggetto mobile più semplice. Ha **dimensioni trascurabili nel contesto considerato**.
 - P. es.: nel sistema solare la Terra può essere considerata un punto materiale, in quanto ha dimensioni piccole rispetto alle orbite dei pianeti e i suoi moti di rotazione, precessione, ecc. possono essere tralasciati nella descrizione del moto di rivoluzione.

DOMENICO GALLI - Cinematica

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

2

Cinematica (II)

- **Oggetti estesi**: possono essere suddivisi in tante parti, sufficientemente piccole per il dettaglio richiesto, e considerati come **sistemi di punti materiali**.
- **Il moto è relativo**: si può descrivere il moto soltanto quando si è stabilito **rispetto a che cosa** il movimento è valutato.
- **Sistema di Riferimento (SdR)**: sistema di corpi, **in quiete gli uni rispetto agli altri** (distanza reciproca immutata nel tempo), rispetto a cui si descrive il moto.
- **Terna cartesiana di riferimento**: terna cartesiana, fissa rispetto al SdR, utilizzata per descrivere **quantitativamente** il moto.

DOMENICO GALLI - Cinematica

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

3

Principio di Relatività

- **Principio di Relatività**: **Non esiste un SdR privilegiato. Le leggi della Fisica sono uguali in tutti i SdR.**
 - La diafraba tra punto di vista **tolemaico** (geocentrico) e **copernicano** (eliocentrico) è **superata** nella fisica moderna:
 - I due punti di vista **non sono in antitesi** (è altrettanto corretto dire che la Terra si muove rispetto al Sole o che il Sole si muove rispetto alla Terra).
 - La **descrizione copernicana è più semplice ma non più "vera"**: con opportuni strumenti di calcolo si può pure descrivere il moto dei pianeti nel SdR terrestre.

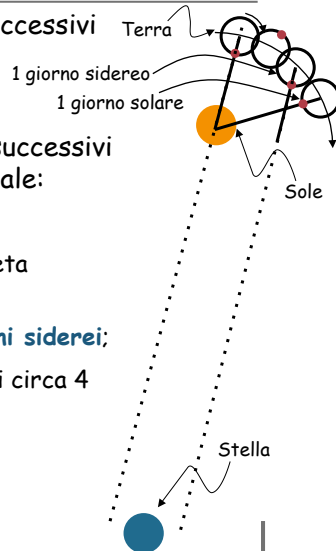
DOMENICO GALLI - Cinematica

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

4

- Principio di Relatività **Ristretta** (o **Speciale**):
 - È limitato ai SdR **inerziali**.
 - Se si sceglie un SdR rispetto al quale le leggi della fisica sono scritte nella forma più semplice (SdR **inerziale**) allora le stesse leggi valgono in **qualunque** altro SdR in moto di **traslazione rettilinea** e **uniforme** rispetto a quello dato.
- Principio di Relatività **Generale**:
 - Include anche i SdR **non inerziali**.
 - **Tutti i SdR** sono equivalenti per la formulazione delle leggi fondamentali della fisica.

- **Giorno solare**: intervallo di tempo tra due successivi passaggi del **Sole** dal meridiano locale:
 - Istante in cui il Sole è più alto sull'orizzonte.
- **Giorno sidereo**: intervallo di tempo tra due successivi passaggi di una **stella fissa** dal meridiano locale:
 - Istante in cui la stella è più alta sull'orizzonte.
- In un anno la Terra compie una **rivoluzione** completa attorno al Sole.
 - **In un anno 1 giorno solare in meno dei giorni siderei**;
 - Giorno solare è **più lungo** del giorno sidereo di circa 4 minuti (3' 56'"):
 - Giorno solare: 86400 s;
 - Giorno sidereo: 86164.1 s.



