

Trasformazioni di Lorentz

Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 23 maggio 2012

<http://www.fondazioneocchialini.it>

Prof. Domenico Galli

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

- Vogliamo ora formulare le nuove leggi di trasformazione che sostituiscano la trasformazione di Galileo.

- Ci baseremo sui seguenti **postulati**:

1. Validità del Principio di Relatività Ristretta:

- Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i SdR inerziali;

2. Invarianza della velocità della luce nel vuoto:

- La luce si propaga nello spazio vuoto con una velocità che ha lo stesso valore c in tutti i SdR inerziali;

3. Omogeneità dello spazio-tempo:

- Le leggi della fisica sono invarianti per **traslazioni** nello spazio o nel tempo;

4. Isotropia dello spazio-tempo:

- Le leggi della fisica sono invarianti per **rotazioni**.

DOMENICO GALLI - Trasformazioni di Lorentz

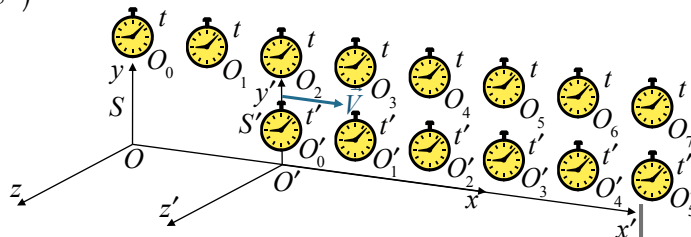
ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

2

La Forma Generale

- Innanzitutto le trasformazioni che cerchiamo possono coinvolgere le 3 variabili **spaziali** x, y e z , a differenza delle trasformazioni di Galileo, anche la variabile **temporale** t .

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) \\ x' = f_1(t, x, y, z) \\ y' = f_2(t, x, y, z) \\ z' = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$



DOMENICO GALLI - Trasformazioni di Lorentz

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

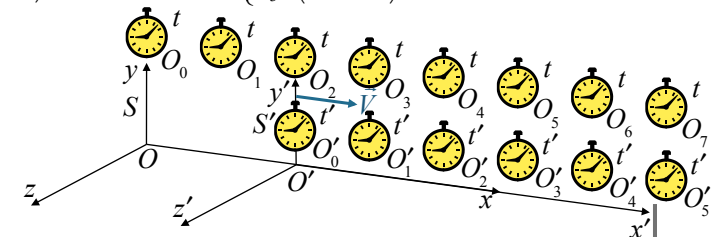
3

La Forma Generale (II)

- In queste trasformazioni f_0, f_1, f_2 e f_3 sono funzioni generiche che associano a una **quaterna ordinata** di numeri reali un altro numero reale:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) \\ x' = f_1(t, x, y, z) \\ y' = f_2(t, x, y, z) \\ z' = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow t' \in \mathbb{R} \\ f_1 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow x' \in \mathbb{R} \\ f_2 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow y' \in \mathbb{R} \\ f_3 : (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow z' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

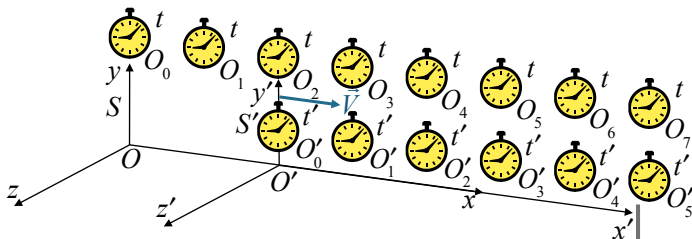


DOMENICO GALLI - Trasformazioni di Lorentz

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

4

- Procederemo ora nel cercare le **restrizioni** che i **postulati** prima elencati (relatività, invarianza della velocità della luce, omogeneità e isotropia dello spazio-tempo) **impongono alla forma** delle **funzioni** f_0 , f_1 , f_2 e f_3 .



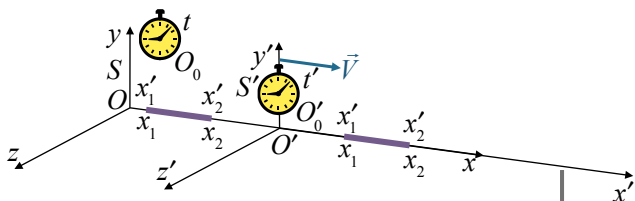
- Qualunque esperimento deve dare esattamente gli stessi risultati se è ripetuto nelle stesse condizioni fisiche in punti diversi dello spazio e in tempi diversi (**omogeneità** dello spazio-tempo).
 - In altre parole le leggi della fisica debbono essere **invarianti per traslazioni** nello **spazio** o nel **tempo**.
 - Si tratta di un requisito fondamentale, in quanto sarebbero poco utili leggi che cambiano a seconda della posizione o nel tempo.
- Questo requisito impone alle funzioni f_0, f_1, f_2 e f_3 di essere **lineari** (ovvero di essere funzioni di **primo grado**).

- Mostriamo con un **esempio** che se le funzioni f_0, f_1, f_2 e f_3 **non** sono **lineari** lo **spazio non** sarebbe **omogeneo**.

- Supponiamo che la coordinata x si trasformi come:

$$x' = f_1(t, x, y, z) = a x^2$$

- Consideriamo ora la misura di un'**asta di lunghezza unitaria** (nel **SdR S**) collocata lungo l'asse x .

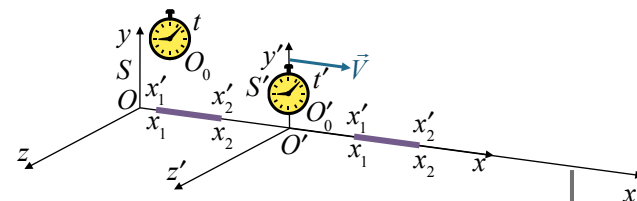


- Se l'asta è collocata con le estremità in $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ in S , allora la sua lunghezza in S' vale:

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(4 - 1) = 3a$$

- Se invece l'asta è collocata con le estremità in $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$ in S , allora la sua lunghezza in S' vale:

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2^2 - x_1^2) = a(16 - 9) = 7a$$



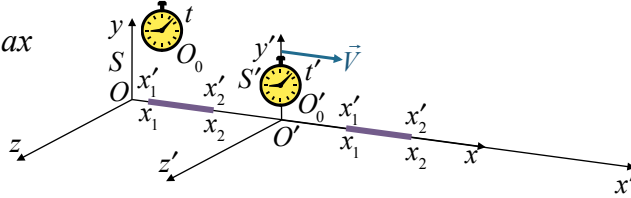
- Quindi, anche se la lunghezza dell'asta è sempre unitaria in S , la misura compiuta dall'osservatore di S' darebbe **risultati diversi** a seconda del punto dello spazio in cui l'asta è stata posta.
- Se invece la coordinata x si trasforma come la funzione lineare:

$$x' = f_1(t, x, y, z) = ax$$

si ha:

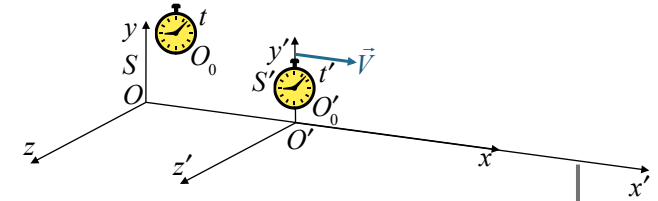
$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2 - x_1) = a(2 - 1) = a$$

$$l' = |x'_2 - x'_1| = a(x_2 - x_1) = a(4 - 3) = a$$



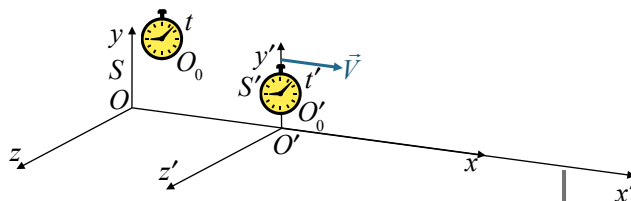
- La forma più generale di trasformazioni **lineari** (cioè di **primo grado**) è data dalle espressioni:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + b_0 \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$$



- Se supponiamo che, **quando $t = t' = 0$, i due SdR coincidano** e i loro **orologi** siano **sincronizzati** allora i termini b_0, b_1, b_2 e b_3 **si annullano** e si ha:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$



- Se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i **piani xy e $x'y'$** **coincidano**, allora si ha che:

$$z = 0 \Leftrightarrow z' = 0$$

qualsiasi siano i valori di t, x e y . Da questo segue che:

$$a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0$$

$$z' = f_3(t, x, y, z) = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{33}z$$

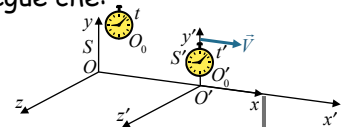
- Analogamente, se disponiamo gli assi dei due SdR in modo che i **piani xz e $x'z'$** **coincidano**, allora si ha che:

$$y = 0 \Leftrightarrow y' = 0$$

qualsiasi siano i valori di t, x e z . Da questo segue che:

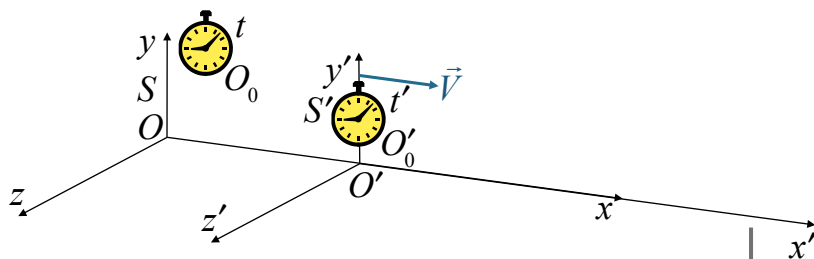
$$a_{20} = a_{21} = a_{23} = 0$$

$$y' = f_2(t, x, y, z) = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{22}y$$

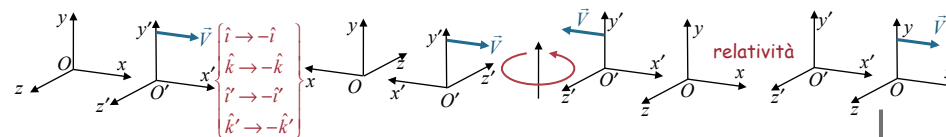


- Avremo quindi:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = f_2(t, x, y, z) = a_{22}y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = a_{33}z \end{cases}$$



- Sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente a_{22} .
- Invertiamo** (cioè cambiamo verso) **contemporaneamente i 4 assi** x, z, x' e z' .
 - L'**equazione di trasformazione di y non cambia**.
 - I ruoli di **S** e **S'** risultano **scambiati**.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un **altro punto di vista**:
 - Ruotiamo** poi di **180°** attorno all'**asse y** i **due SdR**. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
 - Infine, **sostituiamo** la **traslazione di S' rispetto a S** con la **traslazione di S rispetto a S'** con **verso opposto**. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.



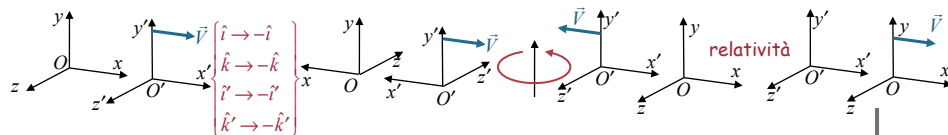
- Invertendo contemporaneamente i 4 assi x, z, x' e z' :
 - L'**equazione di trasformazione di y non cambia**.
 - Otteniamo così una **configurazione** che **differisce da quella di partenza** soltanto per lo **scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici**.

- Insieme alla trasformazione:

$$y' = a_{22}y$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$y = a_{22}y'$$

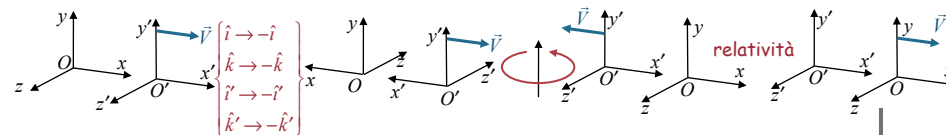


- Si ha quindi:

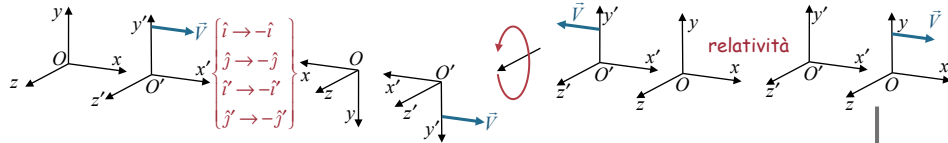
$$\begin{cases} y' = a_{22}y \\ y = a_{22}y' \end{cases} \Rightarrow y' = a_{22}y = a_{22}a_{22}y'$$

$$a_{22}a_{22} = 1$$

$$a_{22} = 1$$



- Analogamente, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio e del **Principio di Relatività** possiamo determinare il coefficiente a_{33} .
- Invertiamo** (cioè cambiamo verso) **contemporaneamente i 4 assi** x, y, x' e y' .
 - L'**equazione di trasformazione di z non cambia**.
 - I ruoli di S e S' risultano **scambiati**.
- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un **altro punto di vista**:
 - Ruotiamo** poi di **180°** attorno all'**asse z** i **due SdR**. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.
 - Infine, **sostituiamo** la **traslazione di S' rispetto a S** con la **traslazione di S rispetto a S' con verso opposto**. Per il **Principio di Relatività** le due traslazioni sono equivalenti.

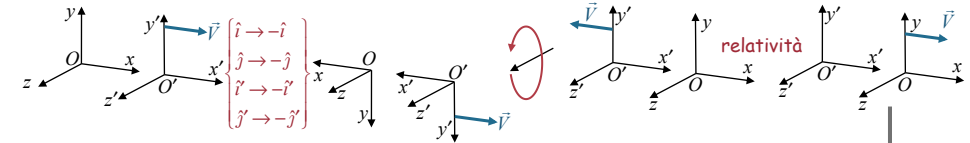


- Invertendo contemporaneamente i 4 assi x, y, x' e y' :
 - L'**equazione di trasformazione di z non cambia**.
 - Otteniamo così una **configurazione** che **differisce da quella di partenza** soltanto per lo **scambio delle variabili con gli apici con le variabili senza apici**.
- Insieme alla trasformazione:

$$z' = a_{33}z$$

deve perciò valere anche la trasformazione:

$$z = a_{33}z'$$

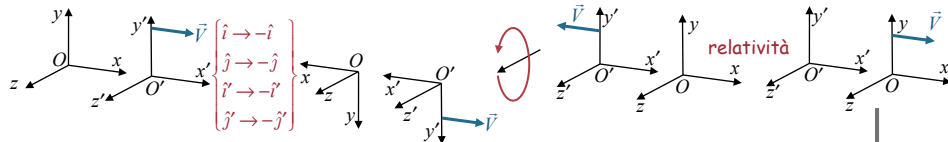


- Si ha quindi:

$$\left. \begin{aligned} z' &= a_{33}z \\ z &= a_{33}z' \end{aligned} \right\} \Rightarrow z' = a_{33}z = a_{33}a_{33}z'$$

$$a_{33}a_{33} = 1$$

$$a_{33} = 1$$



- Avremo quindi:

$$\left\{ \begin{aligned} t' &= f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' &= f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= f_2(t, x, y, z) = y \\ z' &= f_3(t, x, y, z) = z \end{aligned} \right.$$

- In maniera simile, sulla base dell'**Isotropia** dello spazio possiamo determinare i coefficienti $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$.

- Invertiamo** (cioè cambiamo verso) **contemporaneamente i 4 assi** y, z, y' e z' .

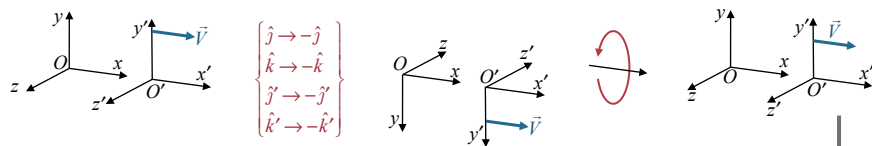
- Le **equazioni di trasformazione di x e t** cambiano nel seguente modo:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$

- I **ruoli di S e S'** non risultano **scambiati**.

- Possiamo rendercene conto osservando il sistema così ottenuto da un **altro punto di vista**:

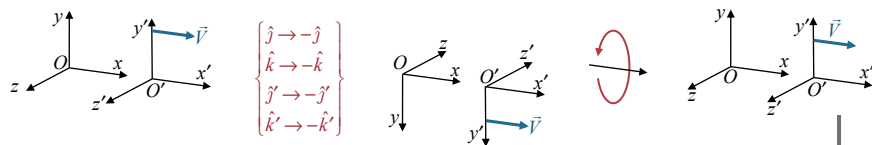
- Ruotiamo** poi di **180°** attorno all'**asse x** i **due SdR**. Per l'**Isotropia** dello spazio nulla deve cambiare.



$$\begin{cases} a_{02} = a_{03} = 0 \\ a_{12} = a_{13} = 0 \end{cases}$$

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{10}t + a_{11}x \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$



- Insieme alle trasformazioni:

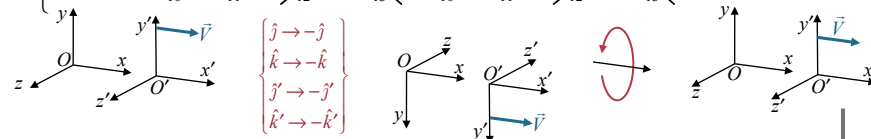
$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \end{cases}$$

devono perciò valere anche le trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x - a_{02}y - a_{03}z \\ x' = a_{10}t + a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z \end{cases}$$

- Sommandole membro a membro:

$$\begin{cases} t' + t' = a_{00}t + a_{01}x + \cancel{a_{02}y} + \cancel{a_{03}z} + a_{00}t + a_{01}x - \cancel{a_{02}y} - \cancel{a_{03}z} \\ x' + x' = a_{10}t + a_{11}x + \cancel{a_{12}y} + \cancel{a_{13}z} + a_{10}t + a_{11}x - \cancel{a_{12}y} - \cancel{a_{13}z} \end{cases}$$



- Osserviamo che un **punto materiale** che sia **in quiete nell'origine** del **SdR S'** ($x' = 0$) nel **SdR S** deve avere **velocità V** :

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = Vt$$

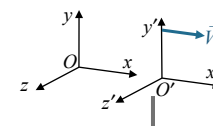
- Sostituendo nelle leggi di trasformazione, otteniamo:

$$x' = a_{10}t + a_{11}x$$

$$0 = a_{10}t + a_{11}Vt = (a_{10} + a_{11}V)t, \quad \forall t$$

$$a_{10} + a_{11}V = 0$$

$$a_{10} = -a_{11}V$$



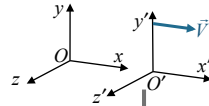
- Avremo quindi:

$$a_{10} = -a_{11}V$$

$$x' = a_{10}t + a_{11}x = -a_{11}Vt + a_{11}x = a_{11}(x - Vt)$$

- Le leggi di trasformazione si riducono quindi a:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$



- Le leggi di trasformazione:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

sono le **più generali** leggi **compatibili** con i postulati di **Omogeneità** e **Isotropia** dello spazio e con il **Principio di Relatività**.

- Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Galileo**.
- Un **caso particolare** di queste leggi sono le trasformazioni di **Lorentz**.

- Nelle trasformazioni di **Galileo** il **tempo** è **assoluto**, ovvero non cambia passando da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$t' = t, \forall t$$

$$t' = a_{00}t + a_{01}x = t, \forall t$$

$$\begin{cases} a_{00} = 1 \\ a_{01} = 0 \end{cases}$$

- Inoltre le **lunghezze non cambiano** nel passaggio da un SdR a un altro, per cui deve essere:

$$\Delta x' = \Delta x$$

$$\begin{cases} \Delta x' = x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2 - Vt) - a_{11}(x_1 - Vt) = a_{11}(x_2 - x_1) \\ \Delta x' = \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$a_{11} = 1$$

- Sostituendo le condizioni $a_{00} = 1$, $a_{01} = 0$, $a_{11} = 1$ nelle trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

otteniamo le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = t \\ x' = f_1(t, x, y, z) = x - Vt \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

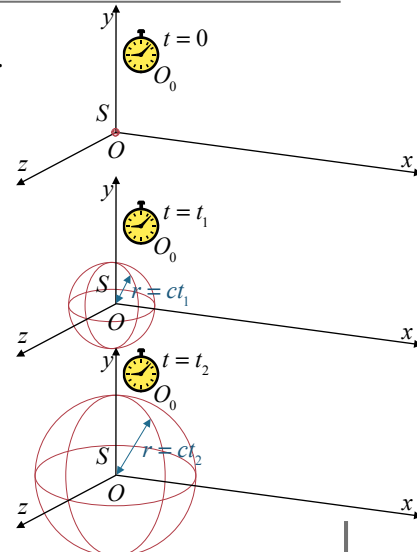
- Nelle trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = t \\ x' = f_1(t, x, y, z) = x - Vt \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

- Lo **spazio** è **assoluto**:
 - La **distanza tra due punti** non dipende dal SdR.
- Il **tempo** è **assoluto**:
 - L'**intervallo di tempo** non dipende dal SdR.

- Consideriamo un'**onda sferica** di luce prodotta da una **sorgente puntiforme**.
- Consideriamo un **fronte d'onda** che all'**istante** $t = 0$ ha **raggio** $r = 0$.
- Il fronte d'onda è una **superficie sferica** il cui **raggio aumenta con il tempo**:

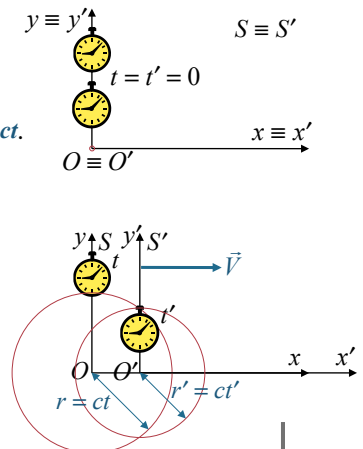
$$\begin{aligned} r(t) &= ct \\ \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} &= ct \\ x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) &= c^2 t^2 \end{aligned}$$



- La **relatività di Einstein** sostituisce:
 - I **vincoli di Galileo** sullo **spazio-tempo**, evidentemente troppo radicali:
 - Spazio assoluto** e **tempo assoluto**.
 - Con un **altro** tipo di **vincolo** sulle proprietà dello **spazio-tempo**:
 - L'**invarianza della velocità della luce**.
- Dovremo imporre questa condizione alle trasformazioni generiche:

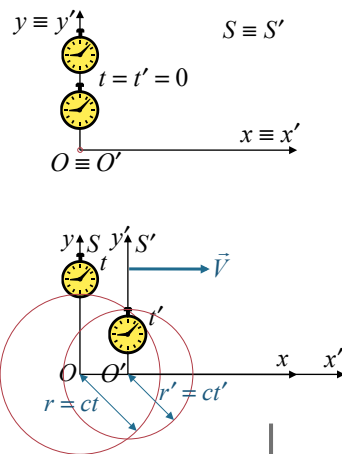
$$\begin{cases} t' = f_0(t, x, y, z) = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = f_1(t, x, y, z) = a_{11}(x - Vt) \\ y' = f_2(t, x, y, z) = y \\ z' = f_3(t, x, y, z) = z \end{cases}$$

- Supponiamo ora che il fronte d'onda sferico abbia **raggio** $r = 0$ nell'**istante** $t = t' = 0$ in cui i due SdR S e S' sono **sovrapposti**.
- Per l'**invarianza della velocità della luce**:
 - Nel **SdR** S il fronte d'onda è una **superficie sferica** di **centro** O e **raggio crescente** $r = ct$.
 - Nel **SdR** S' il fronte d'onda è ancora una **superficie sferica** di **centro** O' e **raggio crescente** $r' = ct'$.



- Per l'**invarianza della velocità della luce** dovranno perciò valere, **simultaneamente**, le due relazioni:

$$\begin{cases} r^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2 t^2 \\ r'^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2 t^2 \\ r'^2(t') = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2 \end{cases}$$

- Sostituiamo** nella seconda relazione le **variabili con gli apici** ottenute dalle **trasformazioni generiche**:

$$\begin{cases} t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{11}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ a_{11}^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{00}t + a_{01}x)^2 \end{cases}$$

- Sviluppiamo e raccogliamo le variabili:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ a_{11}^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{00}t + a_{01}x)^2 \end{cases} \\ & a_{11}^2 x^2 + a_{11}^2 V^2 t^2 - 2a_{11}^2 Vtx + y^2 + z^2 = c^2 a_{00}^2 t^2 + c^2 a_{01}^2 x^2 + 2c^2 a_{00} a_{01} tx \\ & \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ (a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2(Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01}) tx = (c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2) t^2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Confrontando termine a termine** le due relazioni (devono essere equivalenti $\forall (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ (a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2(Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01}) tx = (c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2) t^2 \end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2 = 1 \\ Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01} = 0 \\ c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2 = c^2 \end{cases}$$

- Da questo sistema possiamo ricavare le **3 incognite** a_{00} , a_{01} e a_{11} .

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{01}^2 = 1 \\ Va_{11}^2 + c^2 a_{00} a_{01} = 0 \\ c^2 a_{00}^2 - V^2 a_{11}^2 = c^2 \end{cases}$$

- Ricaviamo a_{01} dalla seconda e sostituiamo nella prima:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 \left(-\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \right)^2 = 1 \Rightarrow a_{11}^2 - \frac{V^2 a_{11}^4}{c^2 a_{00}^2} = 1 \Rightarrow c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 = V^2 a_{11}^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

- Sostituendo a_{00} ricavato dalla III nella I:

$$\begin{cases} c^2 a_{11}^4 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{11}^2 \Rightarrow (c^2 - V^2) a_{11}^4 - c^2 a_{11}^2 = 0 \Rightarrow (c^2 - V^2) a_{11}^2 - c^2 = 0 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 = V^2 a_{11}^2 + c^2 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo ambo i membri della III per a_{11}^2 e sottraendola dalla I:

$$\begin{cases} c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{00}^2 \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} \\ c^2 a_{00}^2 a_{11}^2 = V^2 a_{11}^4 + c^2 a_{11}^2 \Rightarrow a_{00}^2 - a_{11}^2 = 0 \Rightarrow a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

- Infine sostituendo:

$$\begin{cases} (c^2 - V^2) a_{11}^2 = c^2 \Rightarrow a_{11}^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Rightarrow a_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} = -\frac{Va_{11}^2}{c^2 a_{00}} = \mp \frac{Va_{11}}{c^2} = \mp \frac{V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{00} = \pm a_{11} \end{cases}$$

Dove scegliamo i segni superiori per avere gli assi x e x' e gli assi t e t' concordi.

- Sostituendo ora i parametri ottenuti nelle trasformazioni generiche si ottiene infine:

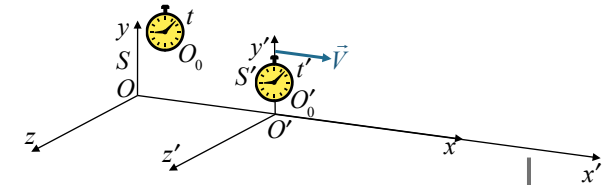
$$\begin{cases} a_{00} = a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{01} = -\frac{V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ t' = a_{00}t + a_{01}x \\ x' = a_{11}(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- Per semplificare le formule spesso si indica con β il cosiddetto **parametro di velocità**, ovvero la velocità misurata nel sistema naturale di unità di misura in cui $c = 1$:

$$\beta = \frac{V}{c}$$

e con γ il cosiddetto **fattore di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

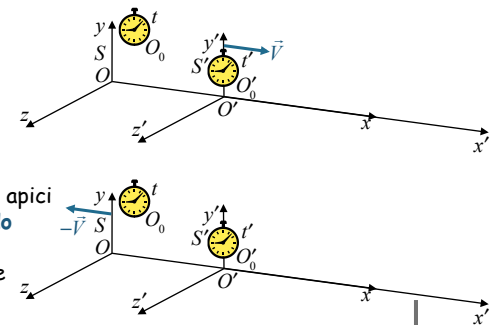


- Utilizzando questi simboli si può scrivere:

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \begin{cases} \beta = \frac{V}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2}x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- Si possono ottenere **invertendo** le precedenti trasformazioni:
 - Ovvero ricavando le 4 variabili senza apici t, x, y e z in funzione delle 4 variabili con apici t', x', y' e z' dalle precedenti relazioni.
 - Si tratta in questo caso di risolvere un sistema di 4 equazioni in 4 incognite di I grado.
- Si possono anche ottenere, **più semplicemente**, applicando il **principio di relatività**:
 - Reciprocità** del moto relativo dei due SdR:
 - Se S si muove rispetto a S' con velocità V allora S' si muove rispetto a S con velocità $-V$.
 - Scambiando** tra loro coordinate **con** apici e coordinate **senza** apici e **invertendo** contemporaneamente il **verso della velocità relativa**, si devono ottenere relazioni altrettanto valide.



- Si ha quindi:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct = \gamma (ct' + \beta x') \\ x = \gamma (x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- È chiaro che nel limite $V \ll c$ si ha:

$$\beta = \frac{V}{c} \xrightarrow{V \ll c} 0 \Rightarrow \frac{V}{c^2} \xrightarrow{V \ll c} 0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{V \ll c} 1$$

e dunque, come atteso:

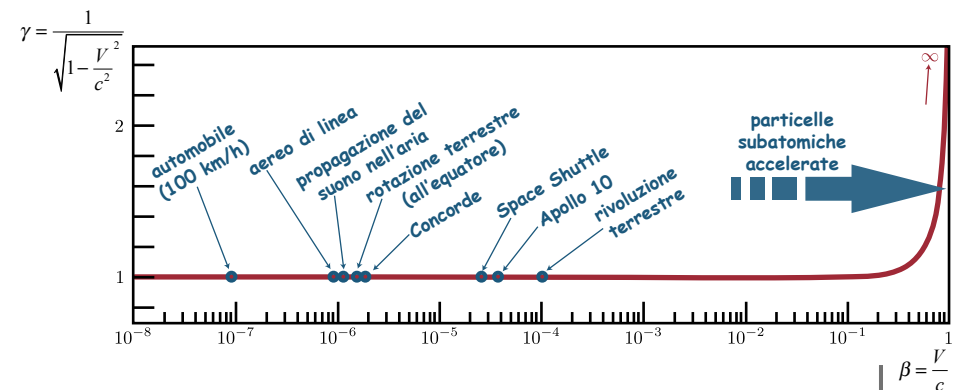
$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{V \ll c} \begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Lorentz

Galileo

- Einstein comprese che le **regole** con cui le leggi della natura si **trasformano** nel passaggio da un SdR all'altro hanno **origine unicamente** nelle **proprietà dello spazio-tempo**:
 - Devono quindi essere **uguali** per **tutti i fenomeni**:
 - **Meccanici** ed **elettromagnetici**.
- D'altro canto le **trasformazioni di Galileo** avevano ottenuto un **ottimo accordo sperimentale** con la **meccanica** dei corpi macroscopici con velocità molto inferiori alla velocità della luce (**dominio di applicabilità** delle trasformazioni di Galileo).
- Affinché le trasformazioni di Lorentz mantengano l'**accordo sperimentale** delle trasformazioni di Galileo nel loro dominio di applicabilità è necessario che esse **si riducano alle trasformazioni di Galileo nel limite $V \ll c$** .

- **Deviazione** delle previsioni della relatività di **Einstein** da quella di **Galileo** all'aumentare della velocità del moto:
 - Dipendenza del **fattore di Lorentz γ** dal **parametro di velocità β** .



- Nelle trasformazioni di Lorentz il **fattore di Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

diverge per $V \rightarrow c$ e **non è reale** per $V > c$:

$$\lim_{V \rightarrow c} \gamma = \infty$$

$$V > c \Rightarrow \gamma \notin \mathbb{R}$$

- Questo pone un **limite superiore** per la norma della **velocità** di **traslazione reciproca** dei SdR:

$$V < c$$

Trasformazioni delle Velocità (II)

- Otteniamo quindi le leggi di trasformazione delle velocità:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \\ v_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \end{cases}$$

Trasformazioni delle Velocità

- Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

si ottiene:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma (x - Vt)}{\gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{x - Vt}{t - \frac{V}{c^2} x} = \frac{\frac{x}{t} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{y}{t} \frac{1}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v'_z = \frac{z'}{t'} = \frac{z}{\gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)} = \frac{1}{\gamma} \frac{z}{t} \frac{1}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{x}{t}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

Trasformazioni delle Velocità (III)

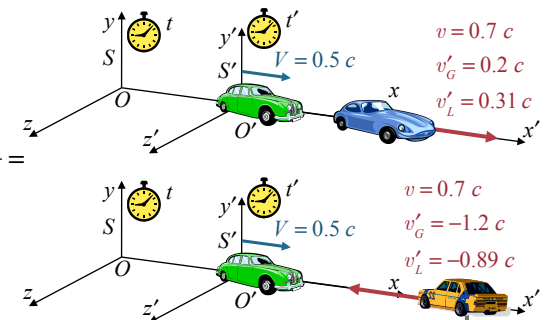
- Nell'**esempio** in figura le due auto si muovono con velocità $0.5c$ e $0.7c$ nel SdR della strada.

- La velocità di un'auto rispetto all'altra, con le trasformazioni di **Galileo**, sarebbe:

$$v'_G = v - V = \pm 0.7c - 0.5c = \begin{cases} 0.2c \\ -1.2c < -c \end{cases}$$

- Utilizzando invece le trasformazioni di **Lorentz**, si ha:

$$v'_L = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2} v} = \frac{\pm 0.7c - 0.5c}{1 - \frac{0.5c}{c^2} (\pm 0.7c)} = \begin{cases} 0.31c \\ -0.89c \end{cases}$$

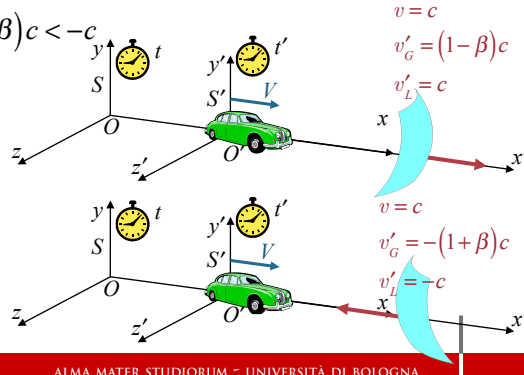


- Nell'esempio in figura l'auto si muove con velocità βc nel SdR della strada.
- La velocità dell'onda rispetto all'auto, con le trasformazioni di **Galileo**, sarebbe:

$$v'_G = v - V = \pm c - \beta c = \begin{cases} (1 - \beta)c \\ -(1 + \beta)c < -c \end{cases}$$

- Utilizzando invece le trasformazioni di **Lorentz**, si ha:

$$v'_L = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c^2}v} = \frac{\pm c - \beta c}{1 - \frac{\beta c}{c^2}(\pm c)} = \frac{(\pm 1 - \beta)c}{1 \mp \beta} = \begin{cases} c \\ -c \end{cases}$$



- La velocità del fronte d'onda **vale** dunque **sempre c** nella meccanica relativistica:
 - Qualsiasi sia β ;
 - Cioè in qualsiasi sistema di riferimento in moto rispetto a S.
- La **velocità della luce nel vuoto** rappresenta quindi un **limite**:
 - Non può essere oltrepassato nemmeno componendo tra di loro velocità prossime o uguali a quelle della luce.



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

<http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli>

<https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica>