FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Lunghezza e Tempo

Relatività, Energia e Ambiente

Fano (PU), Liceo Scientifico "Torelli", 30 maggio 2012

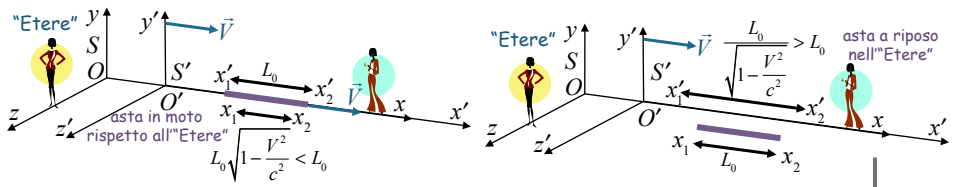
http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Vincenzo Vagnoni Digitally signed by Vincenzo Vagnoni DN: c=IT, o=INFN, ou=Personal Certificate, cn=Vincenzo Vagnoni Date: 2012.06.27 21:45:58 +01'00'

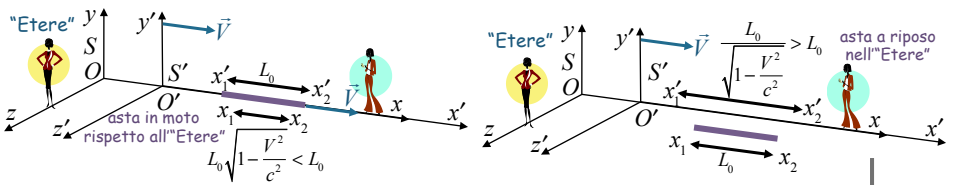
La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz

- L'idea di una contrazione delle lunghezze lungo la direzione del moto nasce per spiegare il fallimento dell'esperimento di Michelson e Morley (**contrazione di Fitzgerald-Lorentz**).
- L'**idea** era quella di una **contrazione** degli **oggetti** in **moto rispetto** all'"**Etere Luminifero**".
- Si pensava a una effettiva **deformazione** dei corpi.
- La ragione della contrazione era attribuita a **effetti elettromagnetici** dovuti a una sorta di **interazione** tra il materiale del corpo in movimento e quello dell'"Etere Luminifero".



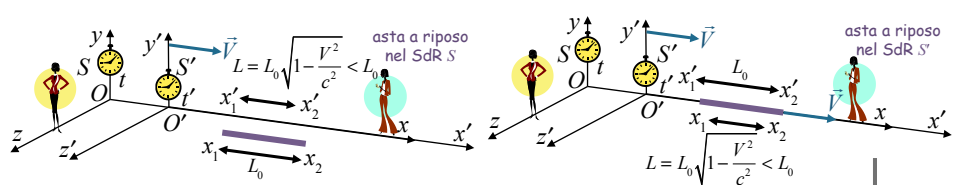
La Contrazione di Fitzgerald-Lorentz (II)

- La **massima lunghezza** si sarebbe osservata per un'asta in quiete nel **SdR** dell'"**Etere Luminifero**".
- L'**osservatore** dell'"**Etere Luminifero**" sarebbe stato l'**unico** osservatore che ha il "**privilegio**" di vedere **contratti tutti gli oggetti che si muovono** rispetto a lui:
  - Gli **altri osservatori** avrebbero dovuto vedere **allungati** gli **oggetti** che si trovano nell'**etere** (perché **si accorcia il metro** con cui misurano, tarato nel SdR dell'etere).



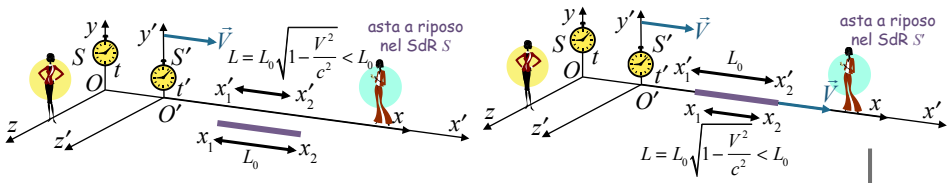
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze

- Vedremo ora, sulla base delle Trasformazioni di Lorentz, che una **contrazione delle lunghezze**, nella direzione del moto relativo dei 2 SdR, si può osservare effettivamente.
- Si tratta tuttavia di una contrazione dovuta alla **natura dello spazio-tempo**:
  - In particolare, alle sue **proprietà di trasformazione** nel passaggio da un SdR inerziale a un altro.
  - La **distanza** tra **due punti nello spazio dipende** dal **SdR**.



La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (II)

- **Non** ci sono **SdR privilegiati**:
  - I SdR inerziali sono tutti tra loro **equivalenti**.
  - Se un **osservatore** nel **SdR** S vede un'**asta** nel **SdR** S' **accorciata**, parimenti un **osservatore** nel **SdR** S' vede un'**asta** nel **SdR** S **accorciata** (**reciprocità**).
- La **massima lunghezza** si osserva nel **SdR in cui** l'**asta** è **a riposo**.

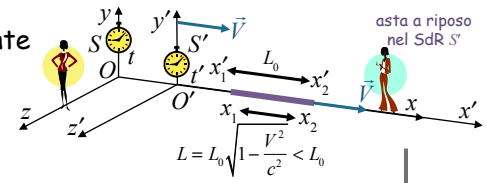


La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (III)

- Supponiamo che l'asta, di **lunghezza a riposo** L_0, sia posta in **quiete** nel **SdR** S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate x_1' e x_2':
  - Essendo l'asta in **quiete** nel **SdR** S', la **posizione** dei suoi due **estremi** nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

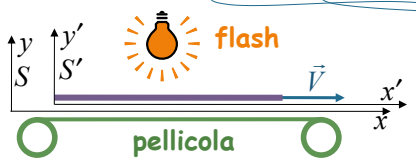
Dove coordinate x_1' e x_2', essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.

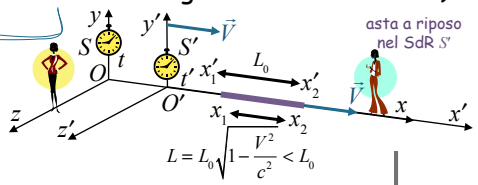


La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (IV)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in **moto** nel **SdR** S, la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t_m, segnato dagli **orologi del SdR** S.
  - Flash e pellicola in quiete nel SdR S.
  - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** nel **SdR** S.

$$L = x_2(t_m) - x_1(t_m)$$ (misura **simultanea** degli estremi nel SdR S)





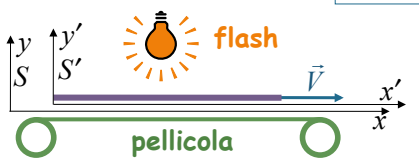
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (V)

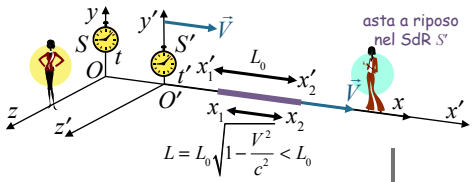
- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in** S e non in S', per cui noi conosciamo t e non t'.

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$





La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VI)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

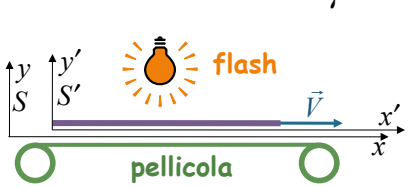
$$\begin{cases} x_1' = \gamma\left(x_1 - Vt_1\right) \\ x_2' = \gamma\left(x_2 - Vt_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \gamma\left[x_1\left(t_m\right) - Vt_m\right] \\ x_2' = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) - Vt_m\right] \end{cases}$$

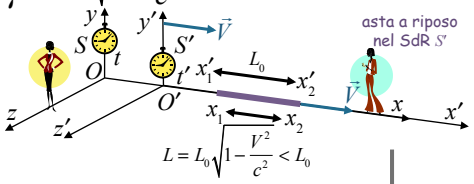
$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

da cui:

$$x_2' - x_1' = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) - \cancel{Vt_m} - x_1\left(t_m\right) + \cancel{Vt_m}\right] = \gamma\left[x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right)\right]$$

$$L = x_2\left(t_m\right) - x_1\left(t_m\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x_2' - x_1'\right) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$





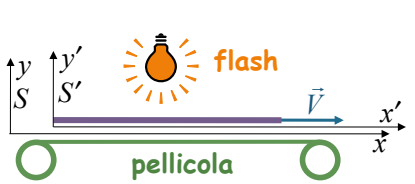
La Contrazione Relativistica delle Lunghezze (VII)

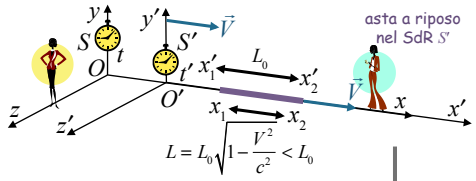
- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **più corta nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

(**contrazione relativistica delle lunghezze**)

- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



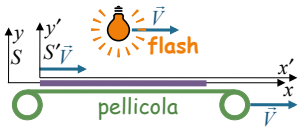


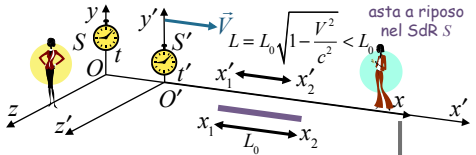
Reciprocità

- Supponiamo ora che l'asta, di **lunghezza a riposo L_0**, sia posta in **quiete** nel SdR S, mentre il SdR S' si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Supponiamo che gli **estremi** dell'asta, nel **SdR S**, abbiano coordinate x_1 e x_2:
  - Essendo l'asta in **quiete** nel **SdR S**, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

$$L_0 = x_2 - x_1$$

dove coordinate x_1 e x_2, essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.



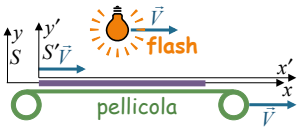


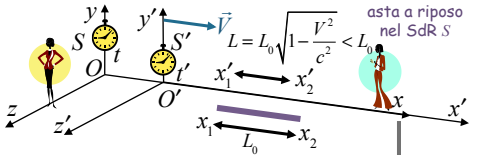
Reciprocità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S'.
- Poiché l'asta è in **moto** rispetto al **SdR S'**, la **posizione** dei due **estremi**, $x'_1(t)$ e $x'_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**. Supponiamo di misurare gli estremi, mediante una **foto con flash**, nell'istante t'_m, segnato dagli **orologi del SdR S'**.
  - Flash e pellicola in quiete in S'.
  - Cioè misura degli estremi **simultaneamente** in S'.

$$L = x_2'\left(t_m'\right) - x_1'\left(t_m'\right)$$

(misura **simultanea** degli estremi nel SdR S')



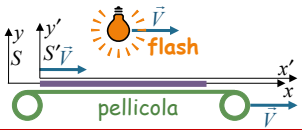


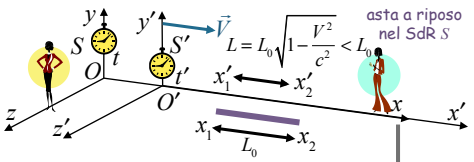
Reciprocità (III)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S'** e non in S, per cui noi conosciamo t' e non t.