- Per decidere se un punto si muove occorre controllare se la sua posizione cambia col passare del tempo.
- Se si vuole considerare il tempo come **grandezza fisica** occorre darne una **definizione operativa**, ovvero bisogna stabilire qual è il procedimento con cui si misurano gli intervalli di tempo.
- Gli strumenti per la misura del tempo (orologi, cronometri) si basano su di un **fenomeno periodico** (che si ripete continuamente, come il moto di un pendolo). Gli intervalli di tempo tra due successive ripetizioni sono **supposti uguali** e uno qualunque di questi intervalli è assunto come unità di misura.
 - Es.: passaggio del Sole o di una stella dal meridiano locale (**giorno solare** e **giorno sidereo**).
 - Es.: oscillazioni di un pendolo o di un bilanciere collegato a una molla a spirale. Oscillazioni di un quarzo piezoelettrico. Oscillazioni della radiazione elettromagnetica emessa in determinate transizioni atomiche.

- I giorni **siderei** sono di lunghezza uguale tra loro, i giorni **solari** no, a causa del moto della Terra attorno al Sole, che non avviene a velocità costante:
 - Più veloce d'inverno, quando la Terra è più vicina al Sole.
 - Niente a che vedere con la diversa durata del giorno illuminato e della notte.
- Tuttavia, poiché la vita quotidiana è basata sul Sole, si preferì riferire l'unità di tempo al **giorno solare medio** (media calcolata in un anno):
 - **1 s = 1/86400** di giorno solare medio.
- Con il progredire della tecnica degli **orologi atomici** (nata nel 1949) si osservarono **discrepanze** rispetto alla periodicità terrestre:
 - Il **giorno sidereo**, misurato da un orologio atomico, **aumenta di 2 ms in un secolo**.

- **2 possibilità:**

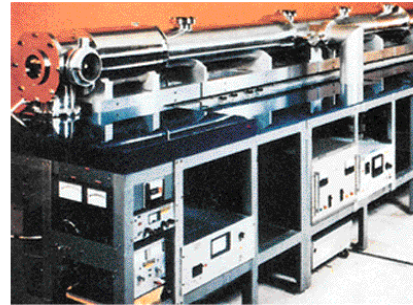
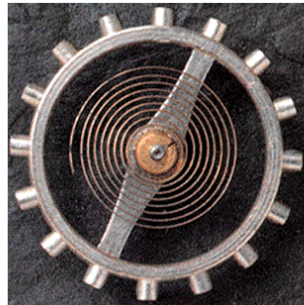
- **"Sbaglia" l'orologio atomico:**

- Improbabile data la stabilità del fenomeno periodico su cui si basa tale orologio.

- **"Sbaglia" la rotazione terrestre:**

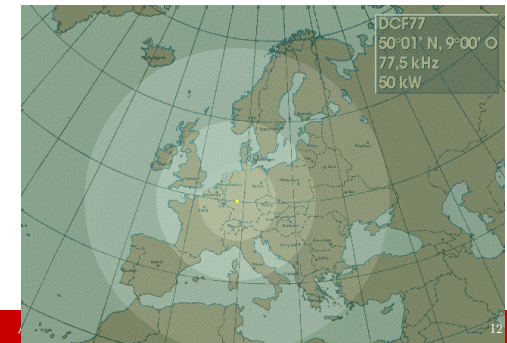
- Possibile.
- Infatti la rotazione della Terra rispetto alla Luna (e al Sole) determina il moto delle **maree**, nel quale una parte piccola ma non del tutto trascurabile dell'**energia di rotazione** della Terra è **trasferita alla massa di acqua** in movimento e quindi **dissipata in calore**.
- In tal modo il moto di rotazione della Terra **rallenta** un poco nel tempo:
 - 2 ms (millisecondi) in un secolo.

- Il secondo fu perciò ridefinito (1960) come una **frazione** di un **anno particolare** (l'anno **1900**).
- Nel 1967 il secondo fu nuovamente ridefinito, come **multiplo del periodo di oscillazione** (9.192.631.770 oscillazioni) della **radiazione elettromagnetica** emessa dagli atomi di **Cesio 133** in una particolare transizione.
 - Transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio 133.
 - La **precisione** di un orologio atomico è circa **una parte su 10^{13}** :
 - Ovvero esso sbaglia al massimo 1 secondo ogni 300 000 anni.



