La trasformazione delle grandezze meccaniche

Una volta in possesso delle Trasformazioni di Galileo siamo in grado di connettere le misure di posizione e tempo eseguite da due osservatori inerziali O e O’ in merito allo stesso evento fisico. Si tratta di un avanzamento fondamentale poiché, da queste, potremo costruire le leggi di trasformazione delle misure di velocità, accelerazione e forza e, alla fine, delle leggi meccaniche stesse. Riusciremo così a stabilire *in che modo due diversi osservatori inerziali scrivono le leggi di un dato fenomeno meccanico.*

Velocità

Le componenti cartesiane del vettore velocità **w** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque la velocità misurata da O’ vale

$$\vec{w}\,'=\left(\frac{dx'}{dt'},\frac{dy'}{dt'},\frac{dz'}{dt'}\right) \qquad (1)$$

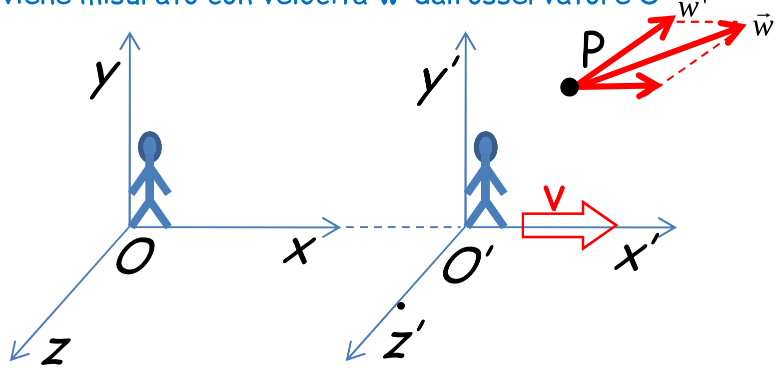
mentre quella misurata da O vale

$$\vec{w}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x'=x-vt \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=t$$

Un corpo materiale che ha velocità **w** rispetto ad O viene misurato con velocità **w’** dall’osservatore O’



e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{w}\,'=\left(\frac{d(x-vt)}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt}-v,\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)-(v,0,0)$$

ora si noti che la prima parentesi nell’ultimo membro è proprio la velocità **w** misurata da O (vedi la (2)) mentre la seconda parentesi è la velocità **v** del riferimento O’ rispetto ad O dunque

$$\boxed{\vec{w}\,'=\vec{w}-\vec{v} \qquad\qquad \vec{w}=\vec{w}\,'+\vec{v}}$$

Dato un riferimento O’ in moto uniforme con velocità v rispetto ad O, un corpo materiale misurato con velocità w’ dall’osservatore O’ viene misurato con velocità w=w’+v dall’osservatore O.

Accelerazione

Le componenti cartesiane del vettore velocità **a** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo due volte la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque l'accelerazione misurata da O' vale

$$\vec{a}\,'=(\frac{d^2x'}{dt'^2},\frac{d^2y'}{dt'^2},\frac{d^2z'}{dt'^2}) \qquad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{a}=(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x'=x-vt \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=t$$

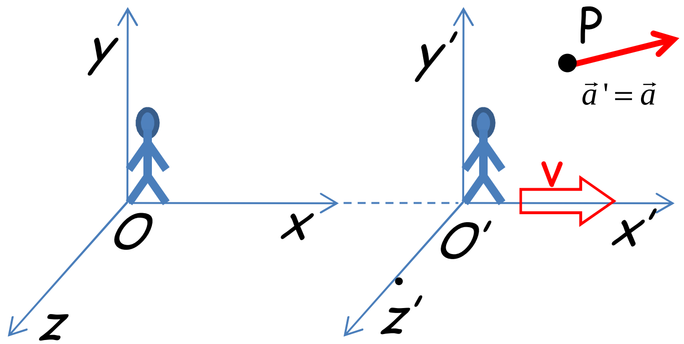
e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{a}\,'=(\frac{d^2(x-vt)}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2})=(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2})$$

ora si noti che la parentesi nell'ultimo membro è proprio l'accelerazione **a** misurata da O (vedi la (2)) dunque

$$\boxed{\vec{a}\,'=\vec{a}}$$

Un corpo materiale che ha accelerazione **a'** rispetto ad O' viene misurato con la stessa accelerazione **a** dall'osservatore O



Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della accelerazione impressa ad un corpo materiale.

Forza

Ora cercheremo di stabilire la relazione esistente tra le misure della stessa forza da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito ricordiamo che una forza agente su di un corpo materiale è assimilabile alla azione sviluppata da un dinamometro applicato al corpo materiale stesso e rappresentata da un segmento orientato (vettore) la cui direzione e verso coincide con quella lungo la quale è disposto il dinamometro e la cui lunghezza è proporzionale alla intensità misurata dal dinamometro.

Dunque per capire come due osservatori inerziali vedono la stessa forza è sufficiente chiedersi in che modo due osservatori inerziali vedono un segmento orientato di data lunghezza.

Immaginiamo allora che su un certo corpo materiale agisca una forza che l'osservatore O' misura e poi rappresenta con il segmento orientato AB, disposto ad esempio nel piano z'x', ed avente componenti AH lungo x' e HB lungo z'.

In che modo il segmento orientato AB (sostituto della forza) viene visto dall'osservatore O ?

Per rispondere è sufficiente ricordare che secondo le trasformazioni di Galileo la distanza tra due punti dello spazio assume lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali. Ne consegue allora che i segmenti AH, HB ed AB avranno lo stessa lunghezza sia per O' che per O il che implica che l'osservatore O misuri la stessa forza (uguale cioè in intensità direzione e verso) misurata da O'

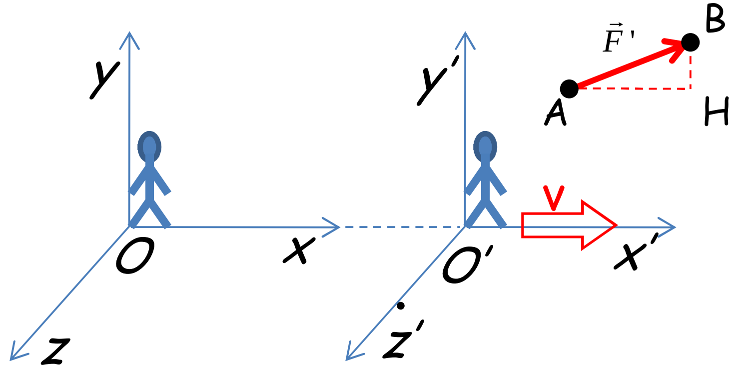
$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F}}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della forza applicata ad un corpo materiale.

Massa inerziale

Da ultimo cercheremo la relazione esistente tra le misure della massa inerziale di un corpo da parte di due osservatori

Un corpo materiale soggetto ad una forza ***F'*** misurata dall'osservatore O' sarà soggetto ad una forza ***F=F'*** misurata dall'osservatore O



inerziali.

A questo proposito è sufficiente ricordare che la massa inerziale di un corpo materiale si misura determinando il rapporto tra il modulo della forza applicata ed il modulo della accelerazione impressa $m=|\mathbf{F}|/|\mathbf{a}|$. Dato che tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse forze e le stesse accelerazioni dobbiamo allora attenderci che tutti gli osservatori inerziali misurino anche lo stesso valore della massa inerziale

$$\boxed{m' = m}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della massa inerziale di un corpo materiale.

La validità delle leggi meccaniche nei riferimenti inerziali

Abbiamo appreso il fatto fondamentale che il modo in cui sono connesse tra loro le misure di spazio e tempo eseguite da due differenti osservatori inerziali in merito allo stesso evento fisico (trasformazioni di Galileo) determina anche le relazioni tra le misure di accelerazione, forza e massa inerziale. In particolare emerge il fatto rilevante che **in merito ad un dato fenomeno meccanico, tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse accelerazioni, forze e masse inerziali.** Quali sono le implicazioni per quanto riguarda le leggi meccaniche?

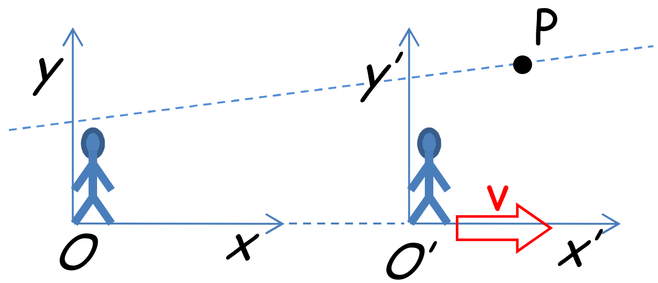
Primo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O', un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze nulla. Sulla base del primo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto rettilineo uniforme. Per fissare le idee immagineremo che il moto si sviluppi nel piano z'x' con una velocità w lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse x'. Le leggi orarie del moto, nel riferimento dell'osservatore O', saranno (vedi figura)

$$x' = (w'\cos\alpha')t' \qquad (1)$$
$$y' = (w'\sin\alpha')t' + y_0'$$

Questo principio apparirà valido anche per l'osservatore O?

Il corpo materiale P si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento O'



Per capire quale traiettoria osserva O basterà tenere conto delle *Trasformazioni di Galileo x'=x-vt, z'=z, t'=t* e sostituirle nelle (1). Si ottengono allora le equazioni

$$x - vt = (w'\cos\alpha')t \qquad\qquad x = (w'\cos\alpha' + v)t \quad (2)$$
$$y = (w'\sin\alpha')t + y_0' \qquad\qquad y = (w'\sin\alpha')t + y_0'$$

che descrivono un moto rettilineo uniforme nel piano yx con velocità **$w=[(w'\cos\alpha'+v)^2+(w'\sin\alpha')^2]^{1/2}=[w'^2+v^2-2w'v\cos\alpha']^{1/2}$** inclinata di un angolo **$\alpha=\mathrm{arctg}[w'\sin\alpha'/(w'\cos\alpha'-v)]$** rispetto all'asse x. Avendo poi le forze lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali, anche l'osservatore O misurerà una forza nulla agente sul corpo materiale.