Reciprocità (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

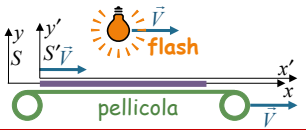
$$\begin{cases} x_1 = \gamma\left(x'_1 + Vt'_1\right) \\ x_2 = \gamma\left(x'_2 + Vt'_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma\left[x'_1\left(t'_m\right) + Vt'_m\right] \\ x_2 = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) + Vt'_m\right] \end{cases}$$

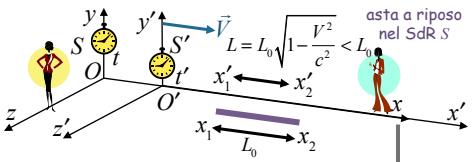
$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$x_2 - x_1 = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) + \cancel{Vt'_m} - x'_1\left(t'_m\right) - \cancel{Vt'_m}\right] = \gamma\left[x'_2\left(t'_m\right) - x'_1\left(t'_m\right)\right]$$

$$L = x'_2\left(t'_m\right) - x'_1\left(t'_m\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x_2 - x_1\right) = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$



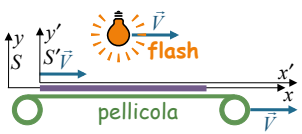


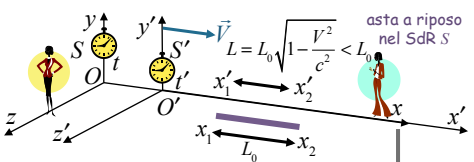
Reciprocità (V)

- L'asta è **più corta nel SdR S'**.
- Dunque, non ostante noi abbiamo invertito le parti, (asta a riposo nel SdR S, invece che asta a riposo nel SdR S') per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'asta è **sempre più corta nel SdR**, nel quale l'**asta è in moto**.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0$$

- Il SdR in cui la **lunghezza** dell'asta è **massima** è il SdR in cui l'asta è **a riposo** (**lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**).



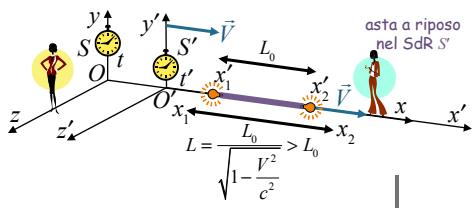


Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità

- Supponiamo, **come nel primo caso esaminato**, che l'asta, di **lunghezza a riposo L_0**, sia posta in **quiete** nel SdR S', il quale si muove con velocità V rispetto al SdR S.
- Gli estremi dell'asta, nel SdR S', abbiano coordinate x'_1 e x'_2:
  - Essendo l'asta in **quiete** nel **SdR S'**, la posizione dei suoi due estremi nel SdR S' **non cambia nel tempo**, per cui **non** è necessario misurare **simultaneamente** la loro posizione.
- Si ha dunque:

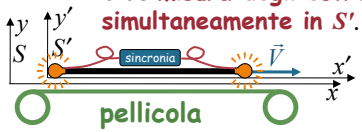
$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

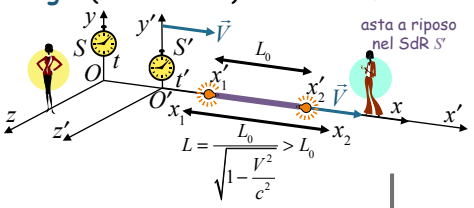
dove coordinate x'_1 e x'_2, essendo **costanti**, si riferiscono a un istante arbitrario.



Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (II)

- Vogliamo determinare ora la lunghezza L dell'asta nel SdR S.
- Poiché l'asta è in **moto** nel **SdR S**, la posizione dei due estremi, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, **cambia nel tempo**.
- Occorre stabilire **in quali istanti** se ne **misurano gli estremi**.
- **A differenza del caso precedente**, supponiamo di mettere **sull'asta** (solidale a essa) un dispositivo **lampeggiatore** (orologio), collegato con **2 fili di ugual lunghezza** a due **lampade poste alle 2 estremità dell'asta** e con il lampo delle due lampade impressioniamo una **pellicola in quiete nel SdR del laboratorio**:
  - Il lampo si ha nell'istante t'_m, dell'**orologio** (sulla sbarra) **del SdR S'**.
  - Pellicola in quiete in S.
  - Cioè **misura degli estremi in S simultaneamente in S'**.

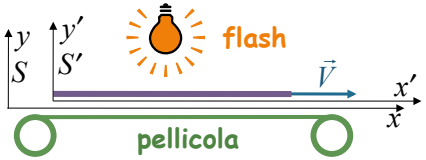




Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (III)

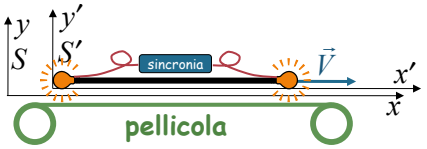
- Misura degli estremi dell'asta **nel SdR S, simultaneamente nel SdR S** (caso precedente):

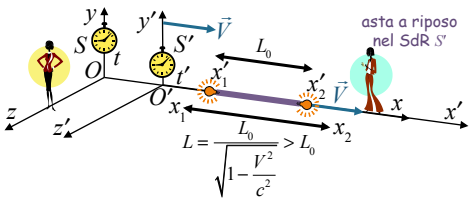
$$L = x_2(t_m) - x_1(t_m)$$



- Misura degli estremi dell'asta **nel SdR S, simultaneamente nel SdR S '** (presente caso):

$$L = x_2(t'_m) - x_1(t'_m)$$



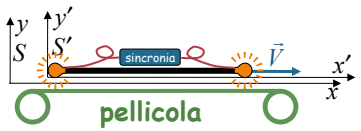


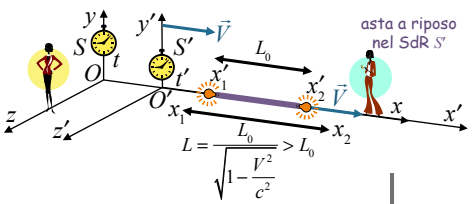
Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (IV)

- Le relazioni tra le posizioni degli estremi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure degli estremi sono **simultanee in S'** e non in S, per cui noi conosciamo t' e non t.





Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (V)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 estremi dell'asta:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1) \\ x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t'_m) = \gamma\left[x'_1 + Vt'_m\right] \\ x_2(t'_m) = \gamma\left[x'_2 + Vt'_m\right] \end{cases}$$

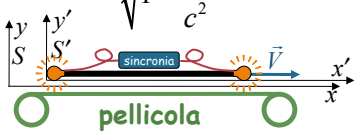
da cui:

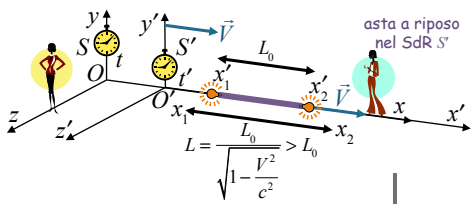
$$x_2(t'_m) - x_1(t'_m) = \gamma\left[x'_2 + \cancel{Vt'_m} - x'_1 - \cancel{Vt'_m}\right] = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

$$L = x_2(t'_m) - x_1(t'_m) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L_0 =$$

$$= \frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$

$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$



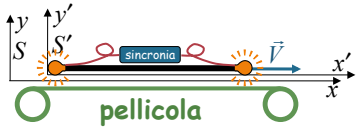


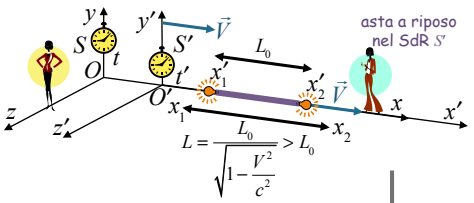
Le Lunghezze si Possono Anche Dilatare: È Questione di Simultaneità (VI)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Dunque, questa volta, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, e a causa della **differente scelta** di **simultaneità** delle misure, l'asta è **più lunga** **nel SdR S**, nel quale l'asta è in **moto**.

$$L = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > L_0$$



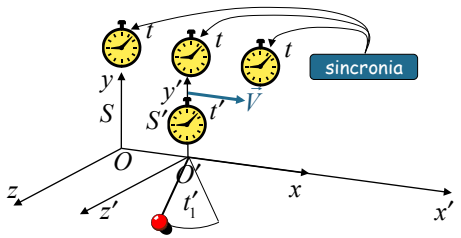


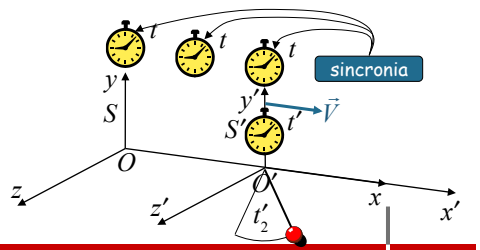
La Dilatazione Relativistica dei Tempi

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Consideriamo la misura della **durata di un evento** che ha luogo in una **posizione x' fissa** nel **SdR S'** (per esempio il **sempieriodo** dell'**oscillazione di un pendolo**).
- L'orologio posto in x' (fermo rispetto a S') misura il tempo t'_1 quando l'evento ha inizio e t'_2 quando l'evento termina.
- La durata dell'evento misurata da S' è quindi

$$T_0 = t'_2 - t'_1$$



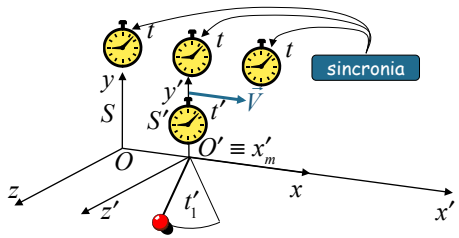


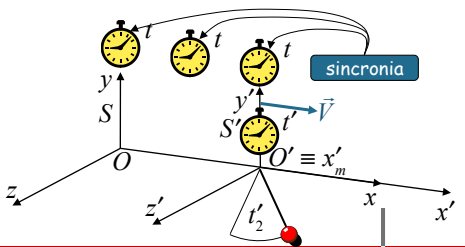
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (II)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Vogliamo ora determinare il **semiperiodo** del pendolo nel **SdR S**, rispetto al quale il SdR S' si muove con velocità V.
- Poiché il pendolo è in **moto** nel **SdR S**, la **posizione del pendolo** nei due istanti t_1 e t_2, è **diversa**: $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$.
- Occorre stabilire **in quali posizioni** si **misurano i 2 tempi**. Supponiamo di misurare i 2 tempi, nella posizione x'_m, fissa **nel SdR S'**, a cui però corrisponderanno 2 posizioni diverse nel SdR S:

$$T = t_2\left(x'_m\right) - t_1\left(x'_m\right)$$ (misure **nella stessa posizione** nel SdR S')





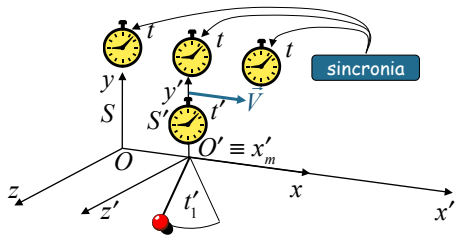
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (III)

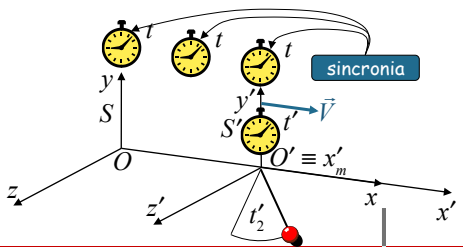
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Le relazioni tra i tempi nei due SdR è data dalle trasformazioni di Lorentz (**dirette** o **inverse**):

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ci interessa questa formula perché le misure dei tempi sono **nello stessa posizione in S'** e non in S, per cui noi conosciamo x' e non x.