- orologio a pendolo
- bilanciere di un orologio meccanico
- orologio al cesio

- Oggi è possibile avere in casa o al polso un orologio **sincronizzato** con un orologio atomico.
 - Un **orologio atomico**, presso il Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) a Braunschweig, (Berlino-Charlottenburg, Germania) è collegato a un'**antenna radio** situata a Mainflingen, a 24 km da Francoforte;
 - L'antenna trasmette il segnale orario (DCF77) sulla frequenza di 77.5 kHz con una potenza di 50 kW fino a una **distanza di circa 1500-2000 km**.
- L'orologio **ricevitore** è in grado di sincronizzarsi con l'orologio atomico con uno **scarto** di circa **2 ms**.





Breve Storia dell'Unità di Tempo (V)

- È anche possibile sincronizzare gli orologi dei computer **via Internet** con un orologio atomico:
 - Lo scarto tipico di è di alcune decine di millisecondi.
- L'operazione è consentita dal protocollo **NTP (Network Time Protocol)** che si appoggia su **TCP/IP** (lo stack di protocolli utilizzati da Internet):
 - Client NTP sono disponibili in tutte le distribuzioni Linux in MacOS e in Windows.
- Una lista dei time-server pubblici si può trovare all'URL <http://www.ntp.org/>.



Breve Storia dell'Unità di Lunghezza (II)

- Nel 1960 si definì il metro come un **multiplo della lunghezza d'onda** nel vuoto della luce rosso-arancione emessa dal Cripton 86 in una particolare transizione (errore 0.01 μm).
- Nel 1983 si è infine deciso di definire il metro come la **distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo**:
 - In questo modo **si riducono le misure di lunghezza a misure di tempo**.
 - Inoltre si **fissa per convenzione** (per legge giuridica, non fisica) la **velocità della luce nel vuoto a $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$** .



Breve Storia dell'Unità di Lunghezza

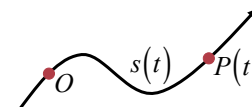
- Il **metro** fu definito nel 1791 dall'Accademia delle Scienze di Parigi, come la **1/40 000 000 parte del meridiano terrestre**:
 - Un **campione concreto** fu realizzato nel 1799 con un **regolo** di platino di sezione rettangolare di lunghezza pari a 1 m alla temperatura di fusione del ghiaccio.
- Si verificarono **discrepanze** tra le due definizioni e nel 1875 fu deciso di **non** riferire il metro alla Terra (che ha **dimensione variabile** in modo non prevedibile per i cambiamenti di forma della superficie terrestre) ma di riferirsi a un **nuovo campione**:
 - Una **sbarra** con sezione a X di platino-iridio (lega 90%-10%) con due tacche alla distanza di 1 m a 0°C (precisione 0.2 μm). Nel 1889 ne vennero costruite 30 copie, poi diffuse per il mondo.



Descrizione Intrinseca del Moto

- Consideriamo un punto materiale che si muove (la sua posizione P si modifica nel tempo: $P = P(t)$) o, in maniera equivalente, il suo vettore posizionale:

$$\vec{r}(t) = \overline{P(t) - O}$$
- **Traiettoria**: linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto.
- Scegliendo sulla traiettoria un'**origine** O e un **verso** di percorrenza, si indica con s la lunghezza dell'arco OP (positiva se P segue O nel verso di percorrenza definito)
- **Legge oraria**: è la funzione $s = s(t)$.
- Da **traiettoria** e **legge oraria** si ha una descrizione **completa** del moto del punto (**descrizione intrinseca**).



- Una descrizione alternativa consiste nell'assegnare le 3 coordinate cartesiane x , y e z del punto P in funzione del tempo (**descrizione cartesiana**).

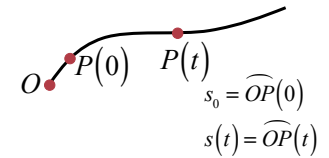
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{(equazioni parametriche con il tempo } t \text{ come parametro)}$$

- Le equazioni parametriche, **se il parametro è il tempo**, forniscono una **descrizione completa** del moto del punto, diversa ma equivalente alla descrizione intrinseca.
- Se si sceglie l'origine degli assi cartesiani nel punto fisso O e si considera il corrispondente vettore posizionale, si ha:

$$\vec{r}(t) = \vec{P}(t) - \vec{O} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

- Moto uniforme**: è il moto di un punto materiale che **percorre archi di traiettoria di uguale lunghezza in intervalli di tempo uguali**.
- La legge oraria si può perciò scrivere soltanto nella forma:

$$s(t) = vt + s_0$$
dove s_0 è il valore di s all'istante $t = 0$ e v è un parametro (costante).
- Se la funzione $s(t)$ non fosse di primo grado in t gli archi di traiettoria percorsi in intervalli di tempo uguali potrebbero non essere uguali.



- La velocità è un concetto introdotto per descrivere la **"rapidità"** con cui un punto materiale si sposta.
- Nel moto uniforme si ha:

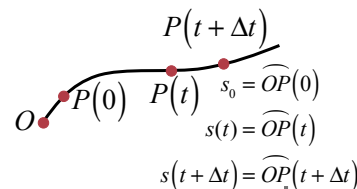
$$s(t) = vt + s_0$$

per cui l'arco di traiettoria percorso nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ è:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = v[t + \Delta t] + s_0 - v t - s_0 = v \Delta t$$

funzione

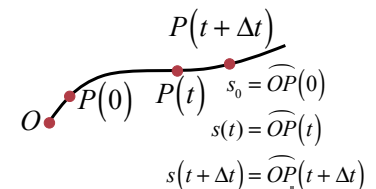
moltiplicazione



- Il **moto** è tanto **più rapido** quanta **più distanza Δs** si percorre **nello stesso intervallo di tempo Δt** .
- Dall'espressione $\Delta s = v \Delta t$ è evidente che il **moto** è tanto **più rapido** quanto **maggiore** è il parametro v .
- Chiamiamo perciò **velocità nel moto uniforme** il parametro v .
- Dall'espressione $\Delta s = v \Delta t$ segue che il parametro v si può esprimere come:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

(**velocità nel moto uniforme**)



- Nel **moto vario** (cioè **non-uniforme**) possiamo definire la **velocità media**:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

tuttavia v_m dipende, oltre che da t , anche da Δt (durante il tempo Δt la velocità può cambiare).

- Introduciamo allora la **velocità istantanea**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

La velocità istantanea è la derivata di s rispetto a t .

- Volendo misurare sperimentalmente la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre precisare operativamente il procedimento di misura, considerando la **sensibilità**, sempre limitata, degli **strumenti di misura**.

- L'intervallo di tempo Δt **non può essere scelto piccolo ad arbitrio**:
 - Se Δt è **più piccolo della sensibilità del cronometro** utilizzato per la misura, la misura di Δt dà risultato nullo.
 - Se Δt è molto piccolo, può anche accadere che lo spostamento Δs sia **inferiore alla sensibilità dello strumento di misura della lunghezza**. Di conseguenza la misura di Δs dà risultato nullo.

- Per misurare la velocità istantanea di un punto materiale utilizzando la formula:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

occorre scegliere gli intervalli Δt e Δs in modo che:

- Tali intervalli siano **sufficientemente piccoli** che lo stato di moto in essi non subisca variazioni apprezzabili nel contesto che stiamo considerando (cioè data la precisione di cui abbiamo bisogno).
- Tali intervalli siano **sufficientemente grandi** da **potere essere misurati con gli strumenti di misura di cui disponiamo**.

- La limitazione del concetto di velocità istantanea non è dovuta soltanto nella limitazione della sensibilità degli strumenti di misura.
- I concetti di **velocità istantanea** (derivata dello spostamento rispetto al tempo) e di **traiettoria** (linea geometrica costituita da tutte le posizioni assunte dal punto durante il suo moto) di un punto materiale **hanno senso soltanto se un punto materiale ha una posizione definita in ogni istante di tempo**.
- Lo studio sperimentale del moto delle **particelle atomiche e sub-atomiche** mostra che esse **non hanno una ben definita posizione in un certo istante di tempo**:
 - I concetti di **traiettoria** e di **velocità istantanea perdono significato** nel caso delle particelle atomiche e sub-atomiche.

