

Trasformazioni di Galileo

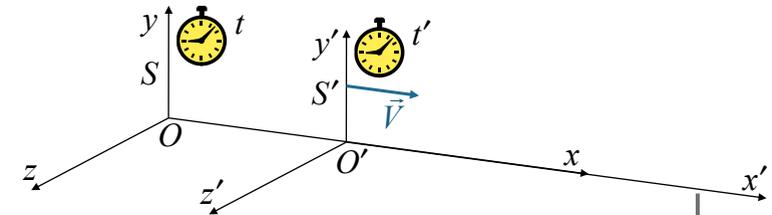
Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 16 maggio 2012

<http://www.fondazioneocchialini.it>

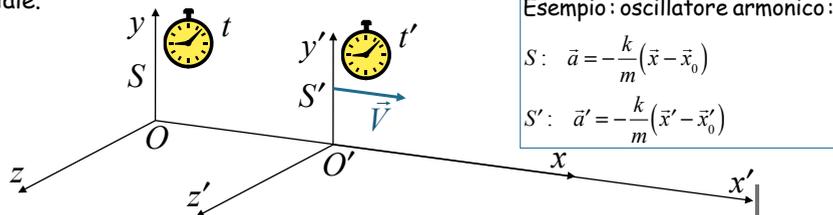
Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

- Se si sceglie un SdR rispetto al quale le leggi della fisica sono scritte nella forma più semplice (SdR **inerziale**) allora le **stesse leggi** valgono in **qualunque** altro SdR in moto di **traslazione rettilinea e uniforme** rispetto a quello dato (Galileo):
 - Nessun esperimento eseguito all'interno di un determinato SdR inerziale potrà mai mettere in evidenza il moto di questo rispetto ad altri SdR inerziali.



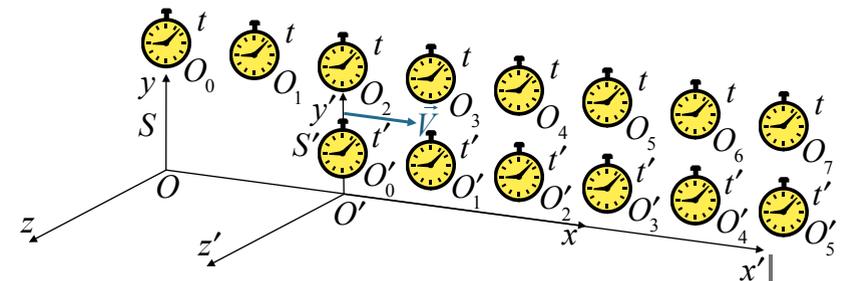
Covarianza delle Leggi Fisiche

- Consideriamo i due SdR $S(x, y, z, t)$ e $S'(x', y', z', t')$, dove il SdR S' si muove rispetto al SdR S con velocità \vec{V} diretta nella direzione dell'asse x .
- Le **coordinate** di uno stesso punto P nei due SdR saranno in generale **diverse**, così come in generale saranno **diverse** le **velocità**.
- Tuttavia le leggi fisiche debbono mantenere **invariata** la **dipendenza funzionale** dalle variabili del moto (posizione, tempo, velocità, accelerazione) indipendentemente dal SdR scelto:
 - **Altrimenti** sarebbe **possibile distinguere** un SdR **inerziale** rispetto a un altro.
- Si dice perciò che le **leggi fisiche** sono **covarianti** per cambiamento di SdR inerziale.



Trasformazioni di Galileo

- Supponiamo di disporre di una **successione di orologi sincronizzati** O_0, O_1, O_2, \dots in quiete nel SdR S e di una analoga successione di orologi sincronizzati O'_0, O'_1, O'_2, \dots in quiete nel SdR S' , in modo da potere effettuare misure di tempo in ogni punto in ciascuno dei 2 SdR.
- Supponiamo inoltre che **le due successioni** di orologi siano **sincronizzate tra loro**.



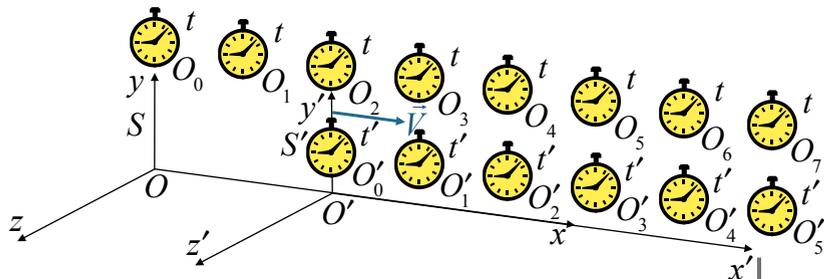
- Supponiamo ora che al **tempo zero**, segnato da entrambe le successioni di orologi, le **origini** dei 2 SdR **coincidano**:

- Dunque al tempo zero coincidano tutti e 3 gli assi cartesiani.

$$O' \equiv O \Leftrightarrow t = t' = 0$$

- A un istante generico $t > 0$ la distanza tra le 2 origini sarà:

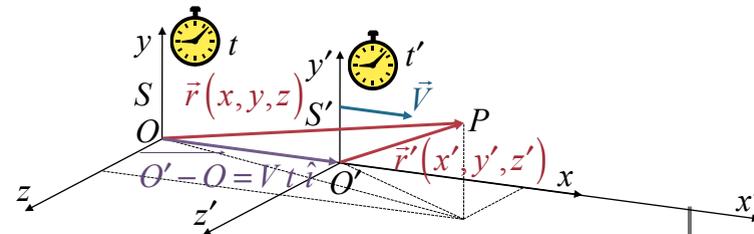
$$\overline{O' - O} = \vec{V}t = Vt \hat{i}$$



- Le **coordinate** di uno stesso punto P nei due SdR saranno in generale **diverse**.
- Come si vede dalla figura, considerando il triangolo $OO'P$ e utilizzando la **regola del triangolo** per la somma dei vettori, si ha:

$$\vec{r} = (\overline{O' - O}) + \vec{r}'$$

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' = Vt \hat{i} + \vec{r}' = Vt' \hat{i} + \vec{r}'$$



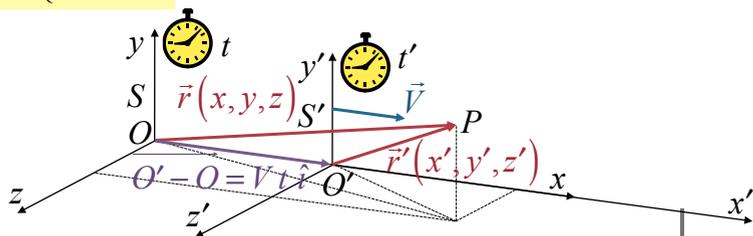
- L'espressione:

$$\vec{r} = Vt' \hat{i} + \vec{r}'$$

si può scrivere per componenti cartesiane:

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

(trasformazioni di Galileo)



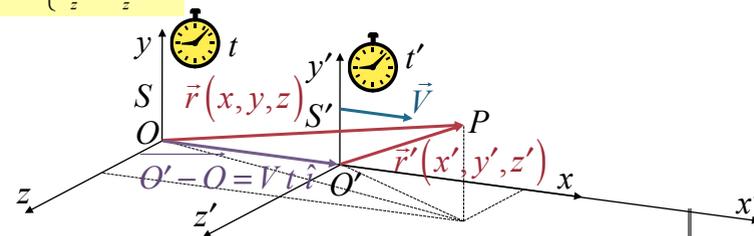
- Per la componente x della velocità si ottiene:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + Vt')}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V \frac{dt'}{dt'} = v'_x + V$$

mentre le altre componenti restano invariate:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

(trasformazioni di Galileo delle velocità)

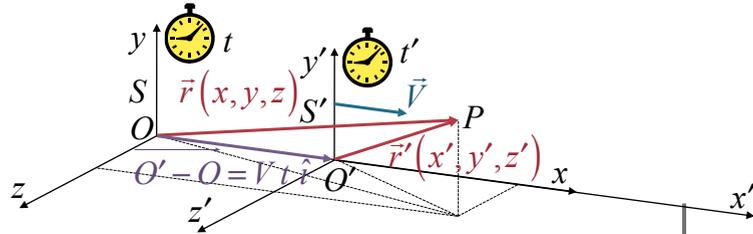


- Per la componente x dell'accelerazione si ottiene:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(v'_x + V)}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt'} + 0 = a'_x$$

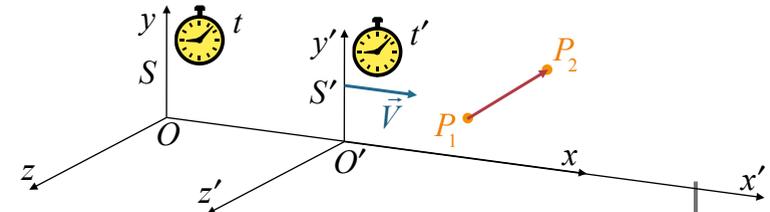
Anche le altre componenti restano invariate:

$$\begin{cases} \vec{a}_x = \vec{a}'_x \\ \vec{a}_y = \vec{a}'_y \\ \vec{a}_z = \vec{a}'_z \end{cases} \quad (\text{trasformazioni di Galileo delle accelerazioni})$$



- Consideriamo i **2 punti** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, in **quiete** nel **SdR S**.
- Il **vettore** $\overline{P_2 - P_1}$, che ha origine nel punto P_1 e vertice nel punto P_2 , nel **SdR S** si scrive:

$$\vec{r}_{12} = \overline{P_2 - P_1} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

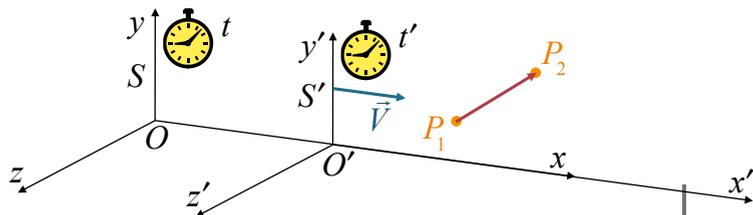


- Lo **stesso vettore** (origine nel punto P_1 e vertice nel punto P_2), nel **SdR S'** si scrive:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{12} &= \overline{P_2 - P_1} = (x'_2 - x'_1)\hat{i} + (y'_2 - y'_1)\hat{j} + (z'_2 - z'_1)\hat{k} = \\ &= [(x_2 - Vt) - (x_1 - Vt)]\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} = \\ &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} = \vec{r}_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