La Dilatazione Relativistica dei Tempi (IV)

- Dalle trasformazioni di Lorentz (**inverse**) otteniamo, in particolare, per i 2 istanti:

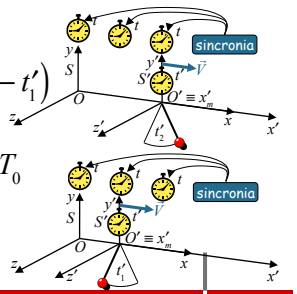
$$\begin{cases} t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_1\right) \\ t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(x'_m) = \gamma\left(t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_m\right) \\ t_2(x'_m) = \gamma\left(t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_m\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \\ x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

da cui:

$$t_2(x'_m) - t_1(x'_m) = \gamma\left[t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_m - t'_1 - \frac{V}{c^2}x'_m\right] = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

$$T = t_2(x'_m) - t_1(x'_m) = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > T_0$$



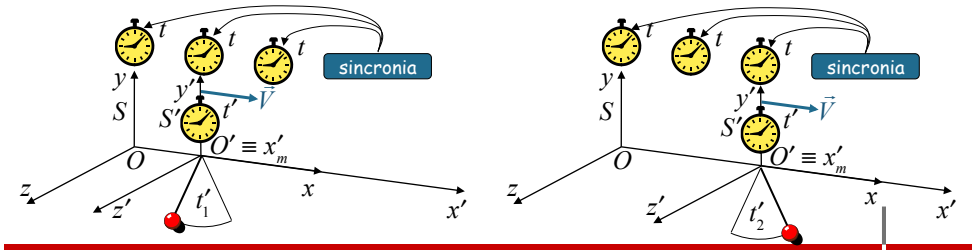
La Dilatazione Relativistica dei Tempi (V)

- Dunque, per effetto delle trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo è **più lungo nel SdR S**, nel quale il pendolo è in **moto**:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > T_0$$

(**dilatazione relativistica dei tempi**)

- Il SdR in cui **il periodo del pendolo è minimo** è il SdR in cui il pendolo è **a riposo** (**tempo proprio**).



Reciprocità

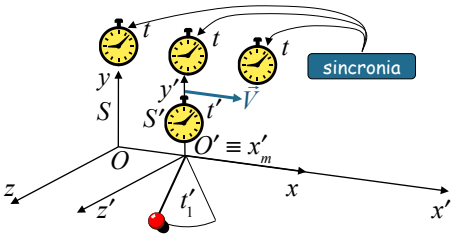
- L'effetto di dilatazione dei tempi deve essere completamente **reciproco** e **non** determinare il **privilegio** di nessun SdR rispetto agli altri.
- Cosideriamo un SdR S' in moto relativo rispetto al SdR S.
- Un **orologio fisso in S'** è visto in moto da un osservatore in S il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Tuttavia è vero anche che un **orologio fisso in S** è visto in moto da un osservatore in S' il quale dunque lo vede rimanere **indietro**.
- Come si possono **conciliare** queste due affermazioni?
  - **Qual è** l'**orologio** che veramente **rimane indietro** rispetto all'altro?
  - **Qual è** l'**orologio** che invece **va avanti** rispetto all'altro?

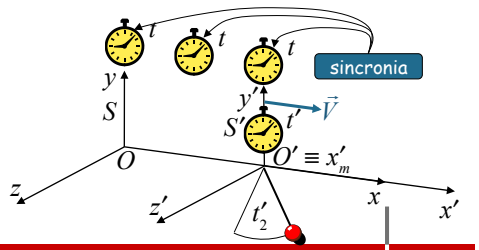
Reciprocità (II)

- La chiave della risposta sta nel **procedimento di confronto degli orologi**.
- Per confrontare i tempi in un certo istante, occorre potere disporre di **due orologi** che **in quell'istante** si trovano **nella stessa posizione**:
  - Altrimenti non è possibile definire **univocamente** la **simultaneità** della misura del tempo da parte dei 2 orologi.
- Occorre dunque potere disporre, **almeno in uno dei 2 SdR**, di una **successione di orologi sincronizzati** tra loro.
  - P. es. mediante un dispositivo di sincronismo che comanda tutti gli orologi della successione mediante cavi elettrici della stessa lunghezza.
- Nell'altro SdR è sufficiente un **orologio singolo**.

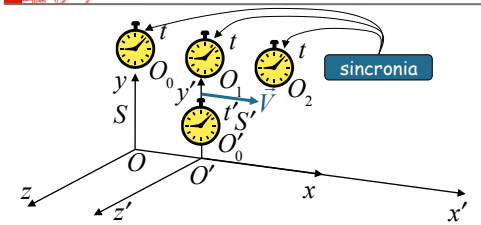
Reciprocità (III)

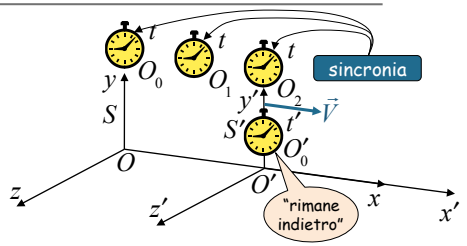
- Nel **nostro calcolo** abbiamo supposto di misurare sia il tempo t_1, sia il tempo t_2 nel punto alla coordinata x'_m, che è **fisso nel SdR S'** ma che **si muove nel SdR S**.
- Questo significa che abbiamo bisogno di **un solo orologio** nel SdR S' ma di **almeno 2 orologi** nel SdR S.
- L'orologio che rimane **indietro** è quello nel SdR S' cioè l'**orologio singolo** che viene confrontato con 2 orologi.



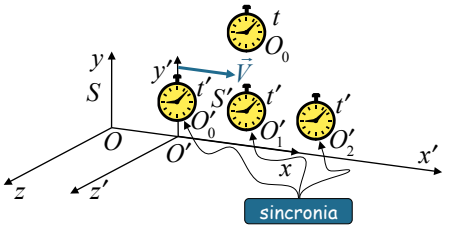


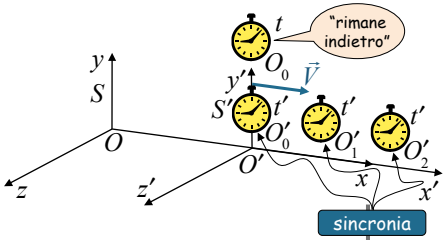
Reciprocità (IV)





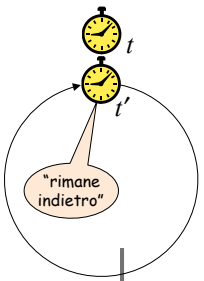
- In generale rimane **indietro** l'**orologio singolo** che viene confrontato con la successione di orologi.



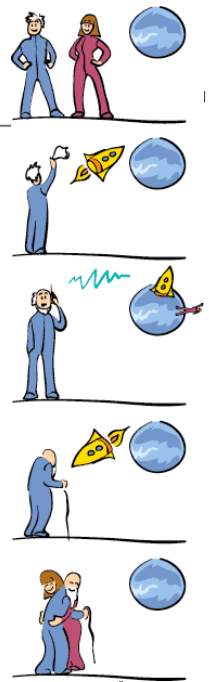


Reciprocità (V)

- Che cosa succede se si prendono 2 orologi:
  - Uno fisso in un certo SdR inerziale;
  - Uno che, partendo dallo stesso punto, descrive una **traiettoria chiusa** e ritorna al punto di partenza?
- In questo caso il calcolo è più complicato perché l'orologio in moto si trova in un **SdR non-inerziale** (non è in moto traslatorio rettilineo e uniforme rispetto a un SdR inerziale).
- Tuttavia si può dimostrare che **rimane indietro l'orologio in moto**.
- La **reciprocità non vale** perché uno dei due SdR non è inerziale.

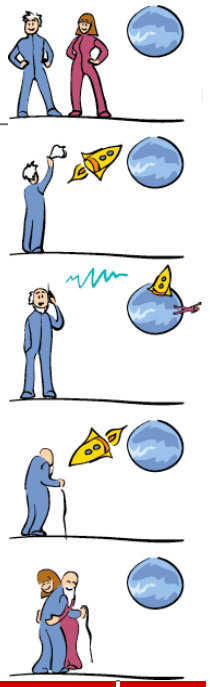


Paradosso dei Gemelli



- **Uno dei due gemelli** parte a bordo di una **navicella spaziale** e compie un lungo viaggio con velocità costante e prossima a quella della luce, lasciando l'**altro gemello** sulla **Terra**.
- Dopo alcuni anni egli ritorna sulla Terra e si ricongiunge al fratello. Per tutto il tempo in cui è stato sulla navicella, il gemello viaggiatore ha vissuto in un mondo in cui lo **scorrere del tempo** e tutti i fenomeni, compresi i **processi biologici** dell'**invecchiamento**, erano **rallentati**.
- Al suo ritorno sulla Terra egli sarà quindi rimasto **più giovane del fratello** che è rimasto **sulla Terra**.

Paradosso dei Gemelli (II)



- Se il **gemello viaggiatore** ha viaggiato per 10 anni (secondo quanto indicato dall'orologio della navicella) a una velocità $v = 0.9\,c$, per il **gemello sulla Terra** sono passati:

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{10 \text{ anni}}{\sqrt{1 - 0.9^2}} = 22.94 \text{ anni}$$

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli
Dipartimento di Fisica
domenico.galli@unibo.it
http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli
https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica

Quadrivettori

Relatività, Energia e Ambiente

Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 30 maggio 2012

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Trasformazioni di Lorentz e Rotazioni

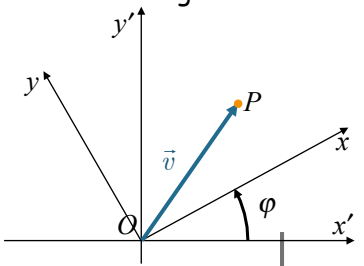
- Consideriamo ora le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- Esse descrivono la trasformazione delle 4 coordinate ct, x, y e z conseguenti al **cambiamento di SdR**, da un SdR inerziale a un altro.
- **Confrontiamo** queste relazioni con quelle relative a una **rotazione nello spazio ordinario**.