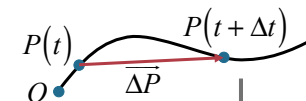
- In particolare, risolvendo le equazioni del moto della meccanica quantistica (equazioni di Heisenberg) si trova che **la misura di una componente della velocità istantanea di un elettrone libero può dare come risultato soltanto $\pm c$** (dove c è la velocità della luce nel vuoto).
- La **velocità osservata** degli elettroni, che è sempre una velocità **media**, è invece **sempre minore di c** .
- Segue che **la velocità istantanea di un elettrone libero non è affatto costante, ma oscilla rapidamente** (con velocità che può avere soltanto i valori $\pm c$) **attorno a un valore medio che è il valore osservato** (zitterbewegung).

- In un **moto curvilineo** la direzione del moto **varia nel tempo**. v contiene informazioni sulla rapidità di spostamento, ma non sulla direzione.
- Si può compendiarne in un'unica grandezza fisica la rapidità del moto e la sua direzione.
- Consideriamo lo spostamento di un punto P in un intervallo Δt , ma invece di misurare lo spostamento lungo la traiettoria, consideriamo lo spostamento **"in linea d'aria"**, ovvero il segmento orientato:

$$\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{P(t + \Delta t)} - \overrightarrow{P(t)}$$

- Possiamo ora definire la **velocità media vettoriale**:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{\Delta t} [\overrightarrow{P(t + \Delta t)} - \overrightarrow{P(t)}]$$



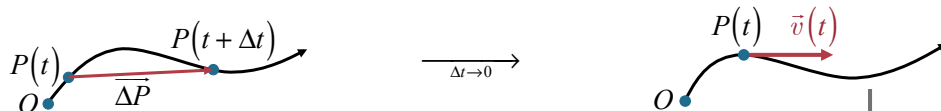
- Essa ha la stessa direzione dello spostamento e modulo tanto più grande quanto maggiore lo spostamento ("in linea d'aria") compiuto in un intervallo di tempo fissato.

- Si può definire anche la **velocità istantanea vettoriale**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} [\overrightarrow{P(t + \Delta t)} - \overrightarrow{P(t)}] \right\} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\dot{P}}$$

che dunque è la derivata del punto (o del vettore posizionale) rispetto al tempo.

- La direzione di $\vec{v}$ è **tangente alla traiettoria** nel punto $P(t)$:



- Poiché nel limite di un arco infinitesimo, la corda approssima l'arco, si ha:

$$\left\| \overrightarrow{P(t + \Delta t)} - \overrightarrow{P(t)} \right\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} |s(t + \Delta t) - s(t)|$$

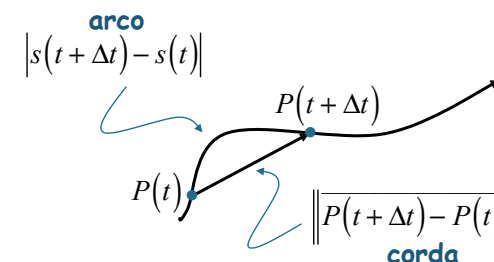
corda **arco**

per cui il modulo della velocità vettoriale è uguale alla velocità scalare prima definita:

$$\|\vec{v}\| = |\dot{s}|$$

Norma della velocità
vettoriale

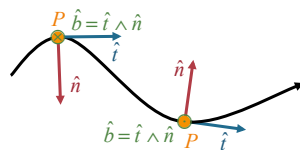
Modulo della velocità
scalare



- Se chiamiamo $\hat{i}$ un **versore tangente** alla traiettoria, col **verso concorde** a quello del **moto**, si ha:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{i}$$

(rappresentazione **intrinseca** della velocità).



- Se deriviamo l'espressione:

$$\overrightarrow{P-O} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

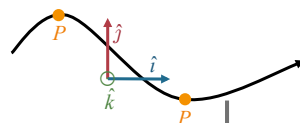
considerando che i versori cartesiani sono costanti:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

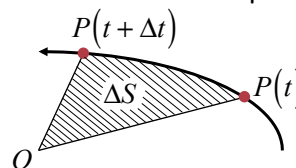
(rappresentazione **cartesiana** della velocità).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \dot{f}(x)g(x) + f(x)\dot{g}(x) \\ \frac{d}{dt}[x\hat{i}] &= \dot{x}\hat{i} + x\dot{\hat{i}} = \dot{x}\hat{i} \end{aligned}$$

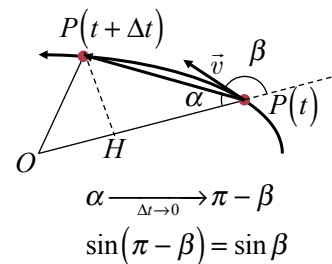
$\hat{i}$ costante



- Si definisce **velocità areolare** l'area spazzata dal vettore posizionale nell'unità di tempo:



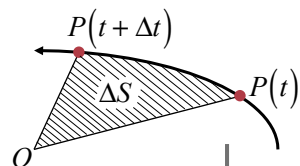
$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ \Delta S &\approx \frac{1}{2} \underbrace{\|P(t) - O\|}_{\text{base}} \underbrace{\|P(t+\Delta t) - P(t)\|}_{\text{altezza}} = \\ &= \frac{1}{2} \|P(t) - O\| \|P(t+\Delta t) - P(t)\| |\sin \alpha| \\ A &\approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \|P(t) - O\| \left\| \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| |\sin \alpha| \right] = \\ &= \frac{1}{2} \|P(t) - O\| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right\| |\sin(\pi - \beta)| = \\ &= \frac{1}{2} \|P - O\| v |\sin \beta| \end{aligned}$$



- Possiamo definire la velocità areolare come **vettore**:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{P-O}) \wedge \vec{v}$$

- In tal caso essa risulta perpendicolare al piano del moto.
- La velocità areolare è pari alla **metà** del **momento della velocità** rispetto al centro di riduzione O .



- Rappresenta quantitativamente la **rapidità con cui varia la velocità di un punto**.
- Possiamo quindi definire **accelerazione media** il rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

e **accelerazione istantanea** il limite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

- In simboli:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{P}} = \frac{d^2 \vec{P}}{dt^2}$$

- Derivando rispetto al tempo l'espressione:

$$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$$

- Si ottiene (derivata di un prodotto di funzioni):

$$\vec{a} = \dot{s}\hat{t} + s\dot{\hat{t}}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \dot{f}(x)g(x) + f(x)\dot{g}(x)$$

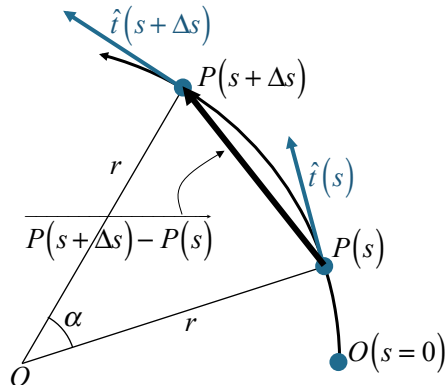
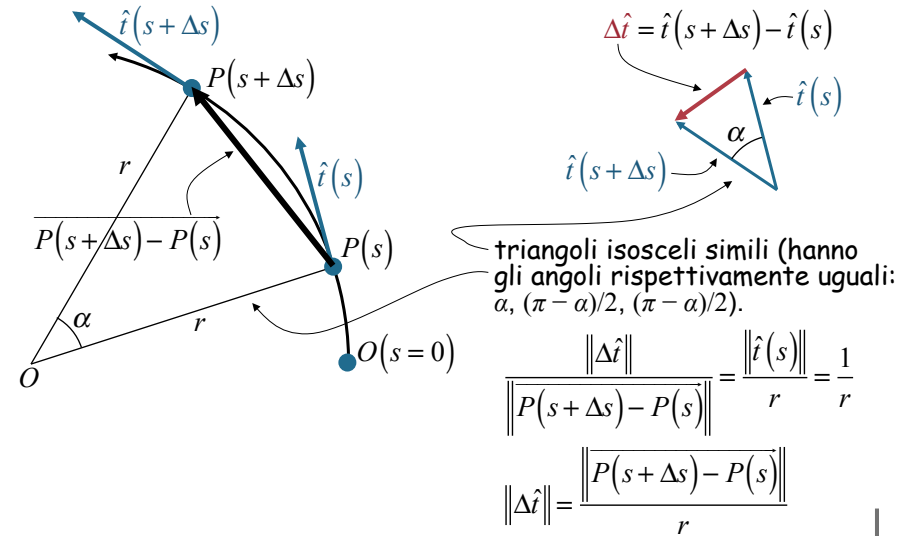
- Dobbiamo valutare $\dot{\hat{t}}$, che si può anche scrivere nella forma:

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \dot{s}$$

N.B.: $\begin{cases} t = \text{tempo} \\ \hat{t} = \text{versore tangente alla traiettoria} \end{cases}$

- Consideriamo **inizialmente** una **traiettoria circolare** e cerchiamo di determinare:

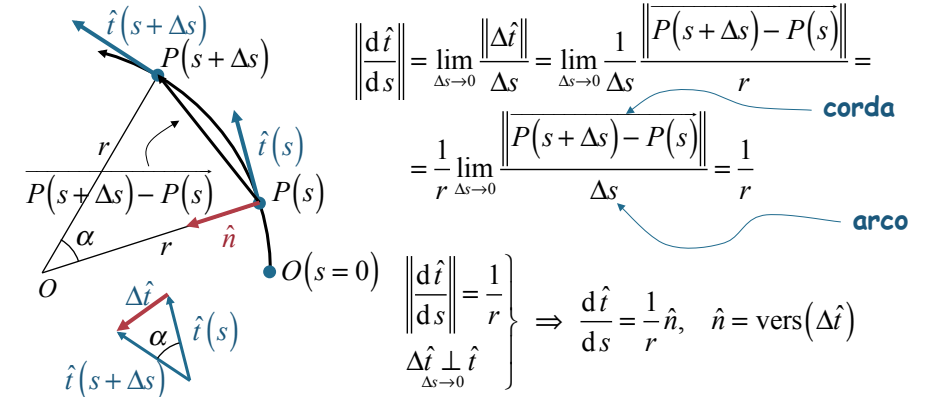
$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$



$$\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

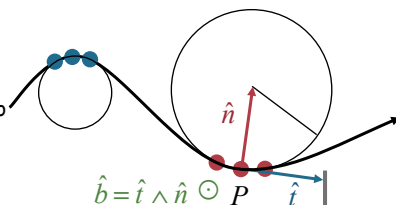
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \hat{t} \perp \hat{t}$$

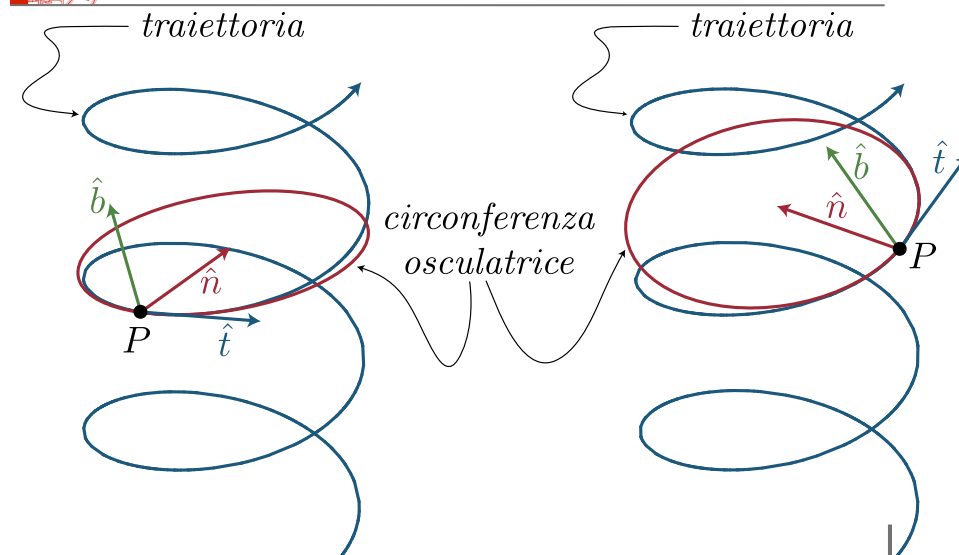


- Dove $\hat{n}$ è il versore radiale **centripeto**, detto **normale** alla traiettoria.
- Vogliamo ora passare da una traiettoria **circolare** a una traiettoria **curvilinea qualunque**.

- Si può passare da una traiettoria circolare a una **traiettoria generica** approssimandone ogni tratto infinitesimo con un arco di circonferenza.
- La geometria analitica dimostra che in generale questo arco infinitesimo esiste:
 - Fa parte di una **circonferenza** detta **osculatrice** alla traiettoria in P ,
 - Giace su di un piano detto **piano osculatore** della traiettoria in P ;
 - Ha un raggio detto **raggio di curvatura** della traiettoria in P .
- Per **individuare** piano osculatore e circonferenza osculatrice:
 - Si prendono **3 punti** sulla traiettoria:
 - Infinitamente vicini ma non coincidenti;
 - Per 3 punti non coincidenti passa un solo piano (piano osculatore) e una sola circonferenza (circonferenza osculatrice).

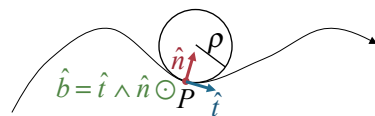


$$\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} \odot P$$



- Dato un punto P su di una **traiettoria curvilinea** γ definiamo **3 versori** che indicano 3 direzioni notevoli:
 - Vettore tangente** $\hat{t}$ il versore tangente alla traiettoria nel punto P .
 - Vettore normale** $\hat{n}$ il versore perpendicolare alla traiettoria con verso centripeto (diretto verso il centro della circonferenza osculatrice).
 - Vettore binormale** $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$ il versore perpendicolare al piano osculatore.
- Indicando con ρ il raggio di curvatura, si ha, per una traiettoria qualunque:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{n}$$



$$\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} \odot P$$

- L'**espressione intrinseca dell'accelerazione** diviene quindi:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

La componente **binormale** dell'accelerazione, ovvero componente in direzione $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$ è sempre nulla.

- Mentre la **velocità** è **sempre tangente** alla traiettoria, l'**accelerazione** possiede una **componente tangenziale** e una **normale**.
 - Se il moto è **rettilineo** ($\rho \rightarrow \infty$) la componente normale si annulla e rimane **soltanto la componente tangenziale**.
 - Se il moto è **uniforme** ($\dot{s}$ costante) la componente tangenziale si annulla e rimane **soltanto la componente normale**.



- Si osservi che, per le grandezze cinematiche **vettoriali** vale:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{P}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{P}$$

mentre per le grandezze cinematiche **scalari non** vale altrettanto:

$$v = \|\vec{v}\| = \dot{s}$$

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\left(\ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho} \hat{n}\right) \cdot \left(\ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2 \frac{1}{\rho} \hat{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}} \neq \ddot{s}$$



- Derivando rispetto al tempo l'espressione cartesiana della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

essendo i versori cartesiani $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ costanti, si ottiene l'espressione cartesiana dell'accelerazione:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \dot{f}(x)g(x) + f(x)\dot{g}(x)$$

$$\frac{d}{dt}[\dot{x}\hat{i}] = \ddot{x}\hat{i} + \dot{x}\dot{\hat{i}} = \ddot{x}\hat{i}$$

$\hat{i}$ costante



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>