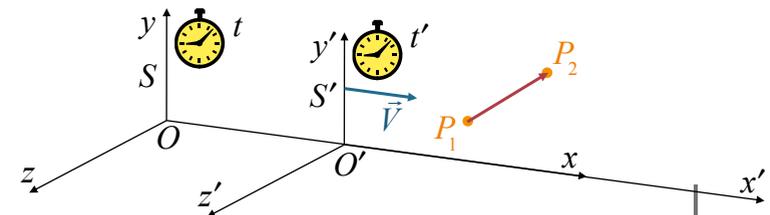
$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12}$$



- Dal risultato:

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12}$$

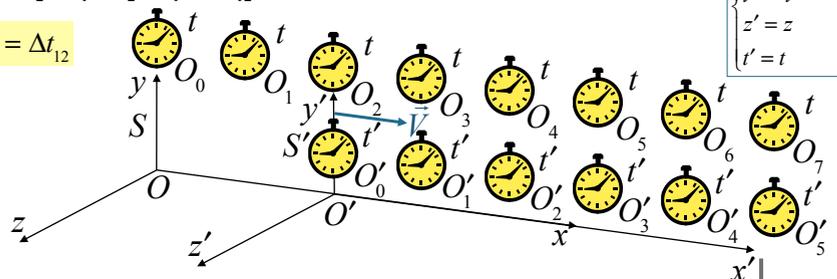
si comprende che, in generale, la **distanza spaziale tra 2 punti non cambia nelle trasformazioni di Galileo.**



- Abbiamo supposto di avere due successioni di orologi sincronizzati nei due SdR e di potere **sincronizzare** e **mantenere sincronizzate tra loro** le due successioni: $t' = t$.
- Segue che il tempo segnato dagli orologi è lo stesso nei due SdR e dunque **l'intervallo di tempo tra due eventi** $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$ è il **medesimo** nei due SdR (nelle trasformazioni di Galileo):

$$\Delta t'_{12} = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t_{12}$$

$$\Delta t'_{12} = \Delta t_{12}$$



$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

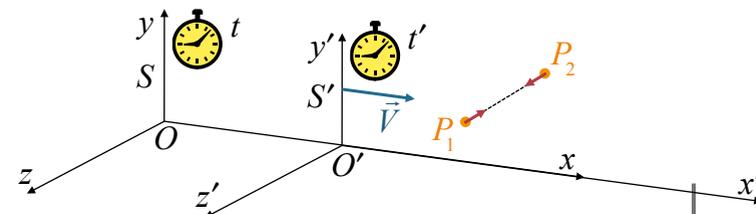
- Attrazione gravitazionale tra due masse m_1 e m_2 , in quiete nel SdR S , nelle posizioni P_1 e P_2 , di coordinate:

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \text{ e } P_2(x_2, y_2, z_2).$$

- Dall'invarianza dell'intervallo spaziale otteniamo:

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}_{12} \Rightarrow \vec{F}'_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2 \vec{r}'_{12}}{r'^2_{12}} = -\gamma \frac{m_1 m_2 \vec{r}_{12}}{r^2_{12}} = \vec{F}_{12} \Rightarrow \vec{F}'_{12} = \vec{F}_{12}$$

- L'intensità della forza di attrazione gravitazionale non cambia passando da un SdR all'altro.

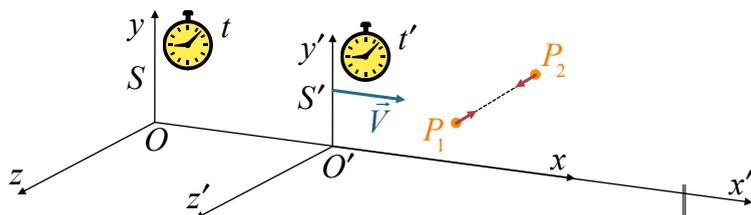


- Si può dimostrare che il risultato che abbiamo trovato per la forza di attrazione gravitazionale:

$$\vec{F}'_{12} = \vec{F}_{12}$$

vale in meccanica per **tutte le forze**.

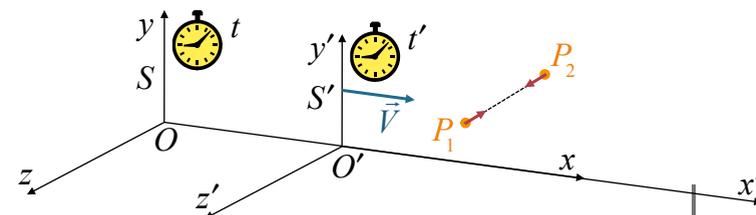
- Le **forze** sono quindi **invarianti** per Trasformazioni di Galileo.



- Abbiamo visto che nelle trasformazioni di Galileo non si modificano né la forza né l'accelerazione.

- Considerando anche che **nella meccanica classica la massa non varia con la velocità**, e dunque è la stessa nei due SdR si ottiene che la forma della legge di Newton (II principio della dinamica) non cambia passando da un SdR inerziale a un altro.

$$\left. \begin{matrix} \vec{a}' = \vec{a} \\ \vec{F}' = \vec{F} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} S \\ S' \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{F}' = m\vec{a}' \end{matrix} \right.$$

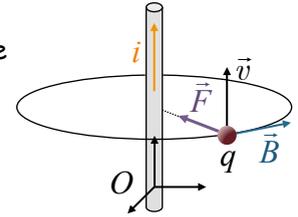


- Una carica elettrica puntiforme, in moto con velocità v , in presenza di un campo elettrico E e di un campo magnetico B , è soggetta alla forza complessiva:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{Forza di Lorentz}}$$

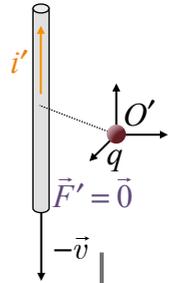
- Come si vede, il secondo termine (detto Forza di Lorentz) **dipende dalla velocità v** e dunque **cambia quando cambia il SdR**.

- Consideriamo un filo rettilineo indefinito **neutro** percorso da una **corrente elettrica costante i** e immaginiamo che una **particella elettricamente carica q** si muova **parallelamente** al filo con una certa velocità \vec{v} .

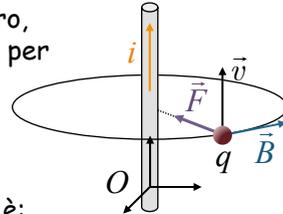


- Analizziamo la **forza agente su q** da due punti di vista:

- Osservatore O , **solidale al filo**, che vede la **particella carica q in moto** con velocità \vec{v} .
- Osservatore O' , **solidale alla particella carica** che vede la **particella carica q immobile**.



- L'**osservatore O** vede il filo elettricamente neutro, percorso da una corrente elettrica di intensità i , per cui non vede campi elettrici ma vede il **campo magnetico** di un filo percorso da una corrente di intensità costante.

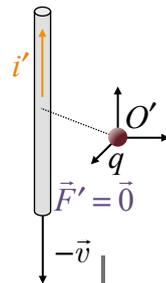


- Per l'osservatore O la **forza agente sulla carica** è:

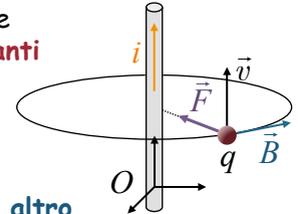
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- L'**osservatore O'** vede anch'esso un **campo magnetico**, dovuto alla corrente i' . Tuttavia, poiché egli vede la particella carica q ferma, tale campo **non produce forza sulla carica**:

$$\vec{F}' = \vec{0}$$



- Come si vede, la Forza di Lorentz in particolare e l'elettromagnetismo in generale **non sono covarianti** per Trasformazioni di Galileo.

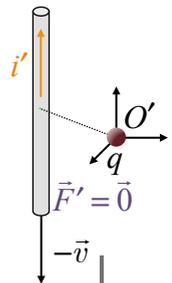


- Questo **consentirebbe, con esperimenti elettromagnetici**, eseguiti all'interno di un SdR inerziale, di **distinguere un SdR inerziale da un altro**.

- I SdR inerziali **non sono tutti equivalenti** rispetto ai fenomeni elettromagnetici:

- Ce n'è uno **privilegiato** nel quale e soltanto nel quale sono valide **contemporaneamente** le leggi della **Meccanica** e quelle dell'**Elettromagnetismo**.

- I fenomeni elettromagnetici permetterebbero quindi di definire un moto uniforme assoluto.





L"“Etere Luminifero”

- Alla fine del XIX secolo, si pensava ancora che dovesse esistere un **mezzo elastico e invisibile** che riempie tutto lo spazio e in cui **si propaga la luce** (detto **“Etere Luminifero”**):
 - **Fluid**o, ma anche così **rigido** da resistere alle più elevate frequenze di radiazione, **privo di massa e di struttura microscopica, incompressibile e non viscoso**.
 - Così come l'**aria** è un mezzo in cui si propagano le **onde acustiche** (che in questo caso sono onde di compressione dell'aria).
 - Poiché la luce si propaga anche nel vuoto si pensava che l'“Etere Luminifero” dovesse **riempire anche il vuoto**.
 - **Oggi** sappiamo che, a differenza delle onde acustiche, le **onde elettromagnetiche** sono **costituite** soltanto da **campi elettromagnetici** e per questo si propagano anche nel vuoto.
- Christiaan Huygens (1629-1695) ancor prima di Newton, introdusse l'idea di “Etere”.
- Maxwell pensò quindi che il **SdR privilegiato** per l'**elettromagnetismo** fosse il **SdR** in cui l'“Etere Luminifero” è in **quiete**.



L"“Etere Luminifero” (II)

- Alla **fine del XIX secolo**, si pensava dunque che:
 - Le **Trasformazioni di Galileo** descrivessero correttamente la trasformazione delle coordinate nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
 - Il **Principio di Relatività** (covarianza delle equazioni della Fisica nel passaggio da un SdR inerziale a un altro) dovesse valere per la **meccanica** ma **non** per l'**elettromagnetismo**.
 - Le **equazioni dell'elettromagnetismo** dovessero valere soltanto nel **SdR** in cui l'“Etere Luminifero” è in **quiete**.



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>

La Crisi della Fisica Classica

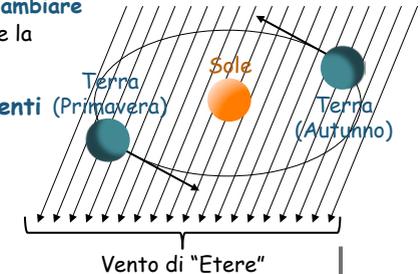
Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 16 maggio 2012

<http://www.fondazioneocchialini.it>

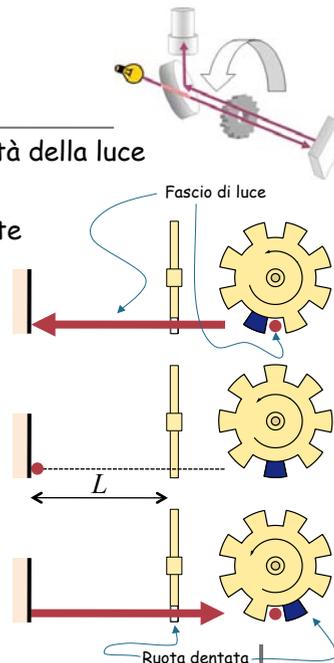
Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

- La Terra si muove, nella sua orbita attorno al Sole, a una velocità di circa **30 km/s** (108000 km/h) **cambiando continuamente direzione** fino a riacquistare la direzione iniziale dopo un anno:
 - Per **paragone**, la velocità di un punto della superficie terrestre dovuta alla **rotazione** della terra attorno al proprio asse è meno di **0.5 km/s** (18000 km/h) all'**equatore**.
- Se esistesse l'“Etere Luminifero”, ci si aspetterebbe un flusso di Etere attorno alla Terra, percepibile come “**vento di Etere**”:
 - La **velocità** del “**vento di Etere**” dovrebbe **cambiare continuamente direzione**, fino a riacquistare la direzione iniziale dopo un anno.
- Misurando la velocità della luce in differenti direzioni** o in **differenti periodi dell'anno**, dovrebbe essere possibile **misurare la velocità della Terra rispetto all'“Etere Luminifero”**.



L'Esperimento di Fizeau

- La prima misura non astronomica della velocità della luce nell'aria fu effettuata da **Fizeau** nel **1849**.
- La misura utilizzava una ruota dentata rotante come interruttore di luce.
 - La luce può andare oltre la ruota dentata soltanto se **non incontra un dente** sul suo percorso.
- La luce attraversa la **ruota dentata**, percorre una **distanza L**, si riflette su di uno **specchio**, percorre nuovamente una **distanza L** e passa nuovamente attraverso la **ruota dentata**.



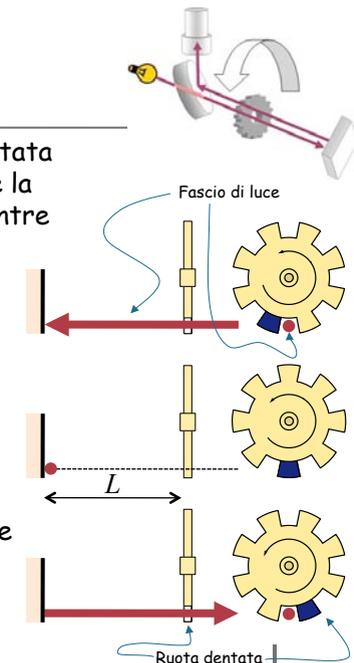
L'Esperimento di Fizeau (II)

- Per potere **passare** attraverso la ruota dentata sia all'**andata** sia al **ritorno** è necessario che la **ruota avanzi esattamente di un dente** mentre la **luce percorre 2 volte la distanza L**.
- Detto n il numero di denti della ruota dentata, e ω la sua velocità angolare, il tempo necessario per l'**avanzamento di un dente** è:

$$t_{\text{dente}} = \frac{2\pi}{n\omega}$$

- Il tempo necessario alla **luce** per percorrere **2 volte la distanza L** è:

$$t_{\text{luce}} = \frac{2L}{c}$$



L'Esperimento di Fizeau (III)

- La **condizione** affinché la **luce passi** 2 volte attraverso la ruota dentata è allora:

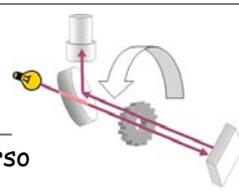
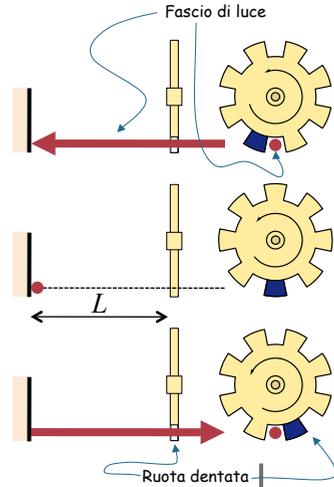
$$t_{\text{dente}} = t_{\text{luce}}$$

$$\frac{2\pi}{n\omega} = \frac{2L}{c}$$

$$c = \frac{n}{\pi} L\omega$$

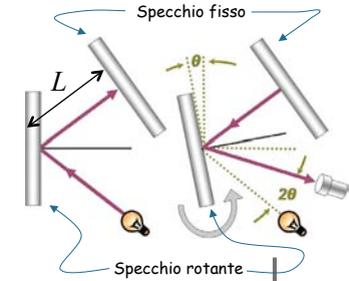
- In questo modo Fizeau misurò, su di una distanza $L = 8633$ m:

$$c = (315.5 \pm 0.5) \times 10^6 \text{ m/s}$$



L'Esperimento di Fizeau-Foucault

- Una successiva misura della velocità della luce fu effettuata da **Foucault** e **Fizeau** nel **1850**.
- L'esperimento utilizzava uno **specchio rotante** invece della ruota dentata.
 - La **luce** si riflette nello **specchio rotante**, percorre la **distanza L** tra i due specchi, si riflette sullo **specchio fisso**, percorre nuovamente la **distanza L** e si riflette nuovamente sullo **specchio rotante**.



L'Esperimento di Fizeau-Foucault (II)

- Il tempo necessario alla luce per percorrere 2 volte la distanza L è:

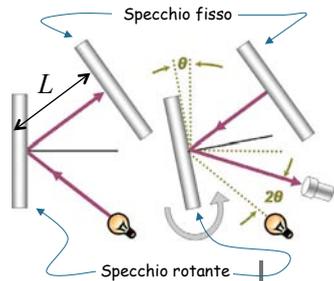
$$t_{\text{luce}} = \frac{2L}{c}$$

- Se lo specchio rotante ruota con velocità angolare ω , nell'**intervallo di tempo** che intercorre tra le **due successive riflessioni** della luce sullo specchio mobile, esso **ruoterà** di un angolo:

$$\theta = \omega t_{\text{luce}} = \frac{2}{c} L\omega$$

- Il **raggio** sarà perciò **deviato** di un angolo:

$$2\theta = \frac{4}{c} L\omega$$



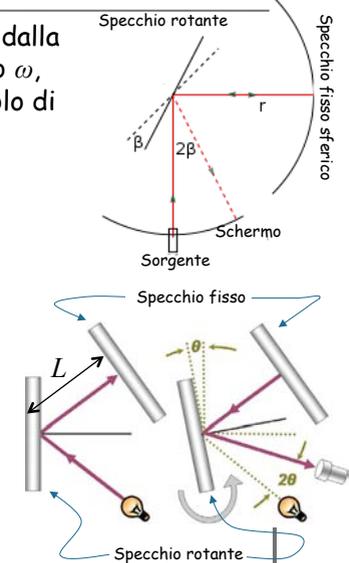
L'Esperimento di Fizeau-Foucault (III)

- La velocità della luce si può quindi ottenere dalla velocità angolare di rotazione dello specchio ω , dalla distanza tra i due specchi L e dall'angolo di deviazione del raggio 2θ :

$$c = \frac{4L\omega}{2\theta}$$

- Con questo apparato Fizeau e Foucault misurarono:

$$c = (298.0 \pm 0.5) \times 10^6 \text{ m/s}$$

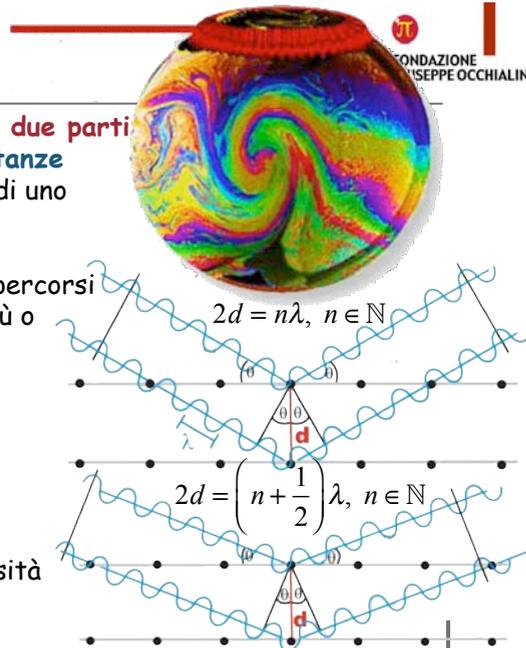


- Un perfezionamento del sistema a specchi rotanti fu usato da **Michelson** nel **1927** su di una distanza di circa **35 km** (tra Monte Wilson e Monte S. Antonio in California).
- Con questo apparato Michelson misurò:

$$c = (299.796 \pm 0.004) \times 10^6 \text{ m/s}$$
- La precisione fu molto superiore alle misure precedenti.
- In misure di precisione così elevata è tuttavia necessario considerare l'indice di rifrazione dell'aria per ottenere la velocità nel vuoto.
- La correzione comunque non è precisa a causa dell'incertezza nei valori della pressione e della temperatura dell'atmosfera.



- La stessa onda viene **divisa in due parti** e le due parti **percorrono distanze diverse** prima di giungere su di uno schermo.
- A causa della differenza dei percorsi le due onde possono essere più o meno in **fase** sullo schermo.
- Se esse sono perfettamente in **fase** l'ampiezza si somma e l'intensità **quadruplica**.
- Se esse sono in **controfase** l'ampiezza si sottrae e l'intensità è **nulla**.

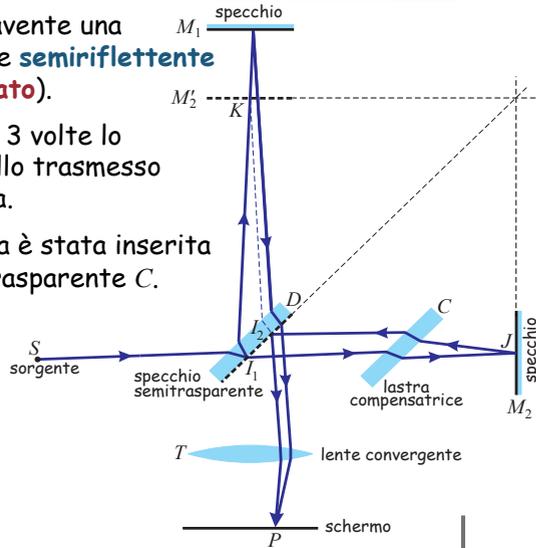


- Prima dell'esperimento di Mount Wilson, Albert Abraham **Michelson** collaborò con Edward **Morley** in un esperimento (**1887**) poi passato alla storia:
 - Non** consente di ottenere una **misura** della **velocità della luce**.
 - Consente di osservare eventuali **effetti** dovuti alla **velocità della superficie terrestre** rispetto all'"**Etere Luminifero**".
 - Supponendo che la **velocità della luce** sia c nel SdR dell'"**Etere Luminifero**" e che si **componga** secondo le **trasformazioni di Galileo** negli altri SdR.
 - Utilizza un **interferometro**, ovvero un dispositivo per realizzare l'interferenza tra onde di luce coerenti.
 - L'eventuale effetto è segnalato da uno **spostamento delle frange** di interferenza.
 - Oggi noto per essere "**il più importante esperimento fallito**".

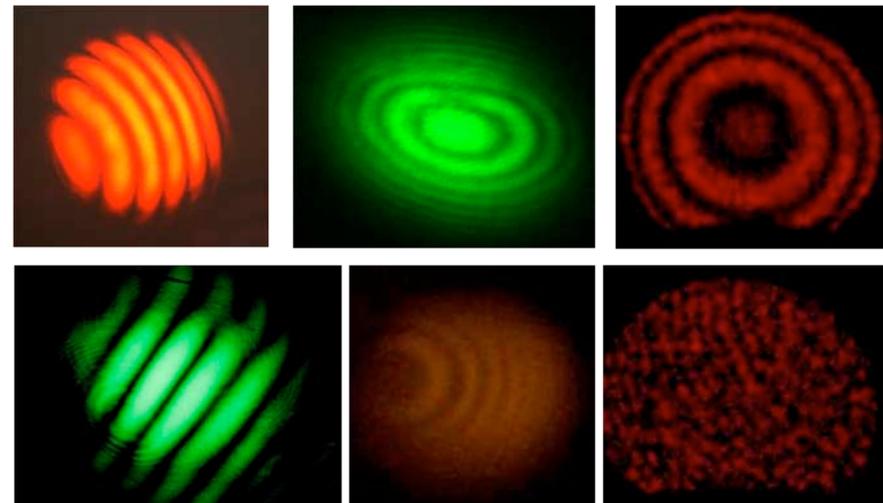
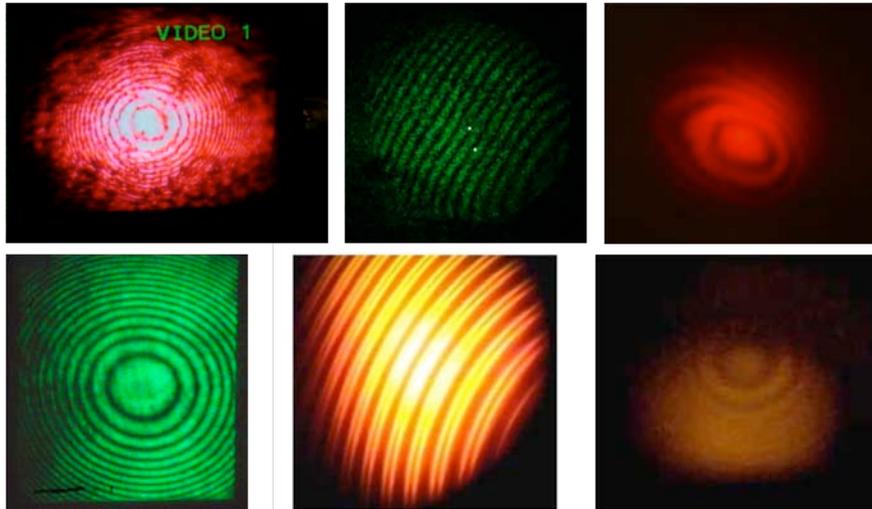
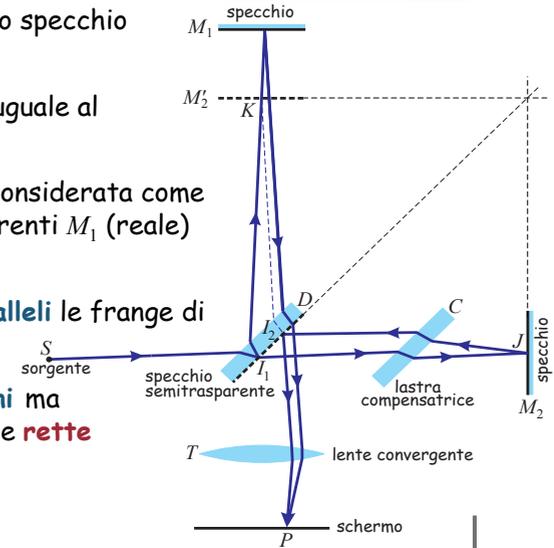
- Un fascio di luce incide su di uno **specchio semitrasparente D** inclinato di 45° , nel punto I_1 .
- Una **parte** della luce **attraversa** lo specchio e procede nella stessa direzione. Il **resto** è **riflessa a 90°** .
- I due raggi così ottenuti incidono perpendicolarmente su **due specchi ordinari** M_1 e M_2 e sono riflessi indietro.
- Entrambi i raggi incidono **nuovamente** sullo **specchio semitrasparente D** e parte di entrambi viene indirizzata su di uno **schermo**, sul quale si osserva la figura di interferenza.

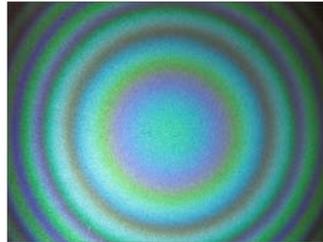
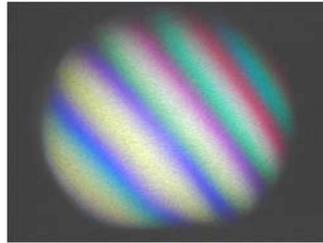


- Utilizza una lastra di vetro avente una superficie **semitrasparente e semiriflettente** (**vetro parzialmente argentato**).
- Il raggio riflesso attraversa 3 volte lo spessore dello specchio, quello trasmesso lo attraversa soltanto 1 volta.
- Per eliminare tale asimmetria è stata inserita una **lamina compensatrice** trasparente C .

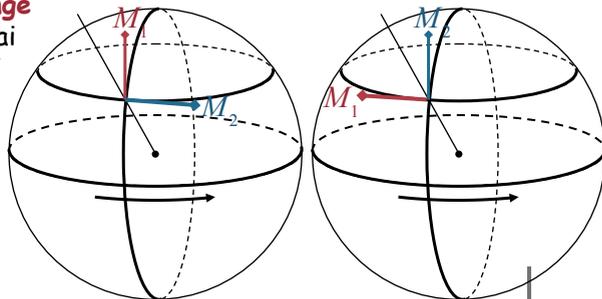


- Sia M'_2 l'immagine di M_2 nello specchio semitrasparente D .
- Il cammino ottico SI_1J_1P è uguale al cammino ottico SI_2KJ_2P .
- L'interferenza può essere considerata come originata dalle sorgenti coerenti M_1 (reale) e M'_2 (virtuale).
- Se i piani M_1 e M'_2 sono **paralleli** le frange di interferenza sono **circolari**.
- Se i piani M_1 e M'_2 sono **vicini ma inclinati**, le frange sono linee **rette equidistanziate**.

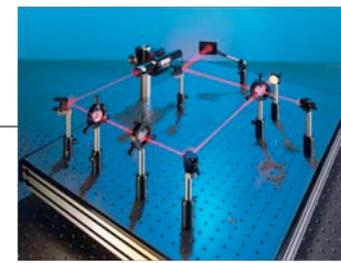




- Idea: **due osservazioni delle frange** di interferenza, con l'interferometro diversamente orientato:
 - Braccio M_1 diretto lungo un **meridiano** e braccio M_2 lungo un **parallelo**.
 - Braccio M_1 diretto lungo un **parallelo** e braccio M_2 lungo un **meridiano**.
- A causa del moto di rotazione della Terra (0.5 km/s all'equatore) rispetto all'"Etere Luminifero", Michelson e Morley **si aspettavano spostamenti delle frange** di interferenza dovuti ai **tempi diversi** impiegati dalla luce a **percorrere i due bracci**.



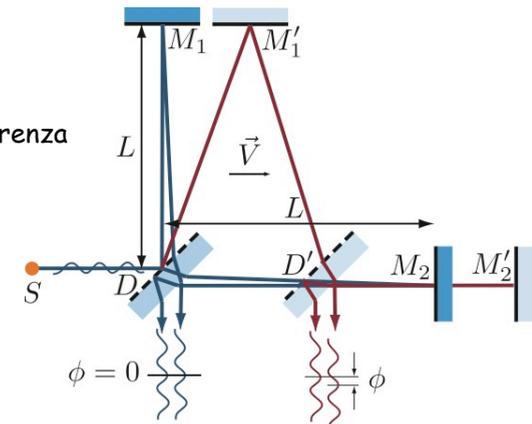
Sotto: l'esperimento italo-francese **VIRGO** è a Cascina (PI, Italia) è un interferometro di Michelson con i bracci lunghi **3 km** per rivelare **onde gravitazionali**.



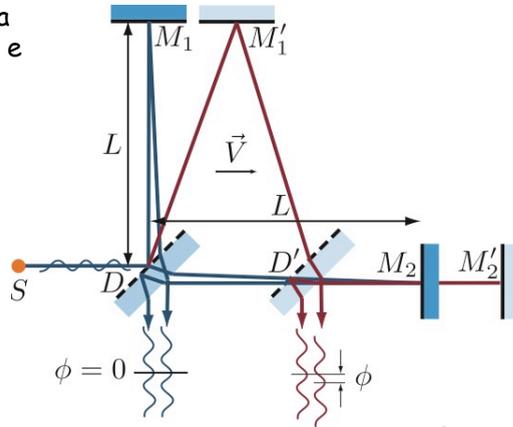
- Se i due **bracci** dell'interferometro hanno **ugual lunghezza L** e l'interferometro è in **quiete** rispetto all' "**Etere Luminifero**" allora il **tempo** impiegato dalla luce a percorrere i 2 bracci (andata e ritorno) è **uguale**:

$$t_1 = t_2 = \frac{2L}{c}$$

per cui sull'asse si ha interferenza costruttiva.



- Se invece l'interferometro è **solidale** alla **superficie terrestre** e l'**asse orizzontale** è diretto **lungo un parallelo**, tale asse si muove con una certa **velocità V** rispetto all'"**Etere Luminifero**".
- Il **tempo** impiegato dalla luce a percorrere i **2 bracci** (andata e ritorno) è **diverso**.



- **Tratto orizzontale (andata), SdR "Etere"**:

- Mentre la luce viaggia da D a M_2 lo specchio si è spostato da M_2 a M_2' .
- La luce deve quindi percorrere il tratto DM_2' , impiegando il tempo t_{2A} :

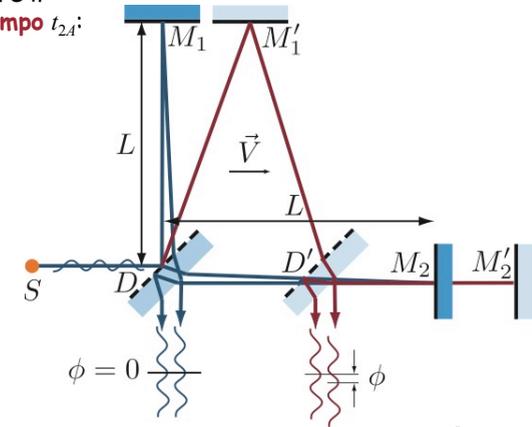
$$\overline{DM_2} = L$$

$$\overline{M_2M_2'} = Vt_{2A}$$

$$\overline{DM_2'} = L + Vt_{2A}$$

$$ct_{2A} = L + Vt_{2A}$$

$$t_{2A} = \frac{L}{c - V}$$



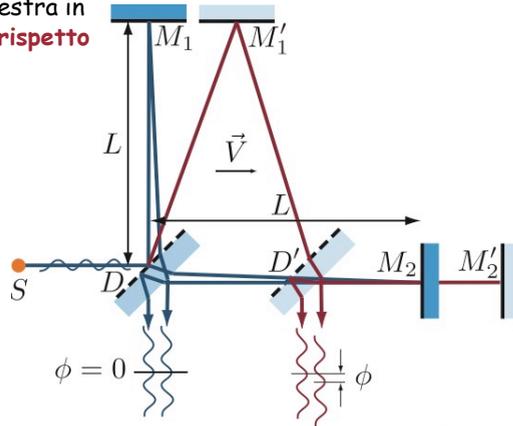
- **Tratto orizzontale (andata), SdR Terra**:

- Poiché la Terra si muove con velocità V lungo il parallelo rispetto all'"Etere" (verso a destra in figura) e la luce si muove con velocità c rispetto all'"Etere" (verso a destra in figura) la **velocità della luce rispetto alla Terra** è:

$$c'_A = c - V$$

- Il **tempo** necessario alla luce per percorrere il tratto DM_2 è perciò:

$$t_{2A} = \frac{\overline{DM_2}}{c'_A} = \frac{L}{c - V}$$



- **Tratto orizzontale (ritorno), SdR "Etere"**:

- Mentre la luce viaggia da M_2' a D lo specchio si è spostato da D a D' .
- La luce deve quindi percorrere il tratto $M_2'D'$, impiegando il tempo t_{2R} :

$$\overline{M_2'D} = L + Vt_{2A}$$

$$\overline{DD'} = V(t_{2A} + t_{2R})$$

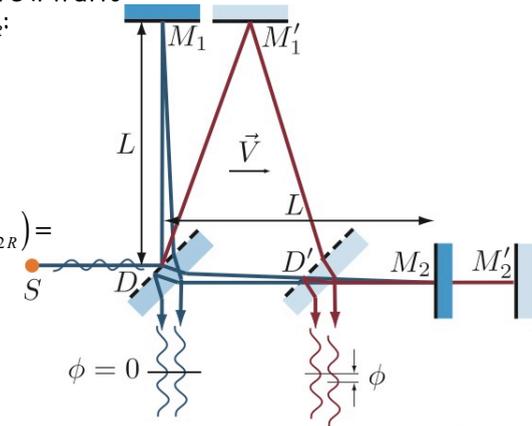
$$\overline{M_2'D'} = \overline{M_2'D} - \overline{DD'} =$$

$$= L + Vt_{2A} - V(t_{2A} + t_{2R}) =$$

$$= L - Vt_{2R}$$

$$ct_{2R} = L - Vt_{2R}$$

$$t_{2R} = \frac{L}{c + V}$$



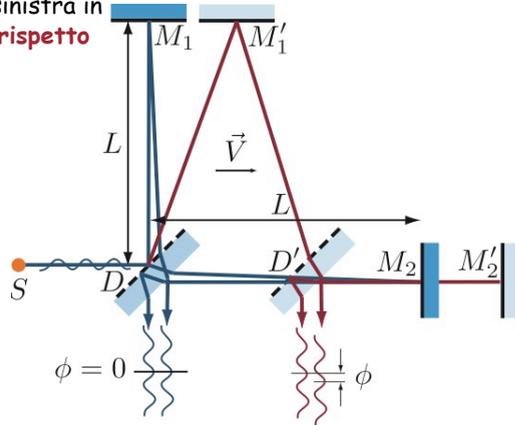
• Tratto orizzontale (ritorno), SdR Terra:

- Poiché la Terra si muove con velocità V lungo il parallelo rispetto all'"Etere" (verso a destra in figura) e la luce si muove con velocità c rispetto all'"Etere" (verso a sinistra in figura) la **velocità della luce rispetto alla Terra** è:

$$c'_R = c + V$$

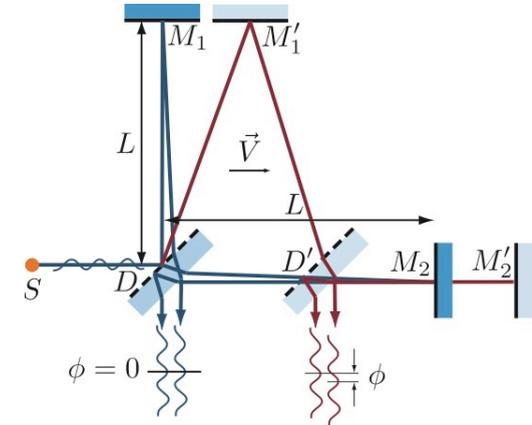
- Il **tempo** necessario alla luce per percorrere il tratto M_2D è perciò:

$$t_{2R} = \frac{\overline{M_2D}}{c'_R} = \frac{L}{c + V}$$



- Il tempo complessivo impiegato dalla luce per percorrere nei due versi (**andata e ritorno**) il braccio **orizzontale** è:

$$\begin{aligned} t_2 &= t_{2A} + t_{2R} = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \\ &= \frac{L(c + V) + L(c - V)}{c^2 - V^2} = \\ &= \frac{2Lc}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{aligned}$$



• Tratto verticale (andata e ritorno), SdR "Etere":

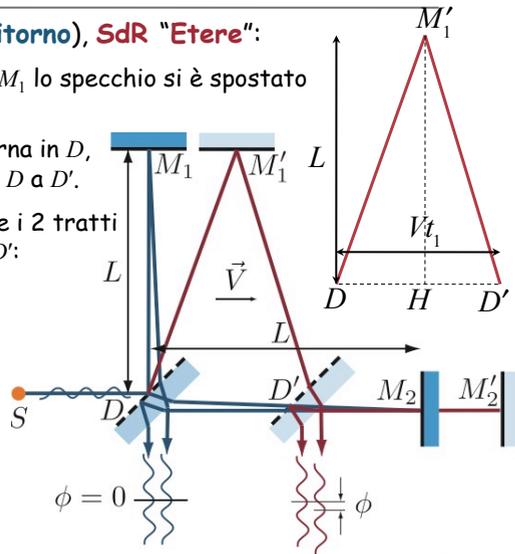
- Mentre la luce viaggia da D a M_1 lo specchio si è spostato da M_1 a M'_1 .
- Quando poi la luce da M'_1 ritorna in D , lo specchio D si è spostato da D a D' .
- La luce deve quindi percorrere i 2 tratti di egual lunghezza DM'_1 e M'_1D' :

$$\overline{DM'_1}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HM'_1}^2 =$$

$$= \left(V \frac{t_1}{2} \right)^2 + L^2$$

$$\overline{M'_1D'}^2 = \overline{HD'}^2 + \overline{HM'_1}^2 =$$

$$= \left(V \frac{t_1}{2} \right)^2 + L^2$$



- Avremo perciò:

$$\left(c \frac{t_1}{2} \right)^2 = \overline{DM'_1}^2 = \left(V \frac{t_1}{2} \right)^2 + L^2$$

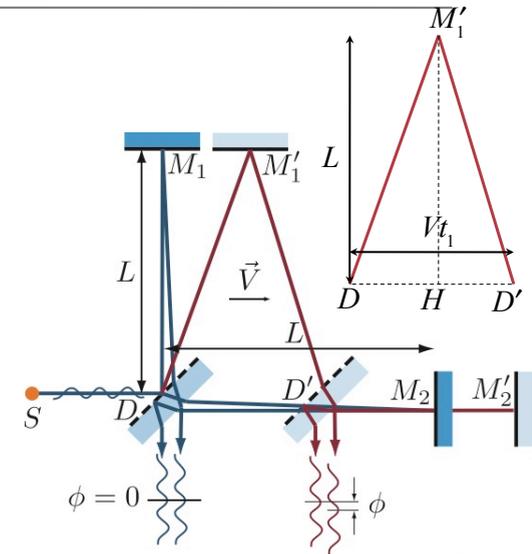
$$\left(c \frac{t_1}{2} \right)^2 = \overline{M'_1D'}^2 = \left(V \frac{t_1}{2} \right)^2 + L^2$$

$$c^2 \frac{t_1^2}{4} = V^2 \frac{t_1^2}{4} + L^2$$

$$c^2 t_1^2 = V^2 t_1^2 + 4L^2$$

$$(c^2 - V^2) t_1^2 = 4L^2$$

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



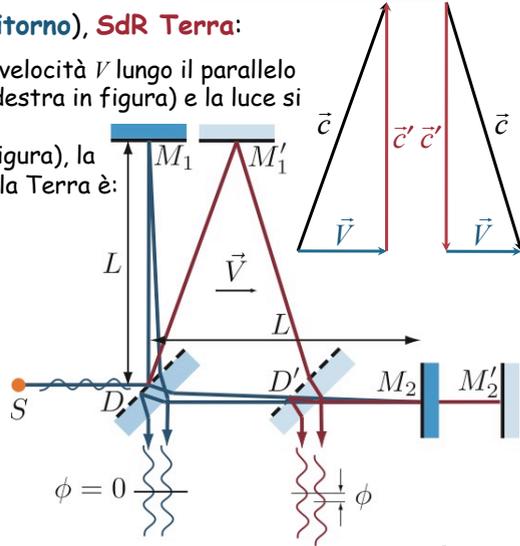
• **Tratto verticale (andata e ritorno), SdR Terra:**

- Poiché la Terra si muove con velocità V lungo il parallelo rispetto all'“Etere” (verso a destra in figura) e la luce si muove con velocità c rispetto all'“Etere” (obliquamente in figura), la velocità della luce rispetto alla Terra è:

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$$

e la sua norma è:

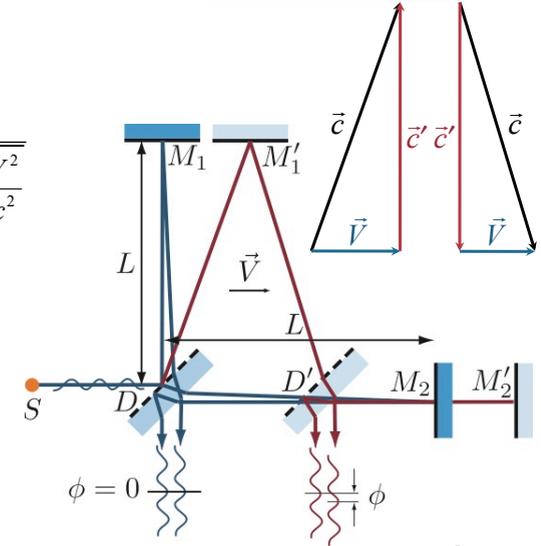
$$c' = \|\vec{c} - \vec{V}\| = \sqrt{c^2 - V^2}$$



• Avremo perciò:

$$c' = \sqrt{c^2 - V^2}$$

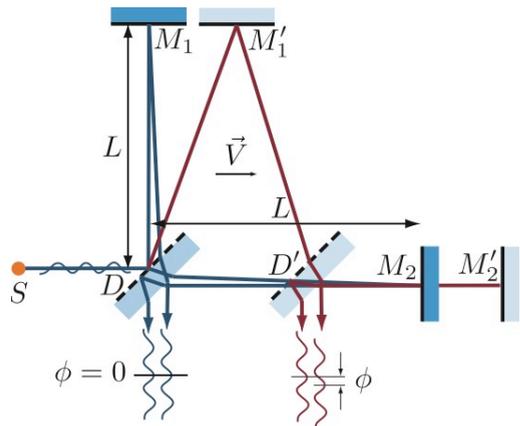
$$t_1 = \frac{2L}{c'} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



• Riassumendo, i **tempi** impiegati dalla luce a percorrere il **braccio lungo il parallelo** (t_2) e il **braccio lungo il meridiano** (t_1) sono **diversi**:

$$t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



• Essendo $V \ll c$, possiamo approssimare:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad x \rightarrow 0$$

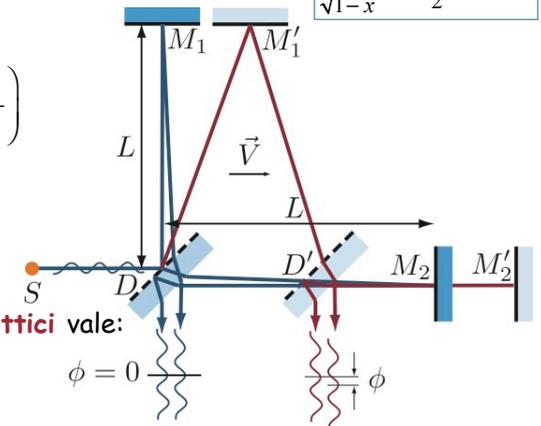
$$t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$t_1 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{2L}{c} \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} = \frac{L}{c} \frac{V^2}{c^2}$$

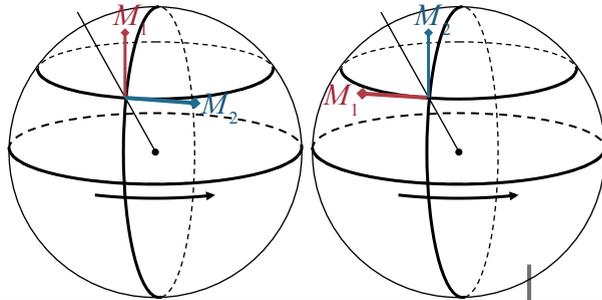
• La **differenza dei cammini ottici** vale:

$$\Delta l = c \Delta t = c \left(t_2 - t_1\right) = L \frac{V^2}{c^2}$$

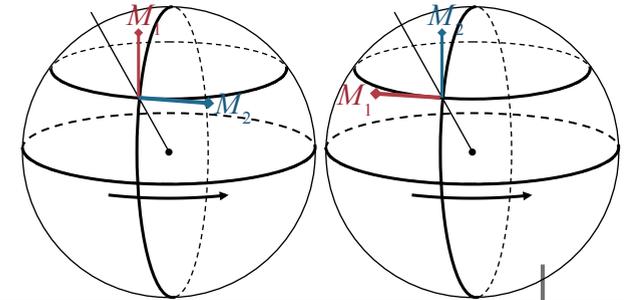


- Ruotando l'interferometro di 90° tale differenza di cammini passa da Δl a $-\Delta l$, per una variazione totale di $2\Delta l$.
- Ci aspetteremmo dunque uno **spostamento delle frange** di interferenza di una frazione della larghezza di frangia pari a:

$$s = \frac{2\Delta l}{\lambda} = 2 \frac{V^2 L}{c^2 \lambda}$$



- L'interferometro era **ampiamente sensibile** per osservare tale effetto.
- **Non** fu trovato tuttavia alcuno **spostamento delle frange**:
 - La velocità dell' "Etere Luminifero" non poté essere rilevata.
- Occorsero **18 anni** prima che i **risultati negativi** dell'esperimento fossero **pienamente spiegati** da Einstein.



Interpretazioni di un Fallimento

Le Prime Reazioni al Fallimento
dell'Esperimento
di Michelson-Morley

La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz

- Il fallimento dell'esperimento di Michelson-Morley creò sconcerto.
- La **prima idea** per trovare una via d'uscita venne, **2 anni dopo**, indipendentemente da **George Fitzgerald** e da **Hendrik Lorentz**:
 - I corpi materiali **in moto contraggono** la propria **dimensione nella direzione del movimento**, riducendo la propria lunghezza da L_0 a:

$$L_{||} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

- L'**effetto non è riscontrabile** dall'**osservatore in moto** poiché l'**unità campione** da lui usata per la misura subisce anch'essa una **contrazione della stessa entità**.

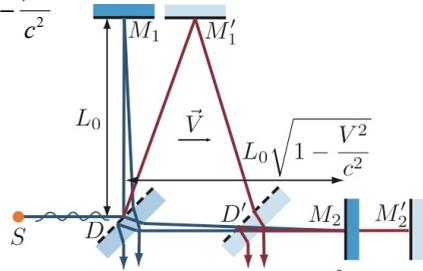
• In questo modo il **braccio** DM_2 , orientato lungo un parallelo, risulterebbe **più corto** del braccio DM_1 , orientato lungo un meridiano.

• I **tempi** di percorrenza dei 2 bracci dell'interferometro diventerebbero allora **uguali**:

$$t_2 = \frac{2L_{\parallel}}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{2L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t_1 = \frac{2L_{\perp}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

• Questo spiegherebbe l'**assenza** dello **spostamento** delle **frange** di interferenza.



• La **contrazione annullava** ogni **effetto** della **velocità** del laboratorio **rispetto all'etere**.

- Grazie ad un intervento correttivo *ad hoc*, l'idea dell'"**Etere Luminifero**" era di nuovo **salva**.
- L'esistenza di un **SdR privilegiato** per lo studio dei fenomeni fisici non era messa in discussione.

• La **ragione** della **contrazione** era attribuita a reali **effetti elettromagnetici** prodotti dal moto dei corpi nell'etere:

- Effetti tuttavia **non previsti** dagli studi dello stesso Lorentz sull'elettromagnetismo, condotti dello stesso periodo.

• L'ipotesi di Fitzgerald-Lorentz **non ottenne molto credito**:

- parve formulata **artificialmente** per risolvere la difficoltà.

• Il problema del **SdR privilegiato si aggravava**:

- Leggi **elettromagnetismo** verificate soltanto nel **SdR dell'etere**;
- SdR dell'etere **indistinguibile** sperimentalmente da altri SdR:
 - Impossibile trovare con una misura sperimentalmente qual è il SdR dell'etere.

• **Altri esperimenti** progettati per **misurare** il "**vento di etere**" ebbero **analoghe difficoltà**.

• Pareva esserci una **cospirazione** che — ogniqualvolta si tentava di misurare il "**vento di etere**" — introduceva un nuovo fenomeno che ne rendeva **impossibile la misura**.

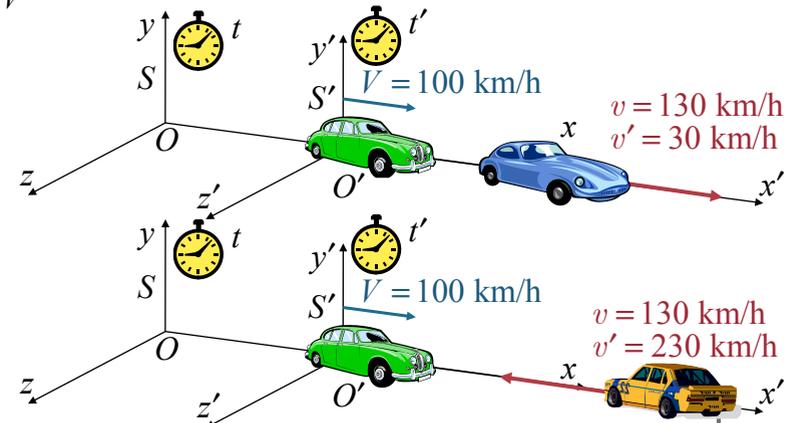
• Poincaré osservò che una **cospirazione generale** doveva essere anch'essa una **legge di natura**.

• Poincaré propose quindi che vi fosse una **legge di natura** per cui fosse **impossibile** — con **qualunque esperimento** — **misurare** il "**vento di etere**".

- In altre parole, non ci può essere **nessun modo** per **misurare** una **velocità assoluta** (cioè una velocità rispetto all' "Etere Luminifero").

• Nelle **trasformazioni di Galileo** le **velocità si compongono** secondo la legge:

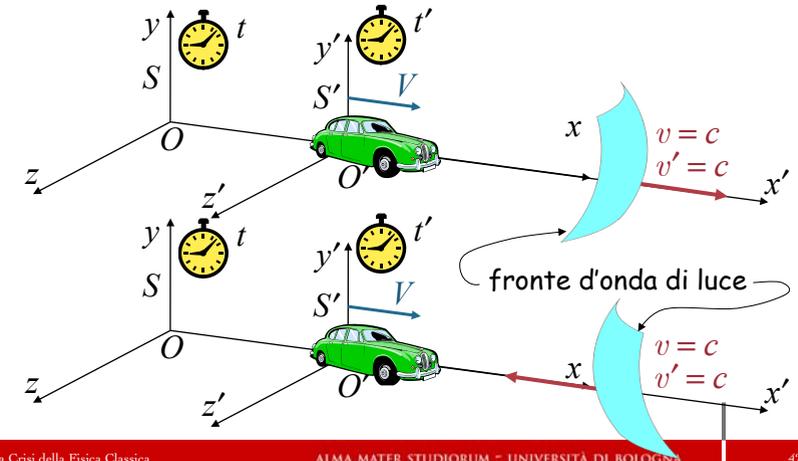
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$



- Se **velocità della luce fosse relativa**, così come lo è la velocità degli oggetti ordinari, allora:
 - Potremmo **individuare** il SdR dell'"Etere Luminifero" come il SdR in cui la luce ha velocità c .
 - **Misurando** la velocità della luce in un SdR potremmo **ricavare** la **velocità assoluta** di tale SdR.
- Se postuliamo che **non** sia possibile misurare una **velocità assoluta** allora dobbiamo concludere che:
 - **La velocità della luce nel vuoto c è un invariante**; in altre parole:
 - La velocità della luce nel vuoto c **non è relativa**;
 - La velocità della luce nel vuoto c **è la stessa in tutti i SdR**.

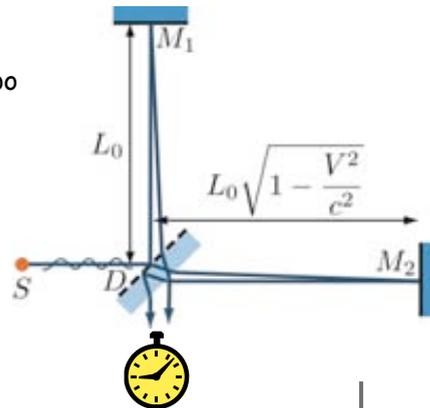
- Di conseguenza, la velocità della luce nel vuoto, **non rispetta** la composizione galileiana delle velocità.

$$\vec{v}' = \vec{c} \neq \vec{c} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}$$



- Riconsideriamo l'**esperimento di Michelson e Morley** dal **nuovo punto di vista** (**invarianza della velocità della luce nel vuoto**).
- Consideriamo il **braccio DM_1** , perpendicolare alla direzione del moto:
 - Sicuramente **non si contrae**.
- Nel **SdR dell'interferometro**, il tempo impiegato dalla luce per percorrere il braccio DM_1 (andata e ritorno) è:

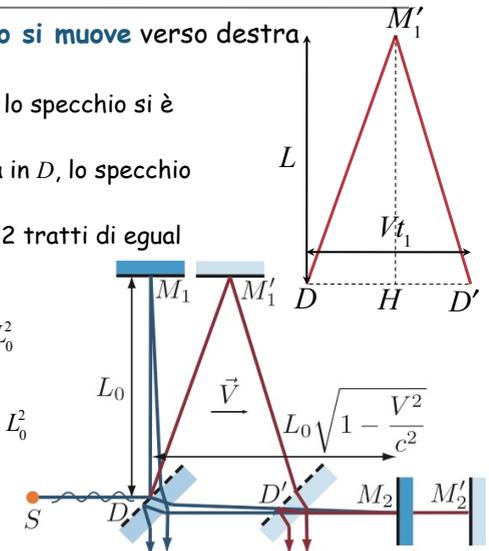
$$t = \frac{2L_0}{c} = \tau \quad (\text{tempo proprio})$$



- In un **SdR** in cui l'**interferometro si muove verso destra**, con velocità V :
 - Mentre la luce viaggia da D a M_1 lo specchio si è spostato da M_1 a M'_1 .
 - Quando poi la luce da M'_1 ritorna in D , lo specchio D si è spostato da D a D' .
 - La luce deve quindi percorrere i 2 tratti di **egual lunghezza** DM'_1 e M'_1D' :

$$\overline{DM'_1}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HM'_1}^2 = \left(V \frac{t_1}{2}\right)^2 + L_0^2$$

$$\overline{M'_1D'}^2 = \overline{HD'}^2 + \overline{HM'_1}^2 = \left(V \frac{t_1}{2}\right)^2 + L_0^2$$



- Avremo perciò essendo c la **velocità della luce** anche nel **SdR in moto** rispetto all'interferometro:

$$\left(c \frac{t_1}{2}\right)^2 = \overline{DM_1'}^2 = \left(V \frac{t_1}{2}\right)^2 + L_0^2$$

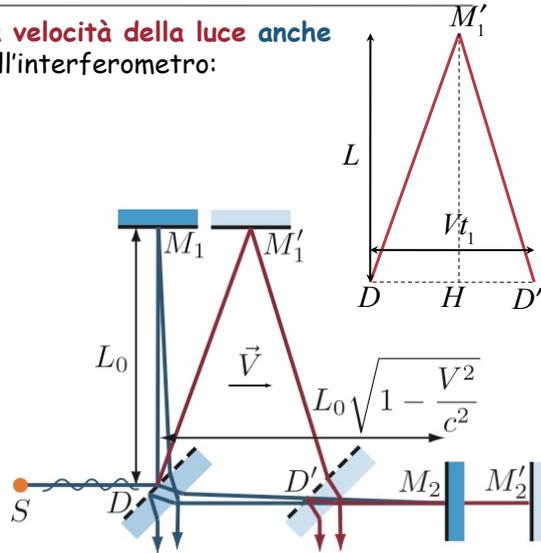
$$\left(c \frac{t_1}{2}\right)^2 = \overline{M_1'D'}^2 = \left(V \frac{t_1}{2}\right)^2 + L_0^2$$

$$c^2 \frac{t_1^2}{4} = V^2 \frac{t_1^2}{4} + L_0^2$$

$$c^2 t_1^2 = V^2 t_1^2 + 4L_0^2$$

$$(c^2 - V^2)t_1^2 = 4L_0^2$$

$$t_1 = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



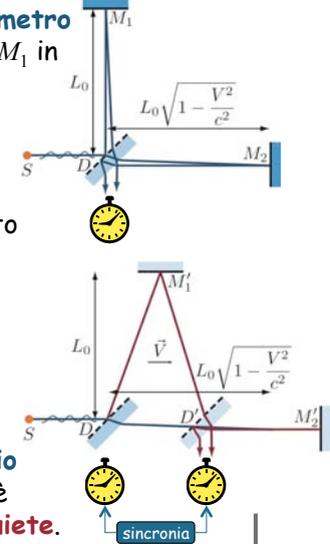
- L'osservatore in **quiete** rispetto all'**interferometro** misura un tempo (per percorrere il braccio DM_1 in andata e ritorno) pari a:

$$t = \frac{2L_0}{c} = \tau \quad (\text{tempo proprio})$$

- Un osservatore in **moto** con velocità V rispetto all'**interferometro** misura invece il tempo:

$$t' = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \tau$$

- Il **tempo** necessario per **percorrere il braccio** DM_1 dell'interferometro in andata e ritorno è **minore** nel SdR in cui l'interferometro è in **quiete**.



- Il **tempo di percorrenza** di un **braccio** dell'interferometro può essere utilizzato come **tempo base** (tic-tac) per un **orologio** (analogamente all'oscillazione di un pendolo):

- Si può immaginare che una lampada **flash** invii un **lambo di luce** e che una **fotocellula** (posizionata vicino al flash) ne rilevi il tempo di ritorno dopo una riflessione su di uno **specchio**.

- Il **tempo misurato nel SdR dell'orologio** (**tempo proprio, τ**) è **minore** del tempo misurato in **ogni altro SdR** in moto rispetto all'orologio:

- L'**orologio** osservato in **movimento** è **più lento**.

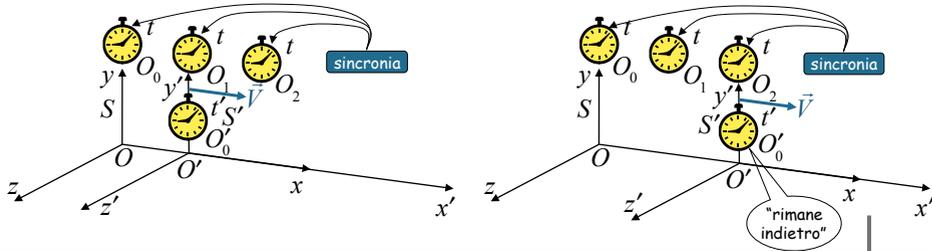


- Potremmo ora pensare che questo **rallentamento** si osservi **soltanto negli orologi** che funzionano con un **raggio di luce** riflesso in uno specchio:

- Potremmo pensare che un normale orologio a **pendolo**, oppure un orologio da polso a **bilanciere** o ancora un orologio al **quarzo** non subiscano tale rallentamento.

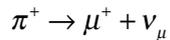
- Tuttavia, **se questo fosse vero**, dal **disaccordo** dei due orologi, potremmo **riconoscere**, se siamo **fermi** o siamo in **moto** traslatorio rettilineo uniforme, **contraddicendo il principio di relatività ristretta**.

- Se supponiamo che valga il **principio di relatività ristretta**, allora **dobbiamo concludere**, che **tutti** gli orologi, osservati da un sistema di riferimento in moto, sono **rallentati**.



- Se vale il **principio di relatività ristretta**, allora non ci deve essere **nessun modo** per potere **riconoscere** una **discrepanza** nella **misura del tempo** tra orologi o altri fenomeni di tipo diverso nello **stesso SdR**:
 - Non soltanto i fenomeni fisici, ma anche i fenomeni **biologici** debbono essere rallentati: il **cuore** deve battere più lentamente, deve essere più lento il **pensiero**, più lungo il tempo di sviluppo e di guarigione delle **malattie**, più lungo il tempo di **invecchiamento**, ecc.
- Se vale il principio di relatività ristretta, allora non soltanto la misura di particolari orologi, bensì il **tempo stesso** deve essere **rallentato** se osservato da un SdR in moto.

- Alcune particelle, denominate **pioni carichi**, una volta prodotte, vivono in media un certo tempo — detto **vita media** — dopo il quale **decadono** in **muoni** e **neutrini**:



- La **vita media propria** (cioè nel **SdR della particella**) τ dei pioni carichi vale $\tau = 2.5 \times 10^{-8}$ s.
- Mediante un acceleratore di particelle, un fascio di pioni può essere portato a una velocità pari al 99.995 % della velocità della luce nel vuoto.

- A causa della **dilatazione dei tempi**, la loro vita media diventa **100 volte maggiore** della loro vita media propria:

$$t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2.5 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.99995^2}} = \frac{2.5 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{0.00009999}} = 100.001 \times 2.5 \times 10^{-8} \text{ s} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ s}$$

- Se non ci fosse la dilatazione dei tempi, i pioni percorrerebbero, prima di decadere, una distanza:

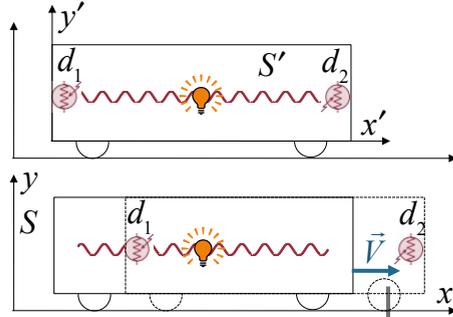
$$s = V\tau = 0.99995 \times 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2.5 \times 10^{-8} \text{ s} = 7.5 \text{ m}$$

- A causa della **dilatazione dei tempi**, i pioni percorrono, prima di decadere, una distanza **100 volte maggiore**:

$$s = Vt' = 0.99995 \times 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2.5 \times 10^{-6} \text{ s} = 750 \text{ m}$$

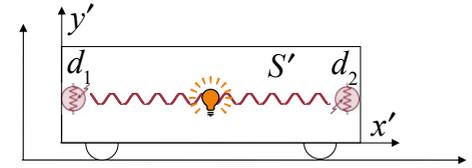
- Una conseguenza del fatto che il tempo scorre diversamente in diversi SdR inerziali implica, in particolare, che **2 eventi simultanei in un SdR possono non essere simultanei in un altro SdR**:
 - Accade se gli eventi sono **spazialmente distanti**.

- Nel vagone in figura, una **lampada flash** al centro invia impulsi di luce alle **fotocellule**, d_1 e d_2 situate alle due estremità.



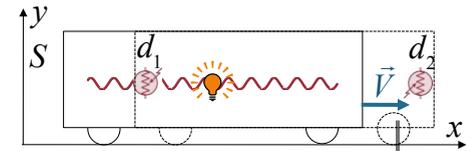
- SdR del vagone (S')**:

- Poiché la lampada flash è equidistante dalle 2 fotocellule e la luce si muove alla stessa velocità c nelle due direzioni nel SdR del vagone, l'impulso di luce arriva **simultaneamente** sulle 2 fotocellule.

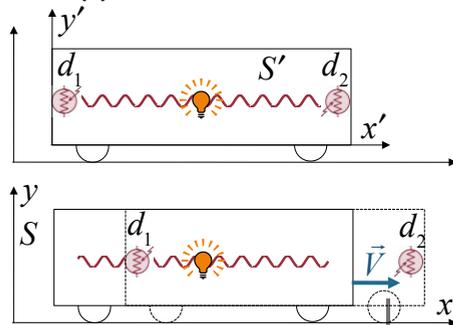


- SdR a terra (S)**:

- Poiché la lampada flash è equidistante dalle 2 fotocellule e la luce si muove alla stessa velocità c nelle due direzioni nel SdR a terra, ma il **vagone si sposta verso destra**, l'impulso di luce **non** arriva **simultaneamente** sulle 2 fotocellule. Arriva prima su d_1 e poi su d_2 .



- In altre parole, nel **SdR a terra**, il lampo di luce, dopo un certo tempo, avrà percorso la stessa distanza sia verso destra, sia verso sinistra. Nello stesso tempo, però, la fotocellula d_1 è **andata incontro** al lampo, mentre la fotocellula d_2 si è **allontanata** dal lampo.
- L'arrivo del lampo alle due fotocellule è **simultaneo** nel SdR del **vagone (S')** ma **non** è **simultaneo** nel SdR a **terra (S)**.
- La **simultaneità di 2 eventi distanti dipende** dal SdR.



- Consideriamo un'asticella di lunghezza L_0 disposta nella direzione del suo moto.
- La **misura della lunghezza** dell'asticella richiede la determinazione **simultanea** della posizione delle sue **estremità**.
- Ci aspettiamo quindi che il risultato della **misura dipenda** dal fatto che le due estremità della sbarra siano misurate:
 - simultaneamente** nel SdR del laboratorio;
 - simultaneamente** nel SdR della sbarra.



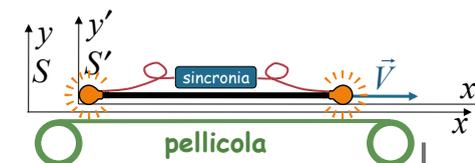
Un'Asta in Moto si Contrae o si Allunga? (II)

- Se fotografiamo l'asta illuminandola con un **flash**, tenendo **flash** e **pellicola** in **quiete** nel **SdR** del **laboratorio**:
 - Stiamo misurando la posizione delle 2 estremità dell'asta **simultaneamente** nel **SdR** del **laboratorio**.



Un'Asta in Moto si Contrae o si Allunga? (III)

- Se invece mettiamo **sull'asta** (solidale a essa) un dispositivo **lampeggiatore**, collegato con **2 fili di ugual lunghezza** a due **lampade poste alle 2 estremità dell'asta** e con il lampo delle due lampade impressioniamo una **pellicola** in **quiete** nel **SdR** del **laboratorio**:
 - Stiamo misurando la posizione delle 2 estremità dell'asta **simultaneamente** nel **SdR** dell'**asta**.



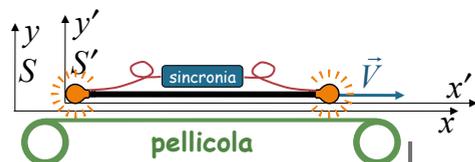
Un'Asta in Moto si Contrae o si Allunga? (IV)

- Con il primo metodo (**simultaneità SdR laboratorio**) si osserva la **contrazione** di Fitzgerald-Lorentz:

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

- Con il secondo metodo (**simultaneità nel SdR dell'asta**) si osserva un **allungamento**.

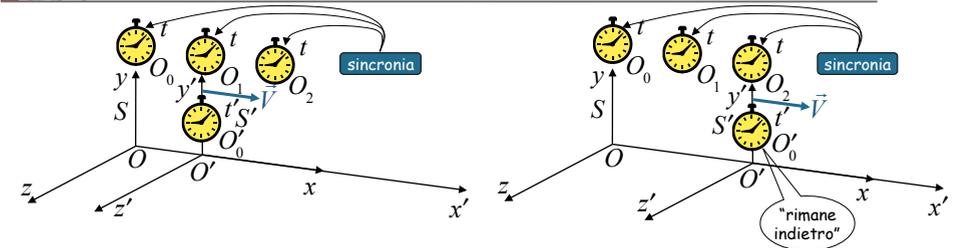
$$L_{\parallel} = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



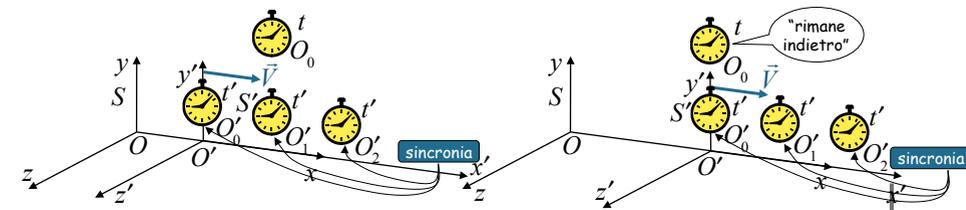
Quale Orologio Rimane Indietro?

- Consideriamo un SdR S' in moto relativo rispetto al SdR S .
- Un **orologio fisso in S'** è visto in moto da un osservatore in S il quale dunque lo vede rimanere indietro.
- Tuttavia è vero anche che un **orologio fisso in S** è visto in moto da un osservatore in S' il quale dunque lo vede rimanere indietro.
- Come si possono **conciliare** queste due affermazioni?
 - **Quale orologio** veramente **rimane indietro** rispetto all'altro?
 - **Quale orologio** invece va avanti rispetto all'altro?

- La chiave della risposta sta nel **procedimento di confronto degli orologi**.
- Per confrontare i tempi in un certo istante, occorre potere disporre di **due orologi** che in **quell'istante** si trovano nella **stessa posizione**:
 - Altrimenti non è possibile definire **univocamente** la **simultaneità** della misura del tempo da parte dei 2 orologi.
- Occorre dunque potere disporre, almeno in **uno dei 2 SdR**, di una **successione di orologi sincronizzati** tra loro.
 - P. es. mediante un dispositivo di sincronismo che comanda tutti gli orologi della successione mediante cavi elettrici della stessa lunghezza.
- Nell'altro SdR è sufficiente un **orologio singolo**.



- Rimane **indietro** l'**orologio singolo** che viene confrontato con la successione di orologi.



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>