Concludiamo allora che anche l'osservatore O misura un moto rettilineo uniforme nel caso in cui la forza agente sul corpo materiale sia nulla: **<u>il primo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali.</u>**

Secondo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O’, un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze non nulla. Sulla base del secondo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O’) di moto accelerato secondo l’equazione

$$\vec{F}' = m'\vec{a}'$$

Quale equazione scriverà l’osservatore O? Per capirlo è sufficiente ricordare che, misurando tutti gli osservatori inerziali le stesse accelerazioni , forze e masse inerziali, egli scriverà semplicemente

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

con la condizione ***F=F’***, ***m=m’***, ***a=a’***. Dunque l’osservatore O scriverà esattamente la stessa espressione del secondo principio scritta dall’osservatore O’. Giungiamo allora alla conclusione che : **tutti gli osservatori inerziali scrivono esattamente la stessa espressione (con lo stesso valore delle forze, masse inerziali ed accelerazioni) del secondo principio della dinamica.**

Si può esprimere lo stesso contenuto fisico in modo più formale, dicendo che a seguito di un cambiamento di riferimento inerziale (ovvero di una trasformazione di Galileo), il secondo principio della dinamica rimane esattamente lo stesso (ovvero è invariante). Dunque **il secondo principio della dinamica è invariante per trasformazioni di Galileo.**

Terzo principio della dinamica

Immaginiamo siano dati due corpi materiali in mutua interazione e che l’osservatore O’ misuri su tali corpi forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la loro congiungente in accordo con il terzo principio della dinamica.

Tutto questo risulterà valido anche per un altro osservatore inerziale O? Dato che le forze sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali possiamo certamente concludere che sarà così: anche l’osservatore O misurerà forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la congiungente i corpi materiali verificando quindi il terzo principio. Concludiamo allora che **il terzo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali**.

Conclusioni

E’ necessario commentare il percorso fatto fino a questo punto per comprendere il significato fisico dei risultati ottenuti.

Il primo rilevante risultato che vogliamo richiamare riguarda il fatto che le trasformazioni di Galileo possono essere ottenute a partire da precise ipotesi sulla natura dello spazio e del tempo che riassumiamo nella formula di spazio e tempo assoluti.

Poi, partendo da tali trasformazioni, abbiamo ricavato le analoghe leggi di trasformazione delle grandezze meccaniche (accelerazione, forza, massa inerziale) che ci hanno permesso di mostrare che le leggi meccaniche valgono in tutti i riferimenti inerziali che è ciò che afferma, in ultima analisi, il principio di relatività galileiano.

Riassumendo, **a partire dalle proprietà dello spazio e del tempo abbiamo ottenuto che le leggi meccaniche devono soddisfare il principio di relatività galileiano**.

Invertendo ora l'intero ragionamento, potremmo allora partire **dal principio di relatività galileiano e dalle leggi meccaniche per ottenere, alla fine, le trasformazioni di Galileo**.

In questo modo ci rendiamo conto che possiamo rispondere ad un quesito che forse alcuni di voi si sono posto: **per quale motivo le leggi meccaniche soddisfano il principio di relatività galileiano?** La risposta è **che le trasformazioni delle misure di spazio e tempo, ovvero le trasformazioni di Galileo, sono tali per cui le leggi meccaniche finiscono per essere valide in tutti i riferimenti inerziali**. Dunque, in ultima analisi, **il principio di relatività galileiano delle leggi meccaniche trova la sua spiegazione nelle trasformazioni di Galileo ovvero in certe proprietà dello spazio e del tempo** (spazio e tempo assoluti).

Si tratta di un risultato di grande rilevanza poiché ci fa comprendere che dal modo in cui si trasforma un insieme di leggi fisiche nel passaggio da un riferimento inerziale all'altro possiamo dedurre le proprietà dello spazio e del tempo che quelle leggi sottointendono.

Le leggi meccaniche, come abbiamo visto, si fondano sulla concezione dello spazio e del tempo assoluti codificata matematicamente dalle trasformazioni di Galileo.

Il passo successivo non può che essere quello di comprendere quale sia la concezione dello spazio e del tempo su cui si fonda l'atro pilastro della fisica classica, l'elettromagnetismo.

Le leggi dell'elettromagnetismo

L'elettromagnetismo si pone l'obiettivo di studiare le forze elettriche e magnetiche, le forze che, assieme a quelle gravitazionali, dominano il mondo macroscopico.
A differenza della teoria della gravitazione di Newton, l'elettromagnetismo, per espressa volontà di Faraday e Maxwell, venne sin dall'inizio formulato nel quadro del *concetto di campo* che permette di superare il paradosso fisico dell'azione istantanea tra corpi materiali distanti nello spazio (azione a distanza).

Secondo l'elettromagnetismo la carica elettrica ***Q*** e la corrente elettrica ***i*** modificano lo spazio circostante determinando la presenza di campi elettrici ***E*** (generati dalle cariche elettriche) e campi magnetici ***B*** (generati dalle correnti elettriche) secondo un insieme di relazioni dette ***Equazioni di Maxwell*** che riportiamo nella *forma integrale*

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{S_L} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Qualora altre cariche elettriche che indicheremo con *q* si trovino nello spazio ove siano presenti questi campi elettrici ***E*** e magnetici ***B*** esse saranno soggette ad una forza, detta ***forza di Lorentz***, data dalla espressione

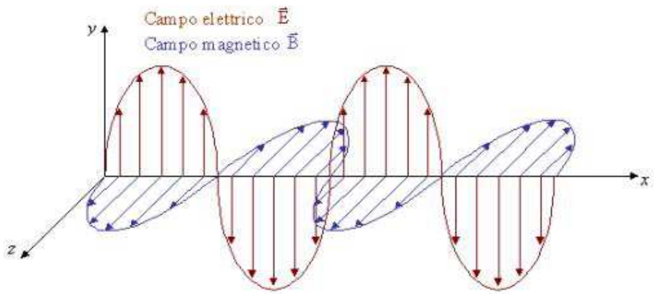
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

infine la *carica elettrica che risulta essere una proprietà intrinseca della materia non può essere ne creata ne distrutta* ed è pertanto soggetta alla ***legge della conservazione della carica*** $\nabla\cdot\vec{J} = -\partial\rho/\partial t$

Secondo l'elettromagnetismo, *l'azione di una carica elettrica su un'altra, distante nello spazio, non è una azione diretta ma si realizza in due fasi fisicamente distinte: la prima carica crea nello spazio circostante un campo elettrico e/o magnetico, che una seconda carica, in esso immersa, percepisce subendo l'azione elettrica e/o magnetica* (quando una azione naturale - gravitazionale, elettrica/magnetica, forte o debole - viene descritta con questo meccanismo si dice che è stata formulata una ***teoria di campo*** per quella azione).
La teoria elettromagnetica prevede che il campo elettrico e/o magnetico, in alcuni contesti, riveli la propria esistenza in modo assai diretto: quando delle cariche elettriche vengono 'scosse' (ovvero accelerate dando luogo a correnti elettriche variabili nel tempo) *i campi elettrici e magnetici ad esse associati cominciano ad oscillare in certa specifica configurazione* detta ***onda elettromagnetica*** (raggi X, luce, onde radio). Tale onda si allontana dalle cariche alla fantastica ***velocità c,*** soddisfacendo una nota equazione detta
equazione delle onde di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}} = 299\ 792\ 458\ m/s$$



L'onda trasporta con se *quantità di moto* (pressione di radiazione), *momento angolare* ed *energia* che dopo pochissimo tempo possono essere prelevati in punti assai distanti da quello in cui ha avuto origine. Dato che si può mostrare che la luce è fisicamente un'onda elettromagnetica, possiamo affermare che l'elettromagnetismo realizza una potente sintesi riconducendo ad una unica causa - la carica elettrica - i fenomeni elettrici, magnetici ed ottici.

Tuttavia contiene aspetti assai problematici : rispetto a quale riferimento si deve intendere misurata la velocità c di propagazione dell'onda elettromagnetica ? Cosa sono i campi elettrici e/o magnetici ?

L'etere come possibile interpretazione dell'elettromagnetismo

Sul finire dell'800, sembrava assolutamente naturale **porre in relazione l'elettromagnetismo con i fenomeni ondulatori allora noti, i quali, oltretutto, fornivano una semplice risposta ai precedenti quesiti.** Si sapeva infatti che all'interno dei *mezzi materiali elastici*, solidi, liquidi o gassosi che fossero, gli stati di distensione e compressione del mezzo potevano propagarsi, trasportando quantità di moto, momento angolare ed energia, e che tale propagazione era descritta proprio dalla equazione delle onde di D'Alembert .

Per questo, sembrò inevitabile immaginare l'esistenza di un **mezzo fisico *elastico*** che poteva essere perturbato localmente dalle cariche elettriche in quiete (cariche statiche) ed in movimento (correnti elettriche). La perturbazione, consistente in stati di compressione e distensione del mezzo (identificati con i campi elettrici e/o magnetici), poteva poi propagarsi allontanandosi dal punto in cui era stata generata (onda elettromagnetica).

In completa analogia con i fenomeni ondulatori allora noti, la velocità c doveva sicuramente intendersi come riferita al mezzo fisico stesso.

Infine, tale mezzo non poteva essere di natura materiale convenzionale (come un solido un liquido od un gas) dato che i corpi materiali, come mostra l'esperienza, potevano muoversi all'interno di esso senza subire alcuna resistenza. **Un mezzo fisico con simili proprietà, era stato introdotto in fisica circa 150 anni prima, per spiegare i fenomeni ottici:**

L'etere luminifero, da *Traitè de la lumière*, C. Huygens, 1691:

Se ora si esamina quale può essere questa materia nella quale si estende il movimento che viene dai corpi luminosi, materia che chiamo eterea [etherée], si vedrà che non è la stessa che serve alla propagazione del suono. Poiché si trova che quest'ultima è propriamente l'aria che sentiamo e che respiriamo: e se anche la si toglie da un recipiente, non se ne toglie l'altra materia che serve alla luce. Il che può provarsi racchiudendo un corpo che suona in un recipiente di vetro [...] si può pensare che queste particelle di etere, nonostante la loro piccolezza, siano a loro volte composte di altre parti e che la loro elasticità consista nel movimento molto rapido di una materia molto sottile[...]

L’ottica, progredì rapidamente nel primo decennio dell’800 con le fondamentali ricerche sperimentali di Thomas Young sui fenomeni della diffrazione e, soprattutto, della interferenza, che stabilirono definitivamente *la natura ondulatoria della luce*. La comprensione dei fenomeni ottici fu però completa solo con i lavori di Augustin Jean Fresnel, che oltre ad essere un abile sperimentatore (scoprì il fenomeno della polarizzazione e riprodusse tutti i risultati di Young), era pure un raffinato matematico, capace di formulare una teoria in grado di spiegare tutti fenomeni osservati. In una serie di lavori presentati a più riprese all’Accademia delle scienze di Parigi tra il 1815 ed il 1819, **Frenel sviluppa una teoria dell’ottica fondate sul concetto di etere luminifero:**

L’etere, *A.J. Fresnel 1815-1819*:
[…] è l’incontrarsi di raggi che produce interferenza. Questo mi sembra del tutto opposto all’ipotesi dell’emissione di particelle e conferma il sistema che fa consistere la luce nelle vibrazioni di un fluido particolare […]

Quasi contemporaneamente, le ricerche di Ampere e poi quelle di Faraday prepararono il terreno alla grande sintesi maxwelliana (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873), che porterà alla completa comprensione dei fenomeni elettrici e magnetici ed alla scoperta fondamentale che la luce stessa è un fenomeno elettromagnetico. Il concetto di etere ne uscì ulteriormente rafforzato, poichè *Maxwell stesso pensava che i campi elettrici e magnetici, pensati da Faraday e matematicamente descritti dalla sua teoria, fossero stati di tensione di un mezzo capace di propagarli sotto forma di onde elettromagnetiche.* Inoltre, tutto l’apparato formale dell’elettromagnetismo (flussi e circuitazioni dei campi vettoriali) era stato fortemente influenzato dall’idrodinamica di Stokes, sviluppata in quegli stessi anni. Dunque, i successi dell’elettromagnetismo e le convinzioni dello stesso Maxwell supportavano fortemente l’idea di etere:

La voce ‘Ether’, *nona edizione dell'Enciclopedia Britannica, J.C. Maxwell, 1878:*
[…]Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza […]

Le implicazioni concettuali della esistenza dell'etere

Dal punto di vista dei fisici dell'800 (e forse anche dal nostro!) il concetto di *etere* forniva una spiegazione semplice e diretta dei fenomeni elettromagnetici ed ottici e delle loro proprietà.

Come accennato, l'etere presentava aspetti problematici che lo rendevano un **mezzo meccanico non convenzionale**: lo si pensava particolarmente **rigido** in quanto capace di trasmettere, ad altissima velocità, le vibrazioni elettro- magnetiche, ma, al tempo stesso, altrettanto **rarefatto** poiché incapace di opporre resistenza all'avanzamento dei corpi materiali.

A fronte di queste difficoltà, prevaleva però il grande vantaggio di fornire una precisa risposta al significato fisico da attribuire alla velocità c dell'onda elettromagnetica che risultava essere semplicemente **la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto al proprio mezzo di propagazione ovvero rispetto all'etere,** in analogia con tutti i fenomeni ondulatori allora noti.

La scelta di questo assetto concettuale aveva alcune conseguenze di ordine generale che è bene discutere.

In primo luogo, la velocità della luce, prevista dalle equazioni di Maxwell, doveva essere interpretata come la velocità della luce nello specifico riferimento in quiete rispetto all'etere, e non rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, dove invece tale velocità doveva essere diversa. In sostanza si doveva ammettere che, attraverso esperimenti con fenomeni di natura elettromagnetica, fosse possibile individuare, tra gli infiniti riferimenti inerziali, quello particolare, fermo nell'etere, in cui la velocità della luce assumeva il valore c previsto dalle equazioni di Maxwell. Un vero e proprio riferimento privilegiato che conduceva alla inevitabile conclusione che **il principio di relatività galileiano non valesse per i fenomeni elettromagnetici.**

A questo riguardo, è bene tenere presente che allora - questo fatto - era poco più che una marginale notazione, poiché nessuno pensava al principio di relatività galileiano come ad uno dei principi portanti della fisica, come suggerito in seguito da Einstein con la formulazione della teoria della relatività ristretta. Secondo la prospettiva di allora, non c'era alcun valido motivo per supporre che qualunque fenomeno naturale dovesse soddisfare il principio di relatività galileiano, per cui si accettava senza problemi che, per mezzo di esperimenti elettromagnetici, si potesse addirittura trovare il riferimento privilegiato in quiete nell'etere, quello nel quale la velocità della luce era uguale a c in tutte le direzioni.

Questa interpretazione aveva un'altra inevitabile conseguenza.

Come lungamente discusso, il fatto che la meccanica soddisfi il principio di relatività galileiano è riconducibile alla invarianza delle equazioni della meccanica rispetto alle trasformazioni di Galileo.

Ora, dato che le equazioni dell'elettromagnetismo, lette nel conteso di etere, violano il principio di relatività galileiano si accettava come fatto ovvio che queste non fossero invarianti rispetto a trasformazioni di Galileo (ometteremo la dimostrazione anche se non è difficile mostrare questo fatto).

In altre parole la non invarianza delle equazioni dell'elettromagnetismo rispetto alle trasformazioni di Galileo non era percepita come il sintomo di un possibile problema a carico delle trasformazioni stesse ma come un fatto dettato dalla particolare natura dell'elettromagnetismo che, a differenza della meccanica, violava il principio di relatività galileiano. In questo modo non c'era motivo di dubitare delle trasformazioni di Galileo, e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluto su cui erano fondate.

Sul piano generale dei principi possiamo allora riassumere la situazione di allora nel modo seguente

i) le trasformazioni di Galileo sono valide in generale sia per i fenomeni meccanici che elettromagnetici e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluti;

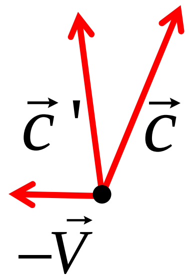
ii) le equazioni della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo e per questo soddisfano il principio di relatività galileiano;

iii) le equazioni dell'elettromagnetismo non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo e per questo non soddisfano il principio di relatività galileiano in accordo con il concetto di etere nel conteso del quale venivano collocate.

Riguardo a quest'ultimo punto, va detto che anche nella prospettiva di allora ci si poteva porre il problema di trovare le trasformazioni di coordinate capaci di lasciare invariate le equazioni dell'elettromagnetismo. In effetti il problema fu posto e risolto (ricordiamo che tali trasformazioni furono trovate nel 1887 da W. Voigt poi nel 1897 da J. Larmor ma, il primo a capire che avevano la proprietà di lasciare invariate le equazioni di Maxwell, fu H.A. Lorentz nel 1900 e poi H. Poincarè nel 1904) tuttavia rimase poco più che un fatto matematico nel quale non si scorgeva alcun contenuto fisico. E non poteva che essere così poiché l'impostazione concettuale appena discussa richiedeva che l'elettromagnetismo dovesse violare il principio di relatività galileiano per cui nessun significato fisico poteva essere attribuito alle trasformazioni di Lorentz che lo lasciavano invariante. Al contrario le corrette trasformazioni fisiche dovevano essere quelle che lo rendevano non invariante: le trasformazioni di Galileo appunto.

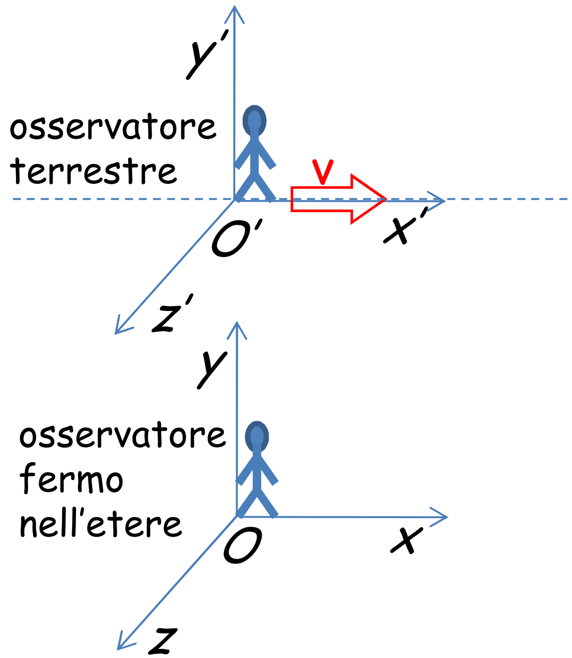
Come già sottolineato, ne oggi ne allora poteva esserci una qualche ragione di principio contro un tale assetto concettuale. L'unica osservazione che si può fare è che, sul piano metodologico, era chiaramente necessaria una prova sperimentale diretta per cui, **l'ideazione e lo studio di tecniche capaci di evidenziare l'esistenza dell'etere,** divenne uno dei temi dominanti della fisica della seconda metà dell'800.

Un possibile esperimento per la rivelazione dell'etere



L'idea su cui doveva fondarsi un possibile esperimento per verificare l'esistenza dell'etere deriva quasi immediatamente dalle proprietà che gli venivano attribuite.
Si pensava che l'etere fosse un mezzo rigido e rarefatto che riempiva il cosmo intero dato che si osservava la luce proveniente dalle stelle distanti. **In tale mezzo, le stelle, e con esse il sole, venivano ipotizzate essere in quiete**. Ne risultava che **la terra, a causa del suo moto di rivoluzione attorno al sole con la velocità di circa 30 Km/s, doveva trovarsi in moto rispetto all'etere proprio con quella velocità**.
Questo comportava che **la velocità della luce dovesse valere c in tutte le direzioni per il solo osservatore in quiete rispetto al sole mentre doveva assumere valori diversi per l'osservatore solidale con la terra**. Dato che si assumevano valide le trasformazioni di Galileo, la velocità della luce rispetto ad un riferimento solidale alla terra doveva valere

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V} \qquad (1)$$

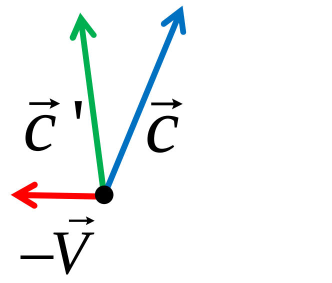


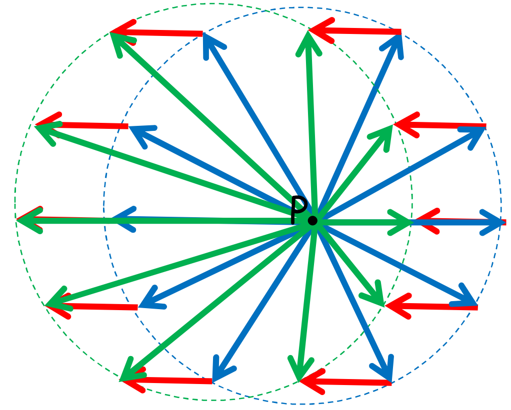
In conseguenza di questo fatto, come lo stesso Maxwell suggerì nel 1870, uno sperimentatore terrestre avrebbe dovuto misurare un valore della velocità della luce dipendente dall'angolo esistente tra il raggio luminoso e la direzione del moto terrestre nell'etere (vedi più avanti). Tale valore era evidentemente compreso tra i valori estremi c-V (propagazione della luce nella stessa direzione e verso del moto terrestre nell'etere) e c+V (propagazione della luce nella stessa direzione ma verso opposto a quello del moto terrestre nell'etere) per cui **una misura capace di una sensibilità percentuale dell'ordine di**

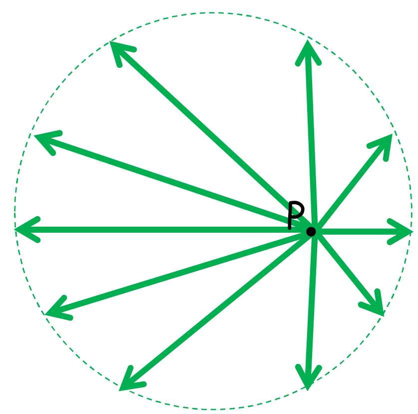
$$\frac{(c+V)-(c-V)}{c} = \frac{2V}{c} = \frac{2\times(30\ km/s)}{(300000\ km/s)} = 2\times10^{-4}$$

avrebbe potuto fornire la prova sperimentale della esistenza (o non esistenza) dell'etere. Oggi una misura così precisa è in generale molto difficile, allora era di una difficoltà estrema!

La velocità della luce, misurata nel riferimento terrestre, è data dalla formula (1) che può essere espressa per via grafica nel modo seguente.
Nel riferimento O, fermo nell’etere, a partire da un punto P dello spazio, i possibili spostamenti della luce nell’unità di tempo sono dati dall’insieme dei vettori blu che individuano il cerchio tratteggiato blu.
Per ottenere i corrispondenti spostamenti nel riferimento O’ in moto nell’etere, basta aggiungere i controspostamenti dovuti al moto di O’ stesso indicati dall’insieme dei vettori rossi. Questi individuano un secondo cerchio tratteggiato verde il cui centro è spostato rispetto al primo della stessa quantità.
A questo punto, i possibili spostamenti della luce nell’unità di tempo, nel riferimento O’ in moto nell’etere, possono essere ottenuti congiungendo il punto P, centro del cerchio tratteggiato blu, con i punti della circonferenza tratteggiata verde.
Otteniamo in questo modo l’ultima figura la quale mostra ciò che avevamo anticipato: **in un generico punto P del riferimento mobile nell’etere, la velocità della luce dipende dalla direzione lungo cui si propaga** in un modo dipendente dall’angolo esistente tra il raggio luminoso e la direzione del moto terrestre nell’etere. Altrettanto chiaramente, la figura mostra che quando la luce si propaga in avanti, nella stessa direzione e verso del moto terrestre, la sua velocità assume il minimo valore **c-V**, mentre quando si propaga indietro, nella stessa direzione ma con verso opposto al moto terrestre, la sua velocità assume il massimo valore **c+V.**

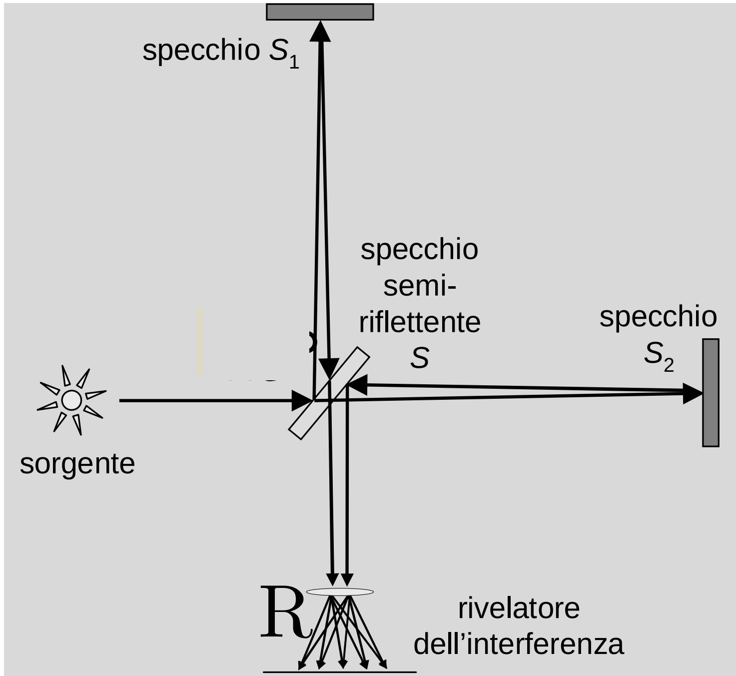






L'interferometro di Michelson

Un punto di svolta nel problema dell'etere fu raggiunto quando si trovò un metodo sperimentale capace di misurare i piccoli effetti sulla velocità di propagazione della luce che il concetto di etere stesso comportava.
L'idea, uno dei capisaldi della moderna fisica sperimentale, è dovuta a **A. Michelson** che ebbe l'intuizione di affidarsi ad un fenomeno ottico molto sensibile, quello della **interferenza** che - essendo regolato da un parametro molto piccolo: la lunghezza d'onda λ della luce (si tenga presente che per la luce visibile $\lambda \sim 500$ nm) - può mettere in evidenza effetti piccoli. Ospite di H. von Helmholtz a Berlino, nel 1880 ideò una apparecchiatura ottica di enorme sensibilità, ancor oggi usata, detta **interferometro**.

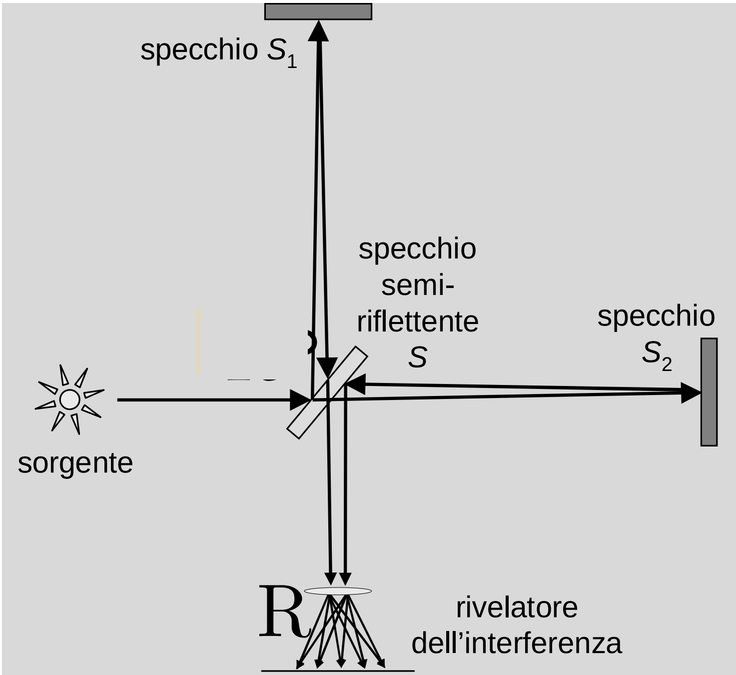


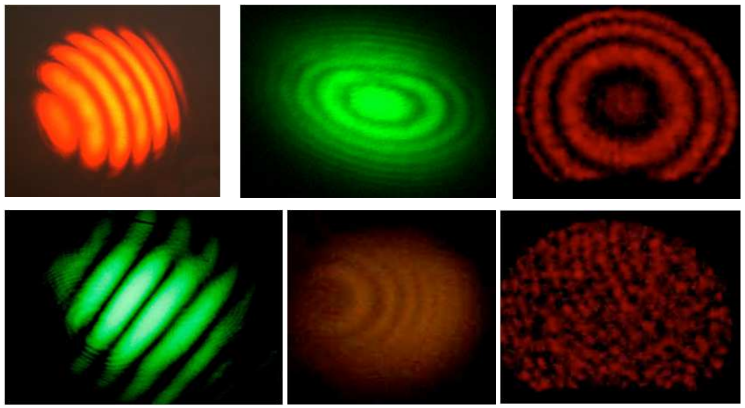
Come noto, affinchè possa essere osservata **l'interferenza di onde**, qualunque esse siano, è necessario che le onde interferenti

i) siano coerenti, ovvero abbiano una differenza nella fase di oscillazione costante nel tempo;
ii) abbiano intensità confrontabili, meglio se uguali, in modo tale da rendere massime le modulazioni derivanti dalla loro sovrapposizione;
iii) abbiano la stessa direzione di oscillazione dei campi, ovvero siano polarizzate nella stessa direzione.

Fatte queste premesse possiamo capire il funzionamento dell'interferometro di Michelson dove queste condizioni vengono soddisfatte nel migliore dei modi.
Una sorgente emette luce nella direzione di uno specchio semiriflettente-semitrasmittente S che divide il raggio luminoso in due raggi coerenti di eguale intensità (ciascuno il 50% della intensità iniziale) e polarizzazione capaci pertanto di interferire qualora venissero sovrapposti.

Per realizzare tale sovrapposizione i due raggi vengono inviati verso due specchi S1 ed S2 che li riflettono completamente indietro verso lo specchio semiriflettente-semitrasmittente S. Il raggio che scende in verticale viene allora in parte riflesso verso la sorgente (di questo non ci curiamo) ed in parte trasmesso verso lo schermo R (il 25% della intensità iniziale). Analogamente il raggio che proviene in orizzontale viene in parte trasmesso verso la sorgente (di questo non ci curiamo) ed in parte riflesso verso lo schermo R (il 25% della intensità iniziale). Si noterà che i due raggi camminano sovrapposti in tutto il tratto di percorso che va dallo specchio S allo schermo R trovandosi nelle condizioni ideali (le condizioni d'interferenza prima ricordate) per interferire.
Se l'interferometro è ben regolato nel punto centrale dello schermo (cioè nel punto giacente su uno dei due assi del dispositivo) si forma un massimo d'interferenza poiché i raggi che si sovrappongono hanno fatto percorsi esattamente uguali. Mano a mano che ci si allontana da questo punto però si osservano cerchi scuri (zone d'interferenza distruttiva) e cerchi illuminati (zone d'interferenza costruttiva) dovute al fatto che i raggi che vi giungono hanno fatto percorsi lievemente diversi e possono sommarsi sia distruttivamente che costruttivamente (tipiche frange d'interferenza, diverse a causa delle differente regolazione degli specchi, sono mostrate nelle figure a colori).
Qualunque piccola variazione nel percorso di uno dei due raggi luminosi si traduce in una modifica della figura d'interferenza che dipendendo dalla lunghezza d'onda della luce impiegata (dell'ordine di 500 nm per la luce visibile) conferisce all'apparecchiatura una enorme sensibilità (naturalmente tale sensibilità si manifesta anche nei confronti dei piccoli effetti ambientali che devono essere assolutamente evitati e che rendono le misure interferometriche molto difficili e delicate).





Il principio dell'esperimento di Michelson

Nella prima figura riportiamo il diagramma delle velocità della luce nelle varie direzioni del laboratorio terrestre previsto dalla ipotesi dell'etere.

A) Inizialmente l'interferometro viene disposto con il braccio L-S2 lungo la direzione di moto della terra nell'etere ed il braccio S1-R perpendicolare a tale direzione.

In questa situazione, la luce si propaga lungo il braccio L-S2 con velocità VLa all'andata e VLr al ritorno, mentre si propaga lungo il braccio S1-R con velocità VT sia all'andata che al ritorno (vedi diagramma delle velocità).

A causa della differente velocità della luce nei due bracci dell'interferometro, ci si attende di osservare, centrate sullo schermo in una certa posizione P1 fuori asse, le frange d'interferenza.

B) Successivamente l'interferometro viene ruotato di 90 gradi in modo da portare il braccio S1-R lungo la direzione di moto della terra nell'etere ed il braccio L-S2 perpendicolare a tale direzione.

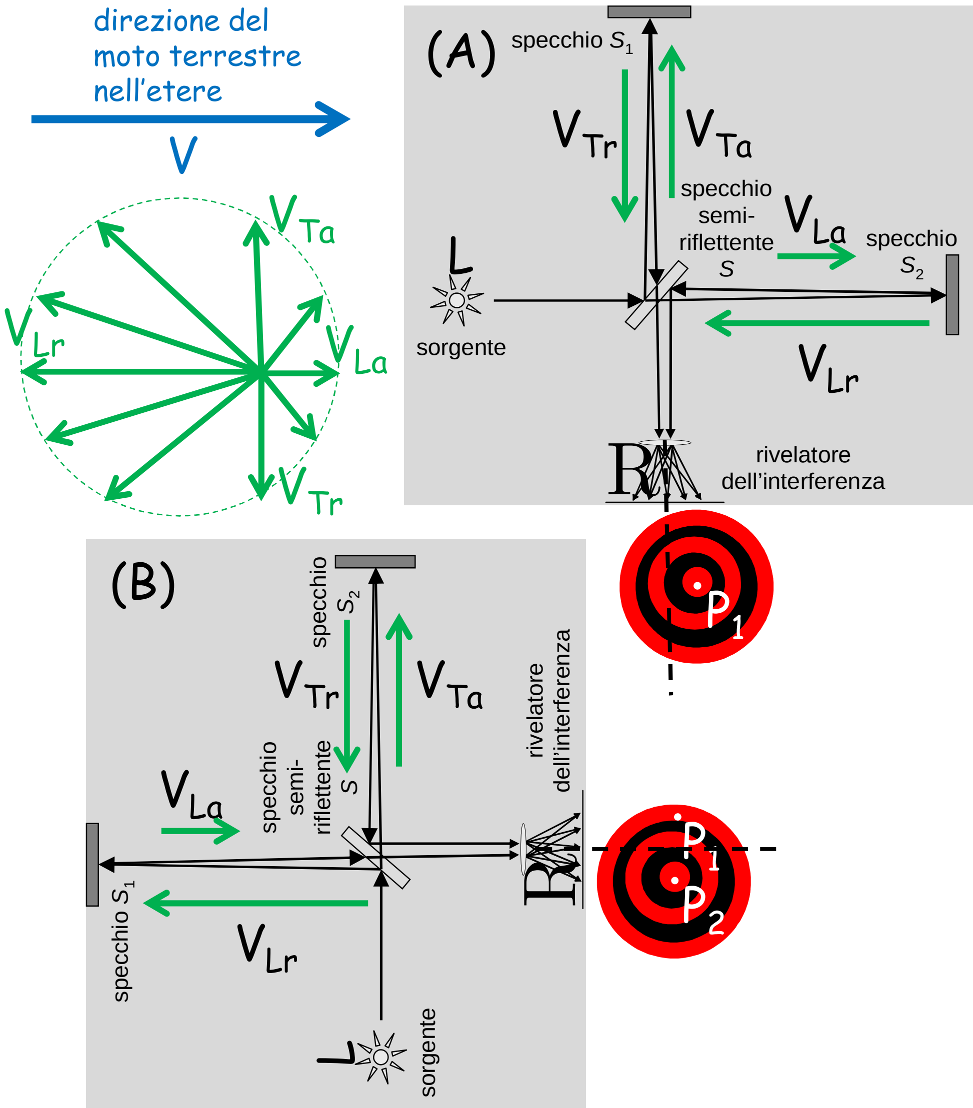
In questa situazione la configurazione delle velocità nei bracci dell'interferometro si scambia e ci si attende di osservare, centrate sullo schermo in posizione P2 simmetrica rispetto all'asse, le frange d'interferenza.

In sostanza la rotazione dell'interferometro dovrebbe portare ad uno spostamento dell'intero sistema di frange d'interferenza. Come mostreremo, l'entità Δx dello spostamento P1-P2 (in unità di distanza tra due massimi successivi della figura d'interferenza) è data dalla seguente formula

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

dove L è la lunghezza dei bracci dell'interferometro, λ la lunghezza d'onda della luce impiegata, c la velocità della luce nell'etere e v la velocità della terra nell'etere.

Sulla base di quanto detto **l'osservazione di uno spostamento delle frange supporta la tesi dell'etere, mentre l'assenza di uno spostamento la nega.**

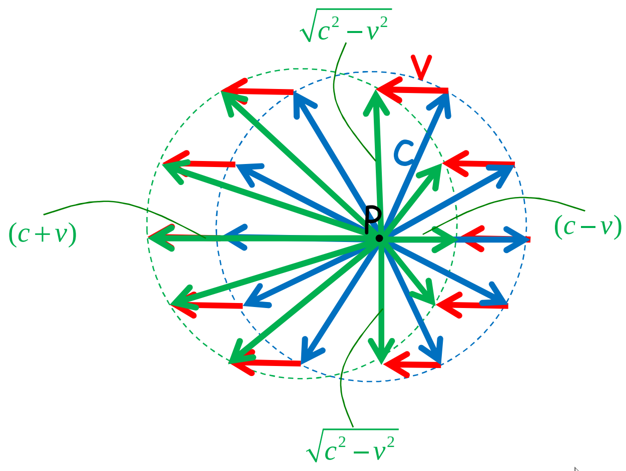


Il calcolo dello spostamento delle frange d'interferenza

Poniamo l'interferometro nella posizione (1) con il braccio ABE lungo la direzione del moto terrestre nell'etere.

Supponiamo che al tempo t=0 il raggio di luce lasci la sorgente A e calcoliamo il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABCBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABCBE}(1)=\frac{L}{(c-v)}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$



Calcoliamo ora il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABDBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

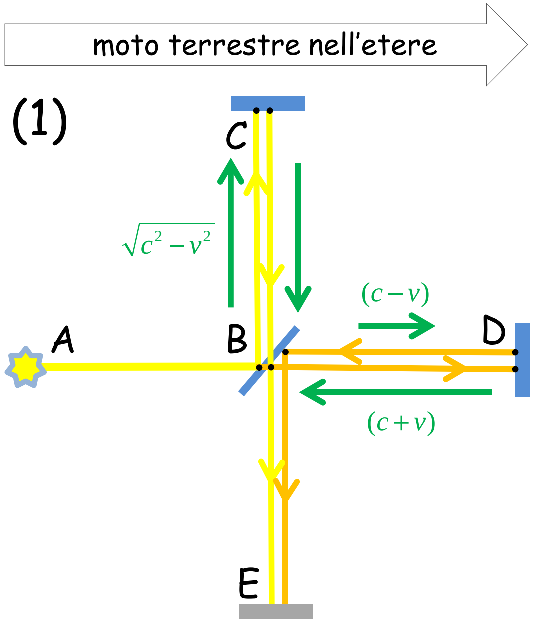
$$t_{ABDBE}(1)=\frac{L}{(c-v)}+\frac{L}{(c-v)}+\frac{L}{(c+v)}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

La differenza dei tempi di percorrenza dei due raggi vale allora

$$t_{ABCBE}(1)-t_{ABDBE}(1)=\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}-\frac{L}{(c-v)}-\frac{L}{(c+v)}=\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}-\frac{2Lc}{(c^2-v^2)}=$$

$$=\frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{2L/c}{(1-v^2/c^2)}\simeq\frac{2L/c}{(1-\frac{1}{2}v^2/c^2)}-\frac{2L/c}{(1-v^2/c^2)}\simeq$$

$$\simeq\frac{2L}{c}(1+\frac{1}{2}v^2/c^2)-\frac{2L}{c}(1-v^2/c^2)=-\frac{L}{c}v^2/c^2$$



ed indica che il raggio ABCBE arriva sullo schermo prima del raggio ABDBE.

Ora ruotiamo l'interferometro nella posizione (2) con il braccio CBE lungo la direzione del moto terrestre nell'etere e calcoliamo nuovamente i tempi di percorrenza dei due raggi.
Supponiamo che al tempo t=0 il raggio di luce lasci la sorgente A e calcoliamo il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABCBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABCBE}(2)=\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{(c-v)}+\frac{L}{(c+v)}+\frac{L}{(c+v)}$$

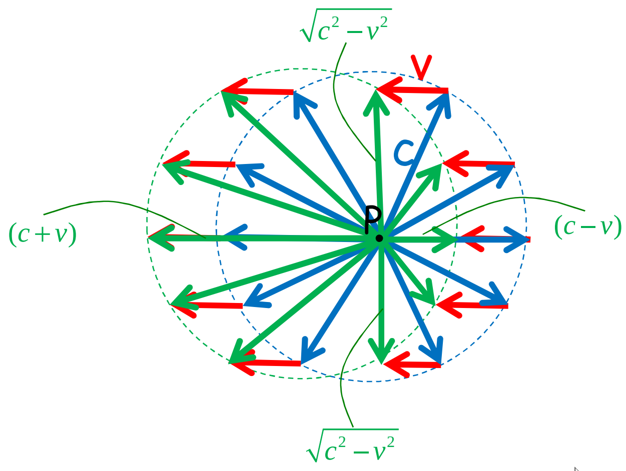
Calcoliamo ora il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABDBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

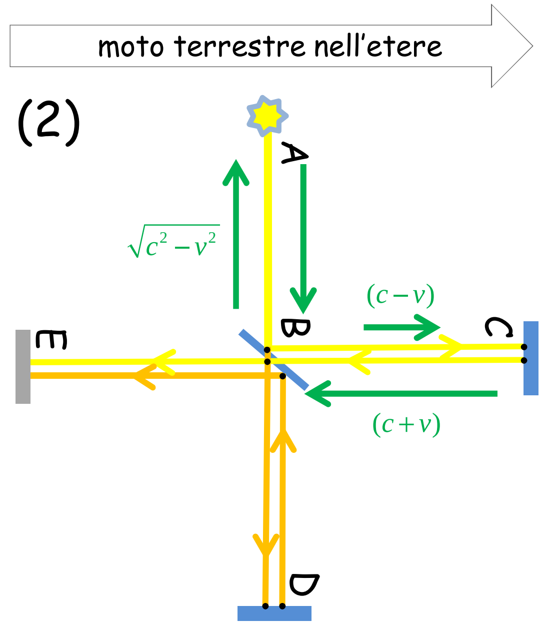
$$t_{ABDBE}(2)=\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}+\frac{L}{(c+v)}$$

Dal confronto con l'analoga formula della pagina precedente notiamo che la differenza dei tempi di percorrenza dei due raggi ha invertito esattamente il segno e vale

$$t_{ABCBE}(2)-t_{ABDBE}(2)=\frac{L}{(c-v)}+\frac{L}{(c+v)}-\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}-\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{L}{c}v^2/c^2$$

indicando che ora il raggio ABDBE arriva sullo schermo prima del raggio ABCBE. Ragioniamo ora sul significato di queste differenze nei tempi di percorrenza.





Si consideri la situazione (1). Il raggio ABDBE è il più lento, e quando arriva sullo schermo, il raggio ABCBE è già passato ed ha percorso lo spazio

$$s(1) = c\,(t_{ABDBE}(1) - t_{ABCBE}(1)) = L\ v^2 / c^2$$

Il quoziente x(1) tra questo spazio e la lunghezza d'onda della luce fornisce il punto della figura d'interferenza che viene a formarsi al centro dello schermo (Es: se X(1)=3 significa che nel punto centrale dello schermo cade il terzo massimo della figura d'interferenza)

$$x(1) = \frac{s(1)}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} v^2 / c^2$$

Questo significa che la figura tende a svilupparsi fuori centro, ad esempio lateralmente, della quantità x(1) (in unità di distanza di due massimi successivi) .
Si consideri la situazione (2). Ora è Il raggio ABCBE il più lento, e quando arriva sullo schermo, il raggio ABDBE è già passato ed ha percorso uno spazio (uguale al precedente)

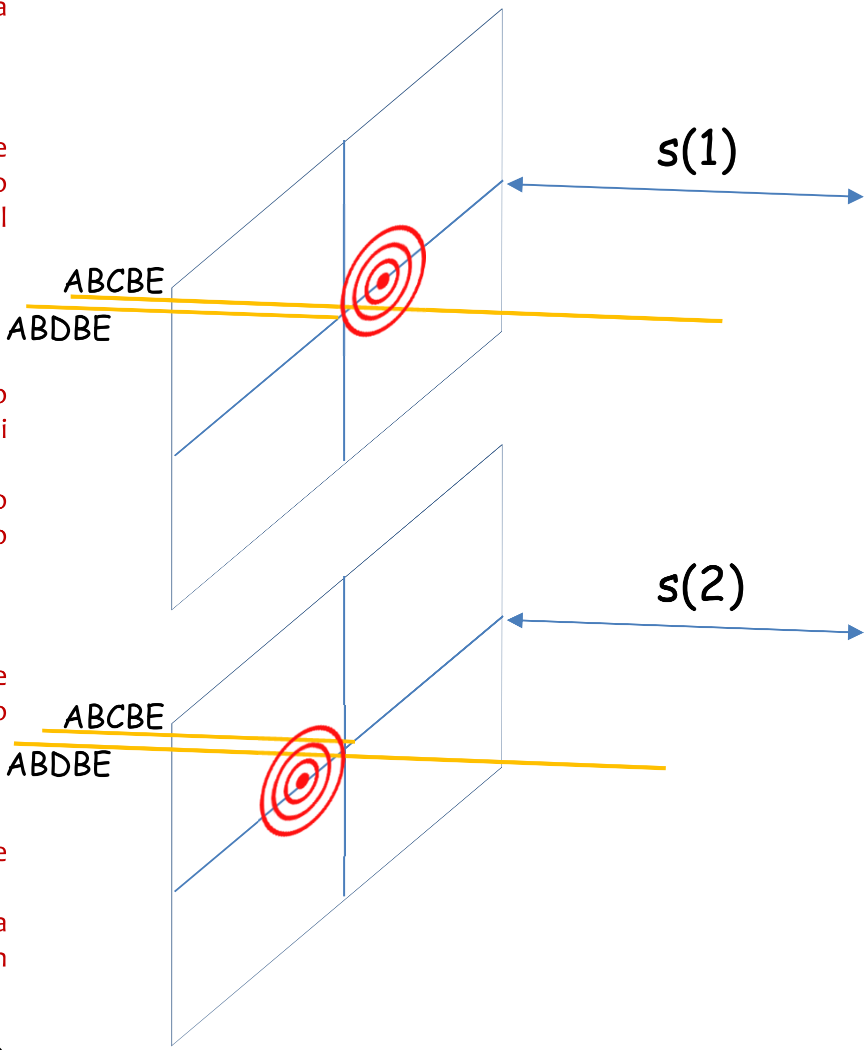
$$s(2) = c\,(t_{ABCBE}(2) - t_{ABDBE}(2)) = L\ v^2 / c^2$$

Il quoziente x(2) tra questo spazio e la lunghezza d'onda della luce fornisce il punto della figura d'interferenza che viene a formarsi al centro dello schermo

$$x(2) = \frac{s(2)}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} v^2 / c^2$$

Questo significa che la figura tende a svilupparsi fuori centro ma dalla parte opposta rispetto a prima a causa della inversione dei raggi.
Passando allora dalla configurazione (1) alla (2) il centro della figura d'interferenza si è spostato complessivamente della seguente quantità (in unità di distanza tra due massimi successivi della figura d'interferenza)

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda} v^2 / c^2 \qquad (F1)$$



Il risultato dell'esperimento di Michelson

Richiamiamo la formula dello spostamento della figura d'interferenza (in unità della distanza di due massimi successivi della figura stessa)

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

Si noterà che le grandezze a scelta dello sperimentatore sono la lunghezza L del braccio dell'interferometro e la lunghezza d'onda λ della luce impiegata, essendo date, invece, la velocità della luce e l'eventuale velocità della terra nell'etere. Tenuto conto che la lunghezza d'onda della luce è vincolata a rimanere nel visibile e quindi tra i 400 ed i 700 nm, l'unica vera leva che possiede lo sperimentatore per rendere massimo l'effetto è lunghezza L del braccio dell'interferometro che deve essere la più grande possibile.
Michelson effettuò l'esperimento una prima volta nel 1881 con un interferometro di braccio L=1,2 m e luce di lunghezza d'onda λ=570 nm. L'eventuale effetto ammontava quindi

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\times 1,2}{5,7\times 10^{-7}}\left(\frac{30}{300000}\right)^2 = 0,04$$

Ovvero un piccolo spostamento di 4 centesimi di frangia. **Michelson dichiarò che la rotazione dell'interferometro non aveva causato alcuno spostamento di frage ma molti obiettarono che la sensibilità era al limite e l'effetto poteva essere sfuggito**

Per questo ripetè l'esperimento nel 1887 in collaborazione con E. Morley, utilizzando un nuovo interferometro di braccio L=12m che garantiva un eventuale effetto di

$$\Delta x = 0,4$$

Ovvero uno spostamento di quasi mezza frangia (la dove c'era un massimo doveva quindi comparire un minimo!) certamente visibile qualora ci fosse stato l'effetto. Ancora una volta **gli sperimentatori dichiararono di non avere osservato alcun effetto** e questa volta nessuno poteva sollevare obiezioni sulla sensibilità dello strumento.

Le conseguenze dell'esperimento di Michelson e Morley

L'esito negativo dell'esperimento di Michelson e Morley (MeM), confermato al di la di ogni dubbio nel 1887, condusse la fisica in una situazione assai complessa che si risolse solo con la formulazione della teoria della relatività ristretta nel 1905 da parte di A. Einstein.
Per comprendere questo periodo è necessario tenere presente che anche il risultato sperimentale più limpido, sotto il profilo logico non è mai conclusivo in quanto sempre passibile di diverse interpretazioni.
In effetti l'esperimento fu seguito da una impressionante varietà di idee e proposte tutte tese a spiegare ciò che costituiva l'unico punto fermo: *l'assenza di spostamento delle frange a seguito della rotazione dell'interferometro*.

In linea di principio erano possibili due diversi posizioni:

i) non esiste l'etere luminifero e quindi non si osserva lo spostamento delle frange. In questo caso, assumendo la validità dell'elettromagnetismo, il significato della velocità c non poteva che essere quello di rappresentare la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto ad un qualunque osservatore inerziale (come vedremo fu la strada imboccata da A. Einstein, che però richiede una radicale revisione dei concetti di spazio e tempo).

ii) esiste l'etere luminifero ma non si osserva lo spostamento delle frange a causa di certi effetti di cui non si è tenuto conto. Fu la strada più seguita e tra gli effetti proposti ricordiamo:

- **trascinamento dell'etere**: la terra, nel suo moto orbitale, *trascina l'etere* per cui il laboratorio e l'interferometro si trovano, in realtà, in quiete nell'etere stesso. Per questo motivo non si osserva alcun spostamento delle frange (tale ipotesi fu poco sostenuta poiché non riusciva a spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare);
- **contrazione di Lorentz-Fitzgerald**: la terra si muove nell'etere, che non viene trascinato, tuttavia, *il braccio allineato con il moto nell'etere, subisce una modifica della propria lunghezza* tale da compensare esattamente lo spostamento atteso delle frange. Si spiega dunque l'esito dell'esperimento di MeM ma al prezzo di un nuovo effetto fisico che, oltre ad essere spiacevolmente 'ad-hoc', *modifica la concezione galileiana dello spazio*. Inoltre, per spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare, Lorentz fu costretto anche a *modificare la concezione galileiana del tempo*.

Come si vede la battaglia a favore dell'etere era diventata difficilissima poiché risultava impossibile rendere conto del risultato dell'esperimento di Michelson e Morley senza cadere in contraddizioni con altri effetti noti. L'etere stava diventando un concetto fisico inutile e come tale prossimo ad essere abbandonato. La conseguenza più rilevante di questo fatto riguardava però le trasformazioni di Galileo che private dell'etere non risultavano più inattaccabili e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluti su cui si fondavano.

La Teoria della Relatività Ristretta

A. Einstein, in un famoso lavoro pubblicato nel 1905 in una rivista specializzata tedesca prende la direzione che tutti gli esperimenti a seguire dimostreranno essere quella giusta (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, pubblicato su Zeitschrift für Physik*).

In tale lavoro, il primo passo fu quello di **abbandonare il concetto di etere.** Dato che Einstein era fermamente convinto che le equazioni di Maxwell fossero corrette, l'unica possibile interpretazione della velocità c dell'onda elettromagnetica prevista da queste equazioni era che **c fosse la velocità dell'onda elettromagnetica rispetto ad un qualunque sistema di riferimento inerziale.** Tale ipotesi rappresenta uno dei due capisaldi della teoria dove occupa la posizione di secondo postulato.

E' assai significativo ricordare una dichiarazione di A. Einstein secondo la quale, al momento della formulazione della TRR, non era a conoscenza dell'esperimento di Michelson e Morley e che la ragione che lo spinse ad abbandonare il concetto di etere fu soprattutto la possibilità di recuperare la completa equivalenza di tutti gli osservatori inerziali, sia per i fenomeni meccanici che per quelli elettromagnetici, in accordo con la sua intuizione che **il principio di relatività galileiano dovesse essere un principio generale, valido per tutti i fenomeni fisici.** Questa ipotesi rappresenta l'altro caposaldo della costruzione einsteniana, dove vi figura come primo postulato.

Stabiliti questi due punti fermi, A. Einstein mostrò che era possibile costruire una visione della fisica (in particolare dell'elettromagnetismo) coerente con queste assunzioni purché si fosse disposti ad abbracciare una nuova concezione dello spazio e del tempo abbandonando quella familiare della fisica classica.

E' inutile sottolineare che tutto ciò sarebbe rimasto un ardito esercizio intellettuale se gli esperimenti, oramai numerosissimi, non avessero puntualmente confermato tutte le rivoluzionarie previsioni della nuova teoria!

Fatte queste premesse, possiamo formulare i due principi o postulati, che A. Einstein assunse come veri, e dai quali, in modo deduttivo, si ottengono tutte le conseguenze della TRR:

Primo postulato : *in tutti i riferimenti inerziali valgono le stesse leggi fisiche*

Secondo postulato: *in tutti i riferimenti inerziali la velocità della luce assume lo stesso valore*

Le trasformazioni di Galileo violano il secondo postulato

Mostreremo ora che ***le trasformazioni di Galileo contraddicono il secondo postulato*** per cui *risulta necessario procedere ad una loro modifica.*

Consideriamo i due soliti riferimenti ***O*** ed ***O'***, ed immaginiamo che, nel momento in cui le origini coincidono, dalla origine del riferimento mobile ***O'*** venga emesso un raggio di luce nella direzione delle ***x'*** positive. La posizione in funzione del tempo, del fronte del raggio, per l'osservatore ***O'*** vale

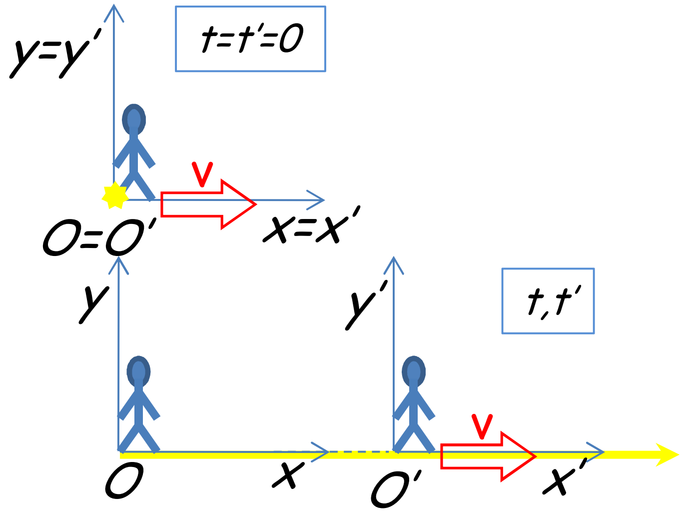
$$x' = ct'$$

Richiamando le Trasformazioni di Galileo, sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct + vt \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = (c+v)t \\ - \end{cases}$$

Il risultato mostra che **l'osservatore O vede un raggio luminoso che si propaga nella direzione delle x positive con velocità c'=(c+v) in completo disaccordo con il secondo postulato** che invece richiede che anche per l'osservatore ***O*** la velocità del raggio luminoso valga **c**!

A questo proposito vale la pena sottolineare **quanto il secondo postulato sia in conflitto con il senso comune**: dal punto di vista dell'osservatore ***O***, il raggio luminoso ha seguito un percorso più lungo rispetto al riferimento ***O*** che



rispetto al riferimento **O'**. Ciononostante il raggio si muove con la stessa velocità rispetto ad entrambi i riferimenti ! Ciò è possibile solo se sui ammette che i due osservatori misurino le durate degli stessi fenomeni in modo diverso.

Il punto finale di queste considerazioni è che **le trasformazioni di Galileo non sono compatibili con i postulati della teoria della relatività ristretta per cui risulta necessario procedere alla costruzione delle nuove trasformazioni.**

La costruzione delle nuove trasformazioni

Le nuove trasformazioni possono essere costruite analizzando le seguenti situazioni fisiche:

i) Un corpo materiale in quiete nell'origine del riferimento O', deve apparire in moto con velocità v all'osservatore O:

$$\{x' = 0 \qquad x = vt$$

Evidentemente tale condizione può essere soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x' = x - vt \quad \rightarrow \quad x' = \alpha(x - vt)$$

dove *α è una costante da determinare.*

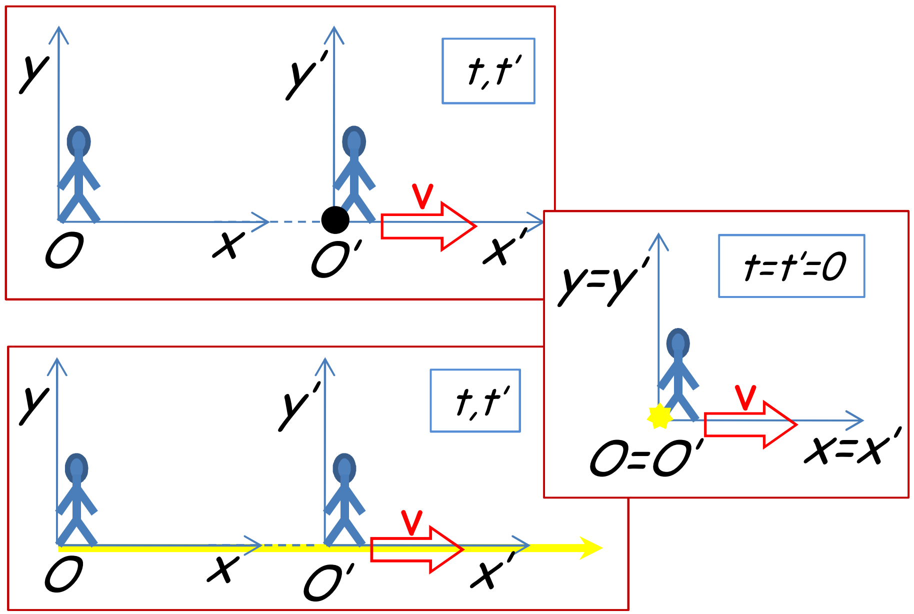
Un corpo materiale è in quiete nel riferimento O deve apparire in moto con velocità –v all'osservatore O':

$$\{x' = -vt' \qquad x = 0$$

Tale condizione può essere condizione soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x = x' + vt = x' + vt' \quad \rightarrow \quad x = \alpha(x' + vt')$$

con *la stessa costante α* dato che i due osservatori sono del tutto equivalenti in accordo con il primo postulato. Confrontando le espressioni per **x** e **x'** arriviamo allora a comprendere che, in generale, <u>dati due osservatori **O** e **O'**, in moto traslatorio uniforme, le trasformazioni di coordinate da **O** ad **O'** e da **O'** ad **O** possono differire nel solo segno della velocità</u> (è facile verificare che questa proprietà è soddisfatta anche dalle trasformazioni di Galileo).



ii) Un raggio luminoso, nel momento in cui le origini coincidono, viene emesso nella direzione delle x e x' positive. In accordo con il secondo postulato, la posizione del fronte, nei rispettivi riferimenti, deve essere data dalle espressioni

$$\{x' = ct' \qquad x = ct$$

iii) La eguaglianza t'=t, non può essere valida poiché contraddice il secondo postulato (esempio iniziale). La nuova relazione tra i tempi deve comunque essere lineare (altrimenti entra nelle formule il problema della origine) per cui scriveremo nel modo più generale possibile tipo **t'=at+bx** che, per simmetria con quella relativa alle posizioni, prenderemo nella forma **$t'=\beta(t+\gamma x)$.**

Passiamo ora la costruzione delle nuove formule di trasformazione. Avremo allora per le **trasformazioni da O ad O' e da O' ad O** che si ricavano immediatamente

$$1)\ \begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v}\left(x' + \dfrac{\alpha}{\beta} v t'\right) \\ t = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v}\left(t' - \dfrac{\beta}{\alpha}\gamma x'\right) \end{cases}$$

Dal requisito i) otteniamo immediatamente che devono essere soddisfatte le condizioni

$$3)\ \left\{ \dfrac{\alpha}{\beta} = 1 \right. \rightarrow \alpha = \beta \qquad 4)\ \begin{cases} \alpha = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v} \\ \beta = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v} \end{cases} \rightarrow \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma v}}$$

Dal requisito ii), sostituendo nelle 1) **x'=ct'** e **x=ct** otteniamo invece

$$5)\ \begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \alpha(ct - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma ct) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \alpha(c - v)t \\ t' = \beta(1 + \gamma c)t \end{cases} \qquad c = \frac{\alpha(c - v)}{\beta(1 + \gamma c)} \qquad \gamma = -v/c^2$$

Tenendo conto delle 3), 4) e 5) otteniamo allora le espressioni

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \gamma = -v/c^2$$

le quali, sostituite nelle 1) e 2), forniscono le *nuove trasformazioni di coordinate* per x e t.

$$6)\ O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$7)\ O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ora dobbiamo affrontare il problema delle trasformazioni delle coordinate *y* e *z* che, nel caso delle trasformazioni di Galileo, sono fornite dalle semplici leggi *y'=y* e *z'=z*. Continueranno ad essere valide? Ragioniamo come segue.

Si immagini una variante dell'esempio esaminato all'inizio nel quale, il raggio luminoso (nell'istante in cui le origini coincidono), viene indirizzato, nel riferimento in moto ***O'***, lungo l'asse delle ***y'*** positive. Mentre il raggio viaggia in direzione verticale verso l'alto per l'osservatore ***O'***, viaggia pure in direzione diagonale per **O**. Dopo un certo intervallo di tempo la traiettoria percorsa nel riferimento **O** potrebbe essere quella tracciata nella figura.

La posizione del fronte, nei due riferimenti, è data dalle equazioni

$$8)\begin{cases} y'=ct' \\ x'=0 \end{cases} \qquad 9)\begin{cases} y=v't \\ x=vt \end{cases}$$

Si noti che O vede un raggio luminoso che si propaga in direzione diagonale con una velocità che deve valere ***c*** (in accordo con il secondo postulato) per cui si deve avere dal teorema di Pitagora

$$(ct)^2=(vt)^2+(v't)^2 \qquad v'=(c\sqrt{1-v^2/c^2}\,)t$$

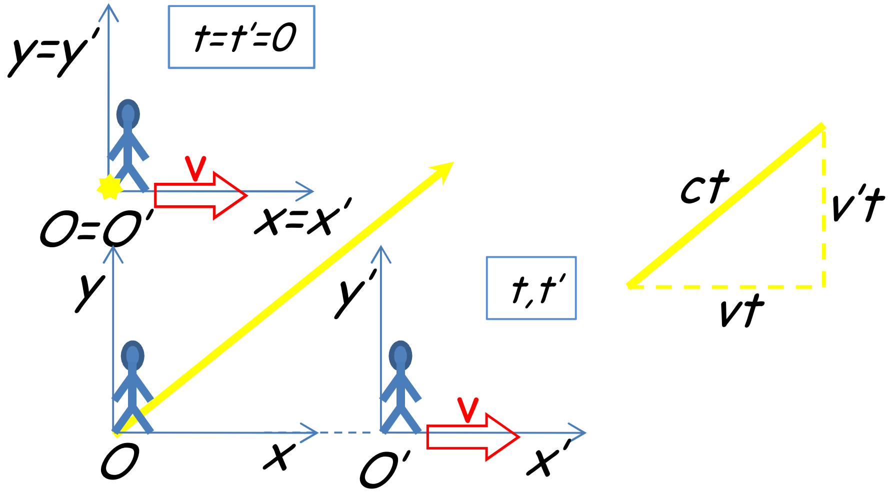
sostituendo nelle 9) e riscrivendo sia le 8) che le 9), otteniamo

$$10)\begin{cases} y'=ct' \\ x'=0 \end{cases} \qquad 11)\begin{cases} y=(c\sqrt{1-v^2/c^2}\,)t \\ x=vt \end{cases}$$

Ora, si deve richiamare la trasformazione del tempo data dalla seconda delle 6),

$$t'=\frac{\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e sostituirla nella prima delle 10), si ottiene



$$12)\begin{cases} y'=c\dfrac{(t-\frac{v}{c^2}vt)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=(c\sqrt{1-v^2/c^2}\,)t \\ x'=0 \end{cases}$$

per confronto diretto, verifichiamo che la prima delle 12) coincide con la prima delle 11) per cui ***y'=y***. Dato che analoghe considerazioni valgono anche per la coordinata z concludiamo che **le leggi di trasformazione delle coordinate perpendicolari alla direzione del moto non necessitano di alcuna correzione**

$$13)\begin{cases} y'=y \\ z'=z \end{cases}$$

Le Traformazioni di Lorentz

Nelle pagine precedenti abbiamo ottenuto **le trasformazioni delle coordinate spaziali e temporali** [formule dalle 6), 7) e 13)] **compatibili con i postulati iniziali della teoria**.

Queste trasformazioni hanno una storia piuttosto complessa: furono trovate, a partire dal 1887, da G. Fitzgerald, J. Larmor, H. Lorentz e W. Voigt essenzialmente per spiegare l'esito nullo dell'esperimento di Michelson e Morley. Pare che J. Larmor avesse compreso l'effetto della dilatazione del tempo in esse nascosto, e Lorentz la loro proprietà di lasciare invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo, ma fu A. Einstein che per primo chiarì fino in fondo il loro vero significato fisico.

In effetti, è solo con la teoria della relatività ristretta che queste trasformazioni - dette trasformazioni di Lorentz – vengono ad assumere **un ruolo fondativo per tutta la fisica contenendo al loro interno le proprietà di trasformazione della misure di posizione e tempo tra osservatori inerziali in moto relativo uniforme** (a Lorentz sfuggì il significato profondo di queste trasformazioni).

In particolare queste formule stabiliscono una relazione tra le misure di posizione e tempo di un certo evento fisico operate da due diversi osservatori inerziali ***O*** ed ***O'***. Se l'osservatore ***O*** misura un certo evento fisico nella posizione spaziale ***(x,y,z)*** e temporale **t** allora ***O'*** misurerà quello stesso evento nella posizione spaziale ***(x',y',z')*** e temporale ***t'*** secondo le formule qui a lato.

$$O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2} x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2} x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$