Rotazioni nello Spazio Ordinario

- Supponiamo che nello **spazio ordinario** a 3 dimensioni siano **ruotati gli assi cartesiani** di un **angolo** φ, p. es. attorno all'**asse** z.
- Scriviamo ora le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione** delle **coordinate di un punto** conseguente a tale rotazione.
- Oppure, il che è equivalente, le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione** delle **componenti di un vettore** conseguente a tale rotazione.

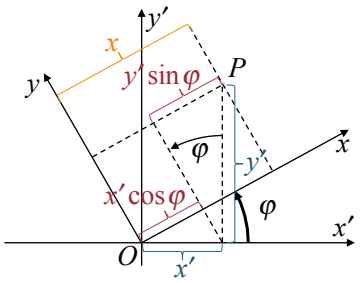


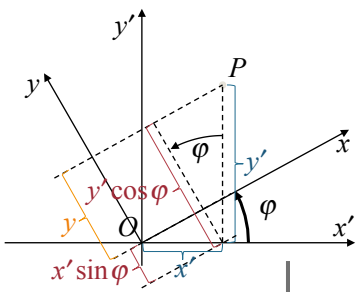
Rotazioni nello Spazio Ordinario (II)

- Come si vede dalle figure si ha:

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

(trasformazioni **inverse**)





Rotazioni nello Spazio Ordinario (III)

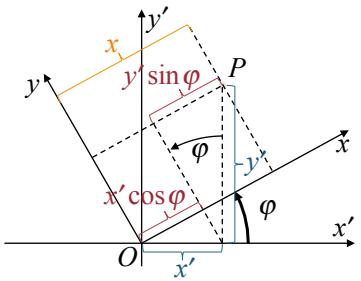
- Per ottenere le **trasformazioni dirette** è sufficiente sostituire le variabili con gli apici a quelle senza apici e viceversa e sostituire all'angolo φ l'angolo $-\varphi$:

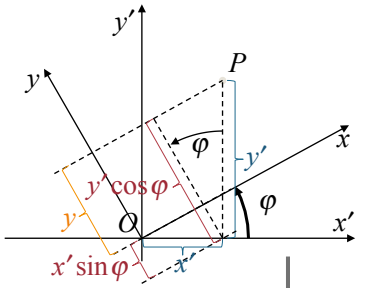
$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi \to -\varphi \\ \cos\varphi \to \cos\varphi \\ \sin\varphi \to -\sin\varphi \\ ct \to ct',\ ct' \to ct \\ x \to x',\ x' \to x \\ y \to y',\ y' \to y \\ z \to z',\ z' \to z \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (IV)

- Le trasformazioni dirette e inverse che descrivono una rotazione attorno all'asse z sono quindi:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$





Rotazioni nello Spazio Ordinario (V)

- Osserviamo che le **rotazioni non modificano** la **distanza d del punto P dall'origine O**:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

$$d' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right)^2 + \left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2\cos^2\varphi + y^2\sin^2\varphi \cancel{-2xy\cos\varphi\sin\varphi} + x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi \cancel{+2xy\sin\varphi\cos\varphi}} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + y^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \sqrt{x^2 + y^2} = d$$

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = d^2$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (VI)

- Questo risultato può essere generalizzato a una **generica rotazione nello spazio 3-dimensionale**:

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

- La **distanza di un punto P dall'origine O** è un **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.
- La **norma di un vettore** è **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.

Rapidità

- Vediamo ora di scrivere le trasformazioni di Lorentz in una forma simile.
- Definiamo una nuova grandezza **adimensionale** (**numero puro**) chiamata **rapidità** φ:

$$\varphi = \ln\left[\gamma(1+\beta)\right]$$

- Si ha:

$$\varphi = \ln\left[\gamma(1+\beta)\right] = \ln\left[\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1-\beta)}\right]$$

Rapidità (II)

- Dunque la **rapidità** si può anche scrivere come:

$$\varphi = \ln\left[\gamma(1+\beta)\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1-\beta)}\right]$$

- Inoltre si ha:

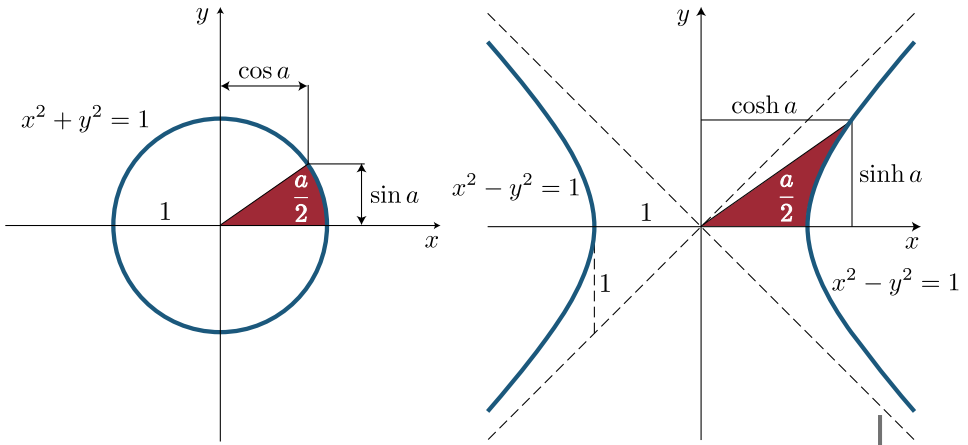
$$-\varphi = -\ln\left[\gamma(1+\beta)\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma(1+\beta)}\right] = \ln\left[\gamma(1-\beta)\right]$$

$$e^{\varphi} = \gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$e^{-\varphi} = \gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

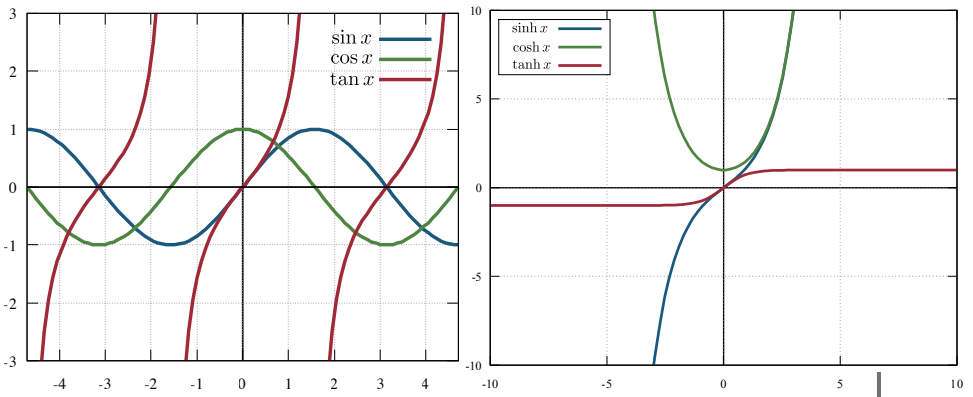
Funzioni Iperboliche

Funzioni Circolari **Funzioni Iperboliche**



Funzioni Iperboliche (II)

Funzioni Circolari **Funzioni Iperboliche**



Funzioni Iperboliche (III)

Funzioni Circolari

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \tan x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} \end{cases}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Funzioni Iperboliche

$$\begin{cases} \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \end{cases}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Rapidità e Funzioni Iperboliche

- Utilizzando le funzioni iperboliche si ha, per la **rapidità** φ:

$$e^{\varphi} = \gamma\left(1+\beta\right)$$
$$e^{-\varphi} = \gamma\left(1-\beta\right)$$
$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(1+\beta\right) - \gamma\left(1-\beta\right)}{2} = \gamma\beta$$
$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(1+\beta\right) + \gamma\left(1-\beta\right)}{2} = \gamma$$

Trasformazioni di Lorentz

- Utilizzando le **funzioni iperboliche** e la **rapidità**, si possono scrivere le **trasformazioni di Lorentz** nella forma:

$$\begin{cases} \gamma\beta = \sinh\varphi \\ \gamma = \cosh\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) = \gamma ct - \gamma\beta x = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) = \gamma x - \gamma\beta ct = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (II)

- Osserviamo che le **trasformazioni di Lorentz** **non modificano la quantità** $s^2 = c^2t^2 - x^2$:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$s' = \sqrt{c^2t'^2 - x'^2} = \sqrt{\left(ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi\right)^2 - \left(-ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi\right)^2} =$$
$$= \sqrt{c^2t^2\cosh^2\varphi + x^2\sinh^2\varphi \cancel{-2ctx\cosh\varphi\sinh\varphi} - c^2t^2\sinh^2\varphi - x^2\cosh^2\varphi \cancel{+2ctx\sinh\varphi\cosh\varphi}} =$$
$$= \sqrt{c^2t^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right) - x^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right)} = \sqrt{c^2t^2 - x^2} = s$$

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 = s^2$$

Trasformazioni di Lorentz (III)

- Confrontiamo ora le **Trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right]$$

con le **rotazioni attorno all'asse** z:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (IV)

- Osserviamo che **rotazioni** e **trasformazioni di Lorentz** sono **analoghe nella forma**:
  - Le **rotazioni** attorno all'asse z "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate x e y;
  - Le **trasformazioni di Lorentz** "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate ct e x.
- Le **trasformazioni di Lorentz** sono analoghe a "**rotazioni**" **tra** lo **spazio e** il **tempo**.

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (V)

- Le differenze stanno nell'uso delle **funzioni circolari** per le **rotazioni** e delle **funzioni iperboliche** per le **trasformazioni di Lorentz**.
- Inoltre (e conseguentemente) c'e' un **segno** relativo diverso nella espressione dell'**invariante**:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 & \text{(rotazioni)} \\ s^2 = c^2t^2 - x^2 & \text{(trasformazioni di Lorentz)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Spazio-Tempo

- Possiamo quindi pensare di formare **punti** e **vettori** in uno **spazio a 4 dimensioni** (**Spazio-Tempo**), con le componenti:

$$\left(ct, x, y, z\right)$$

- Un punto dello Spazio-tempo è detto **evento**.
- Potremo inoltre definire un **invariante** generale (l'**analogo della norma** di un vettore in 3 dimensioni):

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Questo invariante non viene modificato né da una rotazione, né da una trasformazione di Lorentz:
  - Il fatto che questo invariante non si modifichi nelle trasformazioni di Lorentz è una espressione dell'**invarianza della velocità della luce** nel vuoto.

Spazio-Tempo (II)

- Una **rotazione ordinaria** modifica il nostro **punto di vista** spaziale:
  - Può avvenire sui **piani** xy, yz e zx.
- Una **trasformazione di Lorentz** modifica il nostro **punto di vista** facendoci passare da un SdR inerziale a un altro SdR inerziale in moto rispetto al primo:
  - È una "rotazione" che può avvenire sui **piani** tx, ty e tz.
- L'idea di uno spazio-tempo 4-dimensionale è di **Hermann Minkowski** (1864-1909).
  - Questo particolare spazio è detto perciò **spazio di Minkowski**.

Spazio-Tempo (III)

- Un **punto materiale** è rappresentato da una linea nello **spazio-tempo**, denominata **linea d'universo**.
- Un oggetto che occupa spazio e che si estende per una certa durata di tempo occupa una specie di "**bolla**" nello spazio-tempo.
  - Quando ci muoviamo a **diverse velocità** vediamo questa bolla da un **diverso punto di vista**.

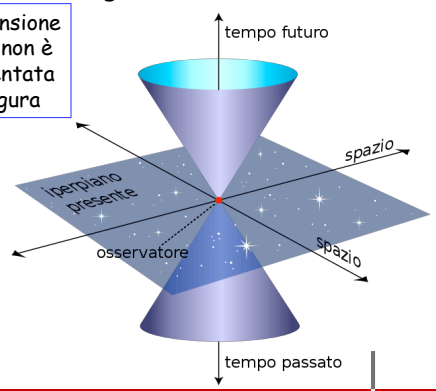
Spazio-Tempo (IV)

- Dato un evento (ct_0, x_0, y_0, z_0), la "**iper-superficie**" conica nello spazio-tempo a 4 dimensioni di equazione:

$$c^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0$$

(**cono di luce**) divide lo spazio-tempo in 3 regioni distinte:
  - **Passato assoluto**;
  - **Futuro assoluto**;
  - **Separazione assoluta**.
- La linea di universo di un **fotone** sta **sulla superficie del cono di luce**.
- La linea di universo di una **particella con massa** sta **entro il cono di luce**.

Una dimensione spaziale non è rappresentata nella figura



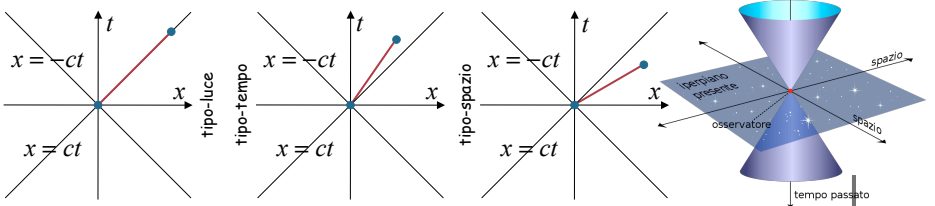
Spazio-Tempo (V)

- La **proprietà** di un evento, per esempio (ct_2, x_2, y_2, z_2), di trovarsi **entro il cono di luce di un altro evento**, per esempio (ct_1, x_1, y_1, z_1), **non dipende dal SdR**. (è invariante per trasformazioni di Lorentz).
- Gli **intervalli** dello **spazio-tempo** si classificano in:

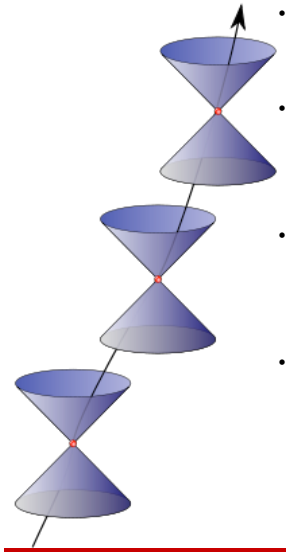
$$c^2(t_2-t_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad \textbf{tipo-luce}$$

$$c^2(t_2-t_1)^2>(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad \textbf{tipo-tempo}$$

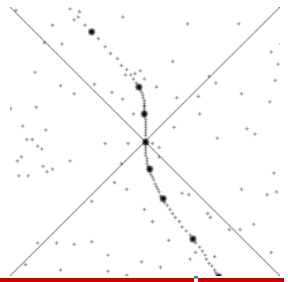
$$c^2(t_2-t_1)^2<(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad \textbf{tipo-spazio}$$



Spazio-Tempo (VI)



- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-tempo** vi **può** essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-spazio** **non** vi **può** essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-luce** vi può essere un nesso con un segnale luminoso.
- L'intervallo tra due punti della **linea di universo** di un punto materiale è sempre di **tipo-tempo**.



Quadri-Vettori

- Si chiama **quadri-vettore** o **4-vettore**, un vettore dello **spazio di Minkowski**.
- Un esempio di quadrivettore è costituito dalle **4 coordinate** di un **evento**:

$$\bar{s} = \left(ct, \vec{r}\right) = \left(ct, x, y, z\right)$$

- È un 4-vettore anche l'**intervallo di universo** tra due eventi:

$$\Delta\bar{s} = \left(c\Delta t, \Delta\vec{r}\right) = \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \left(c\left(t_2 - t_1\right),\ x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right)$$

Norma di un Quadri-Vettore

- La **norma di Minkowski** di un **4-vettore** dello **spazio di Minkowski**:

$$\bar{s} = \left(ct, \vec{r}\right) = \left(ct, x, y, z\right)$$

si calcola come:

$$\left\|\bar{s}\right\| = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

(si osservi il **segno "+"** nella **coordinata temporale** e il **segno "–"** nelle **coordinate spaziali**).

- Così per il 4-vettore:

$$\Delta\bar{s} = \left(c\Delta t, \Delta\vec{r}\right) = \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \left(c\left(t_2 - t_1\right), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$

si ha:

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\| = \sqrt{c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

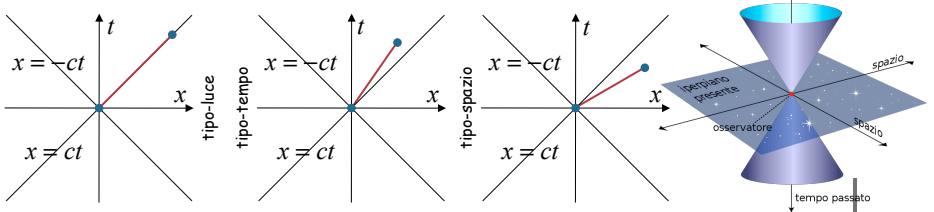
Norma di un Quadri-Vettore (II)

- Avremo pertanto, per gli **intervalli** dello **spazio-tempo**:

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| = 0 \qquad \textbf{tipo-luce}$$

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| \in \mathbb{R} \qquad \textbf{tipo-tempo}$$

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| \in \Im \qquad \textbf{tipo-spazio}$$



FONDAZIONE
GIUSEPPE OCCHIALINI

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Dinamica Relativistica

Relatività, Energia e Ambiente

Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 30 maggio 2012

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

La Generalizzazione Relativistica delle Leggi della Meccanica

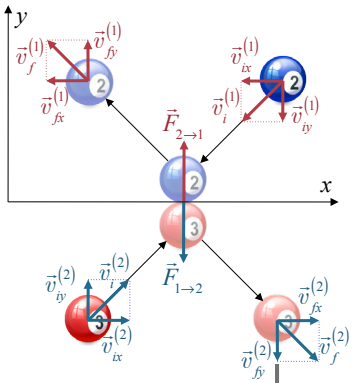
- **Principio d'inerzia** ereditato dalla meccanica classica:
  - Definisce la classe dei **SdR inerziali** e ne postula l'**esistenza**.
- **Covarianza** rispetto alle **trasformazioni di Lorentz**:
  - La nuova legge così soddisferà, automaticamente, il **principio di relatività** ed il postulato dell'**invarianza della velocità della luce**.
- Validità del **principio di corrispondenza**:
  - **Grandezze** e le **leggi fisiche**, nella loro nuova formulazione, devono ricondursi a quelle classiche nel **limite di velocità piccole** rispetto a quella della luce.

Conservazione della Quantità di Moto

- Consideriamo l'**urto elastico** in figura tra due sfere di **uguale massa** m.
- Consideriamo un **SdR** S in cui le **due sfere** abbiano **inizialmente velocità opposte**:

$$\vec{v}_i^{(1)} = -\vec{v}_i^{(2)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

- Quando le due sfere **urtano**, **per i loro centri** passa una **retta parallela all'asse** y.
- La **forza d'urto** F è perciò **parallela all'asse** y.
- Nell'urto **si invertono** perciò le **componenti** y **delle velocità**, mentre le **componenti** x restano **invariate**.



Conservazione della Quantità di Moto (II)

- In termini matematici:

$$\begin{cases} \vec{v}_i^{(1)} = -a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_i^{(2)} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_f^{(1)} = -a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} \\ \vec{v}_f^{(2)} = a\hat{\imath} - b\hat{\jmath} \end{cases}$$

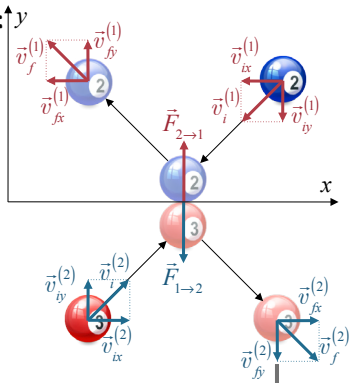
- La quantità di moto totale prima dell'urto è:

$$\vec{Q}_i = m\vec{v}_i^{(1)} + m\vec{v}_i^{(2)} = \\ = m\left[-a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

- Mentre dopo l'urto è:

$$\vec{Q}_f = m\vec{v}_f^{(1)} + m\vec{v}_f^{(2)} = \\ = m\left[-a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right] + m\left[a\hat{\imath} - b\hat{\jmath}\right] = \vec{0}$$

- Dunque la **quantità di moto si conserva** nell'urto.



Trasformazioni di Galileo

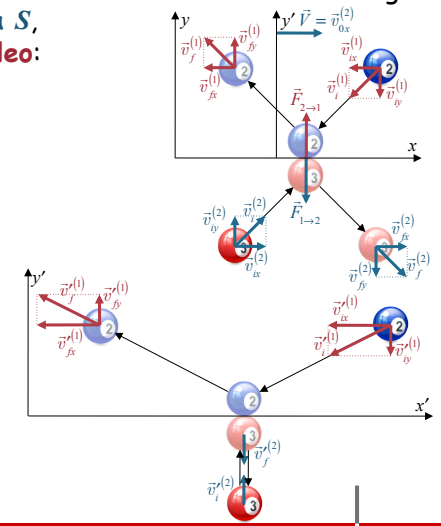
- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto in un **SdR S'** che si muove lungo l'asse x, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Galileo**:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = v^{(1)}_{ix} - V = -a - a = -2a \\ v'^{(1)}_{iy} = v^{(1)}_{iy} = -b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{ix} = v^{(2)}_{ix} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = v^{(2)}_{iy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = v^{(1)}_{fx} - V = -a - a = -2a \\ v'^{(1)}_{fy} = v^{(1)}_{fy} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = v^{(2)}_{fx} - V = a - a = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = v^{(2)}_{fy} = -b \end{cases}$$



Trasformazioni di Galileo (II)

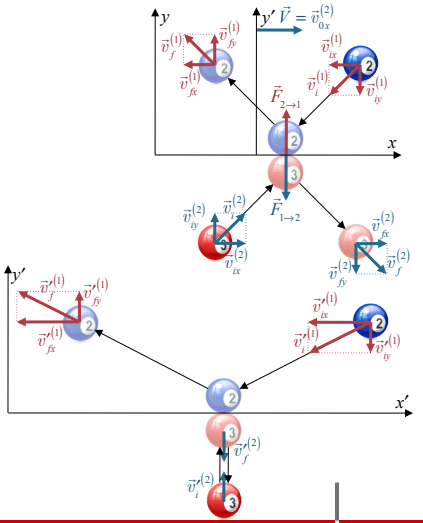
- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = mv'^{(1)}_{ix} + mv'^{(2)}_{ix} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{iy} = mv'^{(1)}_{iy} + mv'^{(2)}_{iy} = -mb + mb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{fx} = mv'^{(1)}_{fx} + mv'^{(2)}_{fx} = -2ma + 0 = -2ma \\ Q'_{fy} = mv'^{(1)}_{fy} + mv'^{(2)}_{fy} = +mb - mb = 0 \end{cases}$$

- Confrontando:

$$\left.\begin{aligned} Q'_{ix} &= Q'_{fx} \\ Q'_{iy} &= Q'_{fy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{Q}'_i = \vec{Q}'_f$$

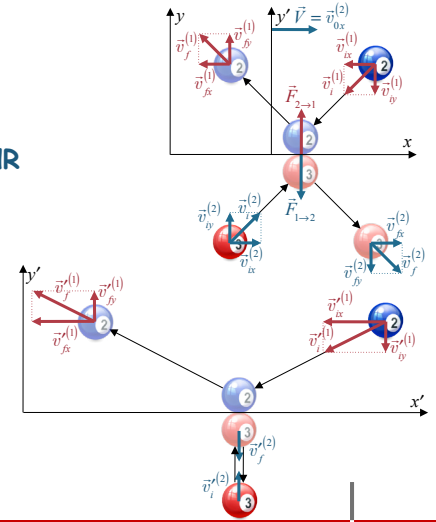


Trasformazioni di Galileo (III)

- La **quantità di moto "classica" si conserva** nell'urto anche nel **SdR S'**.
- Dunque la quantità di moto "classica":

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

si conserva nell'urto **in entrambi i SdR** considerati.



Trasformazioni di Lorentz

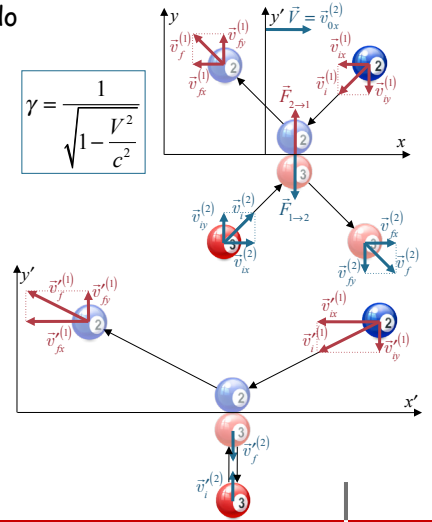
$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

- Consideriamo ora lo **stesso urto**, visto nel **SdR S'** che si muove, con **velocità $V = a$ rispetto a S**, utilizzando le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = \dfrac{v^{(1)}_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{ix}} = \dfrac{-a - a}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \\ v'^{(1)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(1)}_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{ix}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 - \frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{ix} = \dfrac{v^{(2)}_{ix} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{ix}} = \dfrac{a - a}{1 - \frac{a}{c^2}a} = 0 \\ v'^{(2)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(2)}_{iy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{ix}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a}{c^2}a} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1 - \frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Trasformazioni di Lorentz (II)

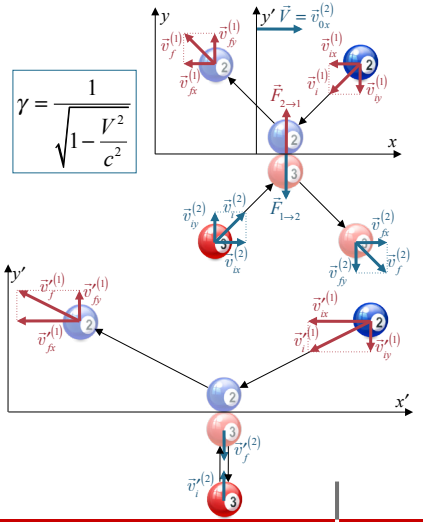
$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

- Analogamente, per le **velocità finali**:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{v^{(1)}_{fx} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{-a-a}{1-\frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(1)}_{fy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(1)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1-\frac{a}{c^2}(-a)} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1+\frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'^{(2)}_{fx} = \dfrac{v^{(2)}_{fx} - V}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{a-a}{1-\frac{a}{c^2}a} = 0 \\ v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{v^{(2)}_{fy}}{1 - \frac{V}{c^2}v^{(2)}_{fx}} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1-\frac{a}{c^2}a} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1-\frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Trasformazioni di Lorentz (III)

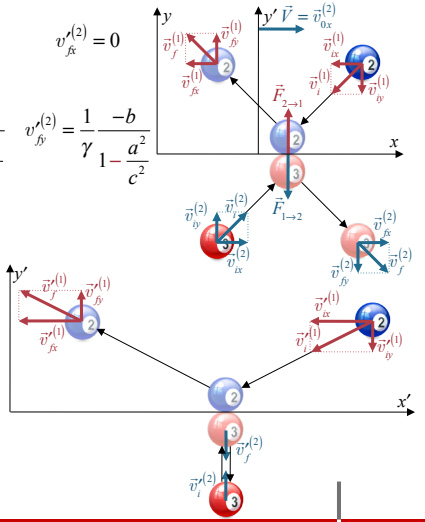
FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per quanto riguarda la quantità di moto:

$$\begin{cases} v'^{(1)}_{ix} = \dfrac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{ix} = 0 \\ v'^{(1)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1+\frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1-\frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'^{(1)}_{fx} = \dfrac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fx} = 0 \\ v'^{(1)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b}{1+\frac{a^2}{c^2}} & v'^{(2)}_{fy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-b}{1-\frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_{ix} = \dfrac{-2ma}{1+\frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{iy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-mb}{1+\frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{mb}{1-\frac{a^2}{c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = \dfrac{-2ma}{1+\frac{a^2}{c^2}} + 0 \\ Q'_{fy} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{mb}{1+\frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{-mb}{1-\frac{a^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



Trasformazioni di Lorentz (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

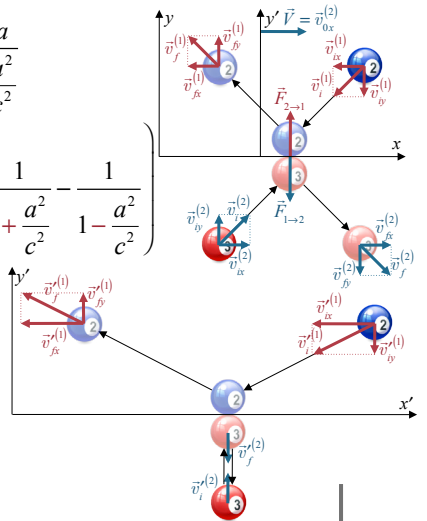
- Da cui:

$$\begin{cases} Q'_{ix} = -\dfrac{2ma}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{iy} = \dfrac{mb}{\gamma}\left(-\dfrac{1}{1+\frac{a^2}{c^2}} + \dfrac{1}{1-\frac{a^2}{c^2}}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} Q'_{fx} = -\dfrac{2ma}{1+\frac{a^2}{c^2}} \\ Q'_{fy} = \dfrac{mb}{\gamma}\left(\dfrac{1}{1+\frac{a^2}{c^2}} - \dfrac{1}{1-\frac{a^2}{c^2}}\right) \end{cases}$$

- Perciò:

$$\left.\begin{aligned} Q'_{ix} &= Q'_{fx} \\ Q'_{iy} &\neq Q'_{fy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{Q}'_i \neq \vec{Q}'_f$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



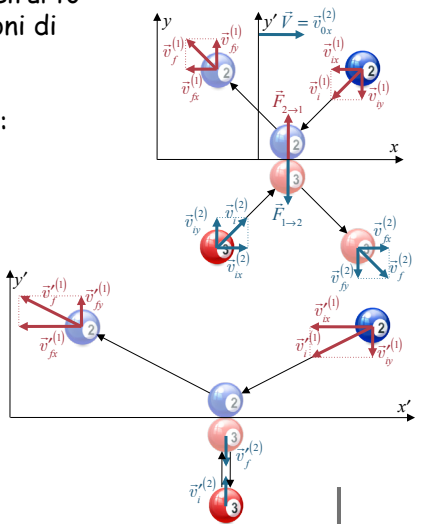
Trasformazioni di Lorentz (V)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- La quantità di moto **non si conserva** nell'urto nel SdR S', utilizzando le trasformazioni di Lorentz.
- Dunque **la quantità di moto "classica"**:

$$\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

si conserva nell'urto nel SdR S ma **non** nel SdR S', se si utilizzano le **trasformazioni di Lorentz** per passare da un SdR all'altro.



Quantità di Moto Relativistica

- Per far sì che il **principio di conservazione della quantità di moto** sia **valido in tutti i SdR** è necessario **ri-definire** la quantità di moto.
- Cerchiamo allora una **nuova definizione** di **quantità di moto** che:
  - Sia **invariante per trasformazioni di Lorentz**;
  - **Si riduca all'espressione classica** nel **limite** $v << c$ (principio di corrispondenza).
- Occorre che la **componente y della quantità di moto** sia **indipendente** dalla **componente x della velocità** del SdR in cui si osserva l'urto.

Quantità di Moto Relativistica (II)

- La componente y della quantità di moto classica si scrive, per un singolo punto materiale:

$$Q_y^{(\text{classica})} = mv_y = m\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

- Il numeratore Δy **non cambia** passando a un SdR in moto relativo lungo x, mentre **cambia** Δt.
- Potremmo allora prendere il **tempo proprio τ invece del tempo t**, perché $\Delta\tau$ **non cambia**:

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$Q_y^{(\text{relativistica})} = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = m\gamma\frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Quantità di Moto Relativistica (III)

- Definiamo quindi la **quantità di moto relativistica**:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

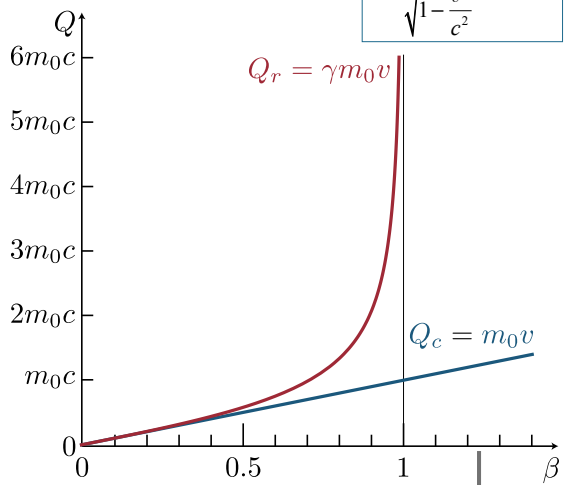
- Poiché risulta:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow[v \ll c]{} 1$$

si ha:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} \xrightarrow[v \ll c]{} m\vec{v}$$

- Dunque il **principio di corrispondenza** è **soddisfatto**.



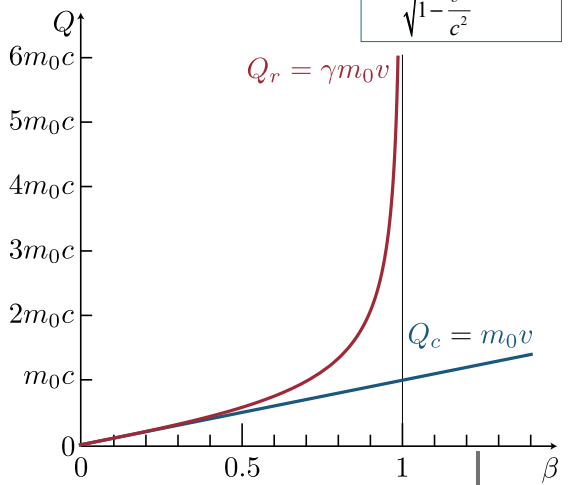
Quantità di Moto Relativistica (IV)

- La **quantità di moto relativistica** così definita:

$$\vec{Q} = \gamma m\vec{v} = mc\gamma\vec{\beta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

si conserva negli **urti** in **tutti** i **SdR inerziali**.



Massa Relativistica

- Possiamo anche esprimere la quantità di moto relativistica (detta m_0 la "**massa classica**") come:

$$\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} = m_0 c \gamma \vec{\beta}$$

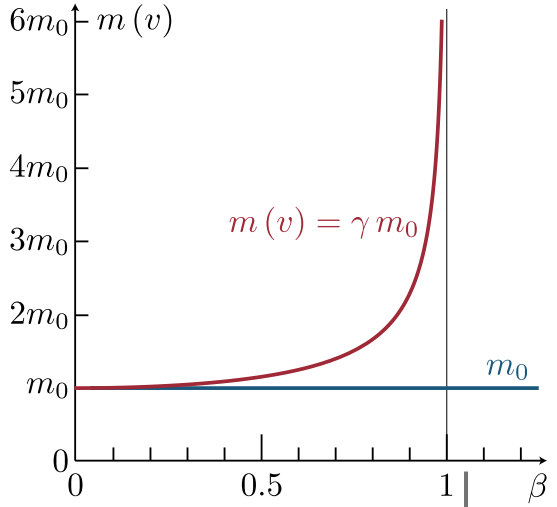
come:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v}$$

dove la quantità:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

è detta **massa relativistica**.



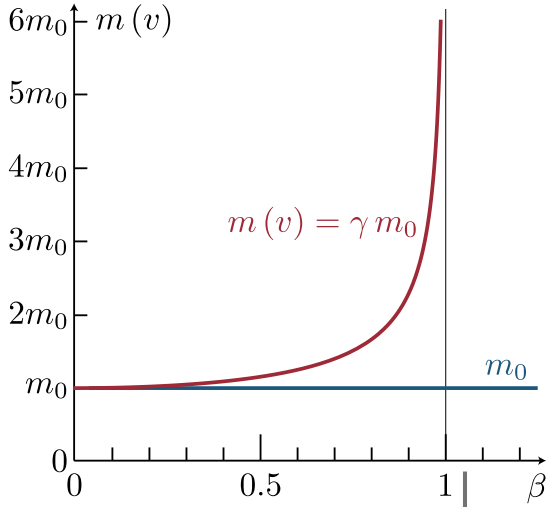
Massa Relativistica (II)

- Nell'espressione della **massa relativistica**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la "massa classica" m_0 è anche la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

- La massa m_0 è perciò detta **massa a riposo** o **massa invariante**:
  - È invariante per trasformazioni di Lorentz in quanto, **per definizione**, è la **massa nel SdR in cui il corpo è in quiete**.

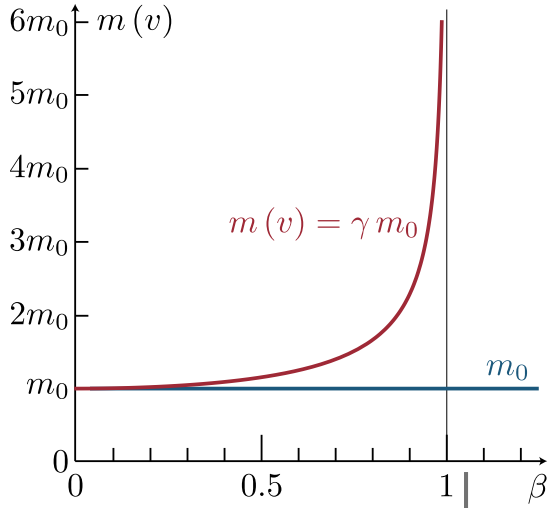


Massa Relativistica (III)

- L'**aumento relativistico della massa**:

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

  - È stato **verificato** in vari **esperimenti** di deflessione di elettroni;
  - È **verificato** inoltre nel funzionamento di tutti gli **acceleratori di particelle**.



Il Secondo Principio della Dinamica

- Il **Secondo Principio della Dinamica**, detto anche **Legge di Newton**, si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \qquad \vec{Q} = m\vec{v}$$

- In **meccanica classica** (essendo m **costante**) si può scrivere anche nella forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- In **meccanica relativistica** è necessario considerare la **dipendenza della massa dalla velocità**:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(v)\vec{v}\right] = m(v)\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v} = m(v)\vec{a} + \frac{dm(v)}{dt}\vec{v}$$

per cui **forza** e **accelerazione non** hanno più la **stessa direzione**.

Il Secondo Principio della Dinamica (II)

- Utilizzando la **massa a riposo** m_0, si può scrivere:

$$\vec{Q} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma m_0 \vec{v}\right) = m_0\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = m_0\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\vec{a}$$

- Calcolando la derivata di γ si ha:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{c^2}2\vec{v}\cdot\vec{a}\right) =$$

$$= \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

Il Secondo Principio della Dinamica (III)

- Avremo quindi:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma m_0\vec{v}\right) = m_0\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v} + \gamma\vec{a}\right) = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

- Infine:

$$\vec{F} = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

- La forza ha una **componente parallela all'accelerazione** e una **componente parallela alla velocità**.

Energia Relativistica

- Consideriamo l'identità matematica:

$$1 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \underbrace{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\gamma^2} - \underbrace{\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\beta^2\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

- La quantità $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2$ è un **invariante per trasformazioni di Lorentz**, essendo sempre uguale a 1.
- Moltiplicando la ambo i membri della relazione $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ per $m_0{}^2c^4$ (pure **invariante per trasformazioni di Lorentz**) si ottiene:

$$m_0^2c^4\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m_0^2c^4$$

Energia Relativistica (II)

- Ricordando che $Q = \gamma m_0 v = m_0 c\gamma\beta$, ovvero:

$$Q^2 = m_0^2c^2\gamma^2\beta^2$$

si ottiene, per quanto visto:

$$m_0^2c^4\left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right) = m_0^2c^4$$

$$m_0^2c^4\gamma^2 - m_0^2c^4\beta^2\gamma^2 = m_0^2c^4$$

$$m_0^2c^4\gamma^2 - Q^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 + \frac{1}{2}x$$

- Consideriamo ora nel primo termine la quantità γm_0c^2. Nel **limite non relativistico** $v \ll c$ si ha:

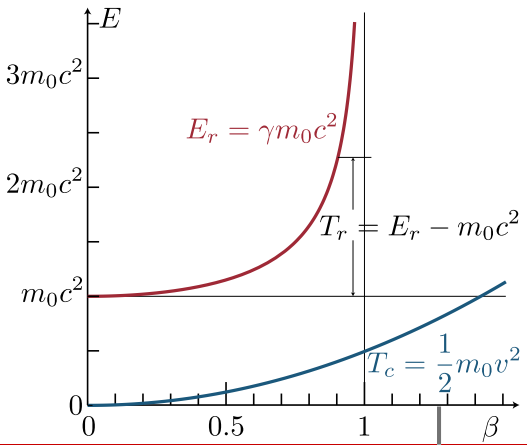
$$\gamma m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad \left(v \ll c\right)$$

Energia Relativistica (III)

$$\gamma m_0 c^2 \simeq m_0 c^2 + \overbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}^{T_c} \qquad (v \ll c)$$

- Nel **II termine** riconosciamo l'**energia cinetica classica** T_c.
- Possiamo allora definire l'**energia totale relativistica** come:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Energia Relativistica (IV)

- Potremo scrivere la precedente identità invariante:

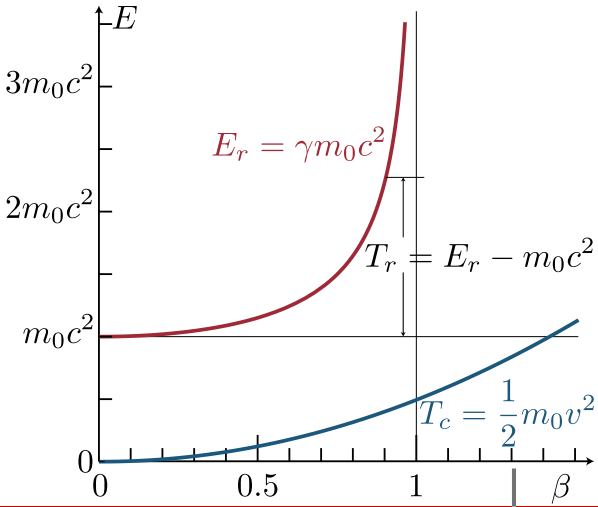
$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

come:

$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

- Essendo il II membro invariante per trasformazioni di Lorentz, anche il **I membro** è **invariante**:

$$E'^2 - Q'^2 c^2 = E^2 - Q^2 c^2$$



Energia Relativistica (V)

- I 3 termini dell'equazione:

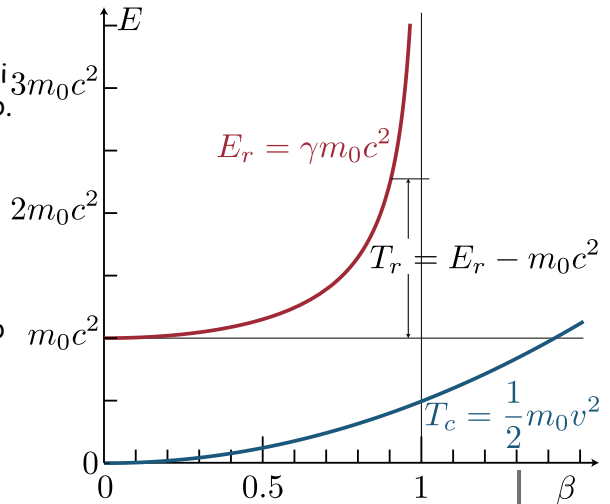
$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

hanno tutti le dimensioni di un'energia al quadrato.

- Il termine:

$$E_0 = m_0 c^2$$

è l'**energia** che il corpo possiede quando la sua **velocità è nulla**. È detto perciò **energia a riposo**.



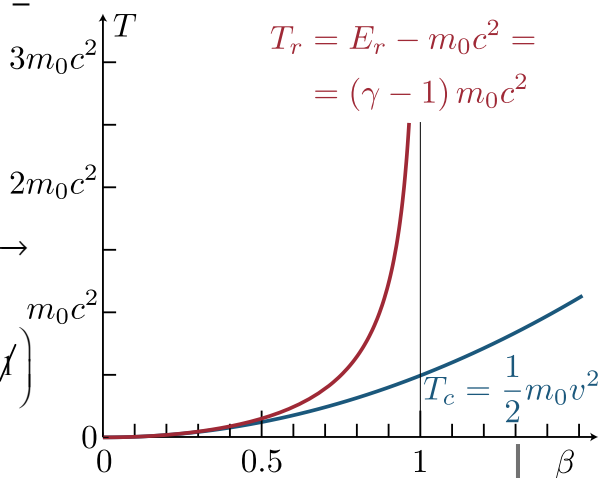
Energia Relativistica (VI)

- L'**energia cinetica relativistica** si può scrivere come:

$$T_r = E - E_0 = E - m_0 c^2 = \\ = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = \\ = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

- Come abbiamo visto:

$$T_r = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \xrightarrow[v \ll c]{} \\ \xrightarrow[v \ll c]{} m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \\ T_r \xrightarrow[v \ll c]{} T_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$$



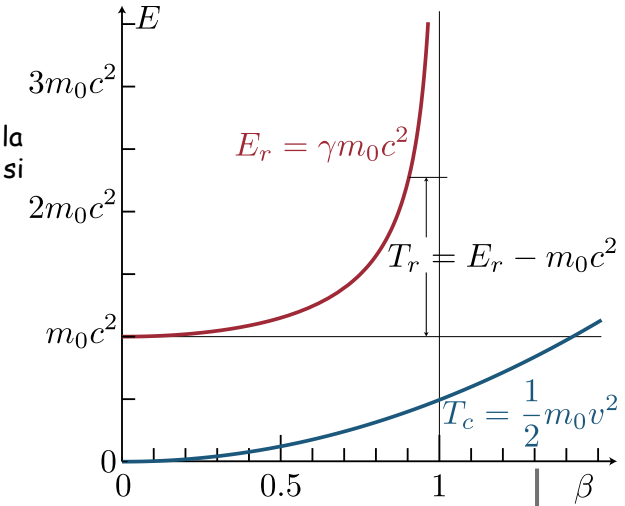
Energia Relativistica (VII)

- Si osservi inoltre che, dalle 2 definizioni:

$$\begin{cases} \vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2 \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda e ricavando Q si ottiene:

$$\vec{Q} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$



Energia Relativistica (VIII)

- Un corpo in **quiete** possiede un'energia **non nulla**:
  - Meccanica classica: l'energia è definita a meno di una **costante additiva arbitraria**.
  - La **relatività fissa** il valore di tale **costante** attribuendole un significato ben definito:
    - Quantità di **energia contenuta nella massa** del corpo.
- Una parte dell'**energia a riposo**, o tutta, può **trasformarsi** in energia cinetica o in un'altra forma di energia.
- **Nuova legge di conservazione**:
  - **Generalizza** le due leggi classiche di conservazione:
    - Massa;
    - Energia meccanica.

Conservazione dell'Energia Relativistica

- Nella **Fisica Classica** l'**energia meccanica** si conserva.
- Nella **Chimica Classica** si conserva la **massa** (**legge di Lavoisier**).
- Nella **Fisica Relativistica massa** ed **energia meccanica** possono **non conservarsi**:
  - È possibile **conversione** di massa in energia o viceversa.
- Tuttavia si conserva la **somma dell'energia meccanica e della massa** (quest'ultima moltiplicata per c^2).

Conservazione dell'Energia Relativistica (II)

- Nei processi (relativistici) tra **nuclei** o **particelle** subnucleari le **trasformazioni di massa in energia cinetica** avvengono continuamente:
  - P. es., una particella può decadere in due particelle più leggere (somma masse < massa madre) e più veloci:
    - Parte della **massa** della particella madre si è trasformata in **energia cinetica**.
  - Viceversa facendo scontrare 2 protoni ad altissima energia in un acceleratore di particelle si possono **ottenere particelle di massa molto superiore** alla somma delle masse dei 2 protoni:
    - Parte dell'**energia cinetica** si è trasformata in **massa**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia

- Vogliamo ora trovare **come cambiano quantità di moto ed energia** nel **passaggio da un SdR inerziale a un altro**.
- Abbiamo definito la **quantità di moto relativistica** come:

$$Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

- Inoltre, dalle definizioni di energia e tempo proprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (II)

- Dalle espressioni:

$$E = m_0 c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \quad Q_x = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad Q_y = m_0 \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad Q_z = m_0 \frac{\Delta z}{\Delta \tau}$$

considerando che m_0, c e $\Delta\tau$ sono **invarianti** per **trasformazioni di Lorentz**, si vede che le 4 grandezze:

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right) = \frac{m_0}{\Delta \tau} \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \right) \propto \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \right) = \Delta \bar{s}$$

si debbono trasformare, per trasformazioni di Lorentz, **come** le grandezze $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, che costituiscono un **quadrivettore**.

- Dunque anche la quaterna ordinata (**4-impulso**):

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z \right)$$

rappresenta un **quadrivettore** dello **spazio di Minkowsky**.

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (III)

- Dunque dalle trasformazioni delle coordinate troviamo le trasformazioni di energia e quantità di moto, mediante una sostituzione:

$$\begin{cases} ct \to \dfrac{E}{c} \\ x \to Q_x \\ y \to Q_y \\ z \to Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{E'}{c} = \gamma\left(\dfrac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q_x' = \gamma\left(Q_x - \beta \dfrac{E}{c}\right) \\ Q_y' = Q_y \\ Q_z' = Q_z \end{cases}$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (IV)

- Avremo inoltre, per la **norma di Minkowski quadrata** del 4-vettore:

$$\left\| Q \right\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q_x^2 - Q_y^2 - Q_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - Q^2 = m_0^2$$

$$E^2 - Q^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\left\| Q \right\|^2 = m_0^2$$

Trasformazione della Quantità di Moto e dell'Energia (V)

- Avremo in conclusione, per le trasformazioni dirette e inverse:

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta Q_x\right) \\ Q'_x = \gamma\left(Q_x - \beta\frac{E}{c}\right) \\ Q'_y = Q_y \\ Q'_z = Q_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{E}{c} = \gamma\left(\frac{E'}{c} + \beta Q'_x\right) \\ Q_x = \gamma\left(Q'_x + \beta\frac{E'}{c}\right) \\ Q_y = Q'_y \\ Q_z = Q'_z \end{cases}$$

Altri Quadrivettori

- Ricordiamo che l'intervallo di **tempo proprio** $\Delta\tau$ di una particella in moto con velocità v (ovvero l'intervallo di tempo misurato nell'SdR in cui la particella è in quiete) si scrive:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

dove Δt è l'intervallo di tempo misurato nel SdR in cui la particella si muove con velocità v.

- Utilizzando l'**intervallo di tempo proprio** $\Delta\tau$ si possono costruire altri quadrivettori (4-vettori):
  - **Tutti** i quadrivettori **si trasformano**, per Trasformazioni di Lorentz, **come** il quadrivettore (ct, x, y, z);
  - Per trovare le leggi di trasformazione è sufficiente sostituire le componenti, come abbiamo fatto per il 4-vettore energia-impulso. $\left(\frac{E}{c}, Q_x, Q_y, Q_z\right)$

Quadri-Velocità

- La **4-velocità** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ct,x,y,z) = \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t}(ct,x,y,z) = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ct,x,y,z) = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\bar{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ct,x,y,z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v})$$

- La 4-velocità è un **4-vettore tangente** alla **linea di universo** nello spazio di Minkowski.
- Si ha inoltre la relazione tra **4-impulso** e **4-velocità**:

$$\bar{Q} = \left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right) = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = m_0\gamma(c, \vec{v}) = m_0\bar{u}$$

Quadri-Velocità (II)

- La norma di Minkowski quadrata della **4-velocità**:

$$\bar{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(ct,x,y,z) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

è data da:

$$\|\bar{u}\|^2 = \gamma^2\left(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) = \gamma^2\left(c^2 - v^2\right) = \gamma^2 c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = c^2\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

$$\|\bar{u}\|^2 = c^2$$

- **Tutti i corpi si muovono** nello **spazio-tempo** alla **velocità della luce**:
  - Un oggetto **in quiete nello spazio si muove comunque nel tempo**;
  - Se un oggetto si muove **più velocemente nello spazio** allora si muove **più lentamente nel tempo** (dilatazione del tempo).

Quadri-Accelerazione

- La **4-accelerazione** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z\right) = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma \vec{v}\right)$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

- Sviluppando si ha:

$$\bar{a} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}c, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_x + \gamma\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_y + \gamma\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v_z + \gamma\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_x + \gamma^2 a_x, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_y + \gamma^2 a_y, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}v_z + \gamma^2 a_z\right) =$$

$$= \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)$$

Quadri-Accelerazione (II)

- Avremo quindi, per la **4-accelerazione** :

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right) = \left(\gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)$$

- La 4-accelerazione è il **4-vettore normale** alla **linea di universo**.
- Derivando l'espressione:

$$\|\bar{u}\|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = c^2$$

rispetto a τ si ha inoltre:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau}\cdot\bar{u} = 0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{u} = 0$$

- I 4-vettori **velocità** e **accelerazione** sono sempre **ortogonali** tra loro.

Quadri-Forza

- La **4-forza** è definita come il 4-vettore:

$$\bar{F} = \frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{Q} = \gamma m_0 \vec{v} \\ E = \gamma m_0 c^2\end{cases}$$

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right)$$

- Data la definizione di Energia e Quantità di Moto relativistica, si ha:

$$\bar{F} = \frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}, \vec{Q}\right) = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}\right) = m_0\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right) = m_0\bar{a}$$

$$\bar{F} = m_0\bar{a}$$

Quadri-Forza (II)

- Si ricordi che, per il **Secondo Principio della Dinamica** si ha, per i 3-vettori:

$$\vec{F} = m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0\gamma\vec{a}$$

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right)$$

per cui la potenza (**lavoro per unità di tempo**) si scrive:

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\frac{v^2}{c^2} + m_0\gamma\vec{a}\cdot\vec{v} = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\left[\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right] =$$

$$= m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}\left[\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a}$$

Quadri-Forza (III)

- La **4-forza** si può scrivere come:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

$$\bar{F} = m_0 \bar{a} = m_0 \left(\gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) = \left(m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma^2 \vec{a} \right)$$

- Si ha pertanto:

$$\vec{F} = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma \vec{a}$$
$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m_0 \gamma^3 \vec{v}\cdot\vec{a}$$

$$\bar{F} = \left(m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}, m_0 \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{v} + m_0 \gamma^2 \vec{a} \right) = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma \vec{F} \right)$$

$$\bar{F} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v},\ \gamma \vec{F} \right)$$

- La **componente temporale** della 4-forza è legata al **lavoro** compiuto dalla forza per unità di tempo.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica