

Una nuova grandezza assoluta: la distanza spaziotemporale

L'analisi delle proprietà degli intervalli spaziali e temporali condotta fino ad ora probabilmente ci ha convinti che la TTR renda sistematicamente relative, ovvero dipendenti dal riferimento utilizzato, quelle grandezze che le trasformazioni di Galileo, valide nella fisica classica, pensavano essere assolute. Vedremo in questo paragrafo che questa affermazione è solo parzialmente vera poiché se da un lato gli intervalli spaziali e temporali sono relativi troveremo che esiste invece un nuovo tipo di intervallo che assume lo stesso valore per tutti gli osservatori e che pertanto è assoluto.

Richiamiamo le trasformazioni di Lorentz dal riferimento O a quello O' nella forma degli intervalli

$$\left\{ \begin{array}{l} (x'_2 - x'_1) = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y'_2 - y'_1) = (y_2 - y_1) \\ (z'_2 - z'_1) = (z_2 - z_1) \\ (t'_2 - t'_1) = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right.$$

Ora eleviamo al quadrato i due membri di ciascuna eguaglianza

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x'^2 = \frac{\Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 - 2v \Delta x \Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ \Delta t'^2 = \frac{\Delta t^2 + \frac{v^2}{c^4} \Delta x^2 - 2 \frac{v}{c^2} \Delta x \Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{array} \right.$$

Poi riscriviamo le eguaglianze in termini non di Δt ma di $c\Delta t$ (lo stesso si faccia per $\Delta t'$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x'^2 = \frac{\Delta x^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta t^2 - 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ c^2 \Delta t'^2 = \frac{c^2 \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2 - 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{array} \right.$$

A questo punto si esegua la somma membro a membro delle prime tre equazioni e si sottragga la quarta

$$\begin{aligned}
 \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 &= \frac{\Delta x^2 + \frac{v^2}{c^2} c^2 \Delta t^2 - 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \frac{c^2 \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2 - 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t}{(1 - v^2 / c^2)} = \\
 &= \frac{\Delta x^2 + \frac{v^2}{c^2} c^2 \Delta t^2 - 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t - c^2 \Delta t^2 - \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2 + 2 \frac{v}{c} \Delta x c \Delta t}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \\
 &= \frac{\Delta x^2 (1 - v^2 / c^2) - c^2 \Delta t^2 (1 - v^2 / c^2)}{(1 - v^2 / c^2)} + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \\
 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2
 \end{aligned}$$

Giungiamo allora alla conclusione che il quadrato di un intervallo spaziale (e quindi la distanza spaziale) ed il quadrato di un intervallo temporale (e quindi la distanza temporale o durata) tra due eventi, come più volte osservato, non è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Tuttavia se gli osservatori inerziali sottraggono al quadrato della distanza spaziale tra due eventi il prodotto della velocità della luce per il quadrato della loro distanza temporale (che ha le dimensioni di una lunghezza elevata al quadrato) troveranno tutti lo stesso valore. Questo particolare modo di combinare tra loro gli intervalli spaziali e temporali viene detto **intervallo spaziotemporale** o **distanza spaziotemporale** per cui possiamo affermare che nella teoria della relatività ristretta **la distanza spazio-temporale tra gli eventi è la stessa per tutti gli osservatori inerziali** ovvero che **la distanza spaziotemporale tra due eventi è una grandezza assoluta**

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) - c^2 \Delta t'^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2 \Delta t^2 \quad (4)$$

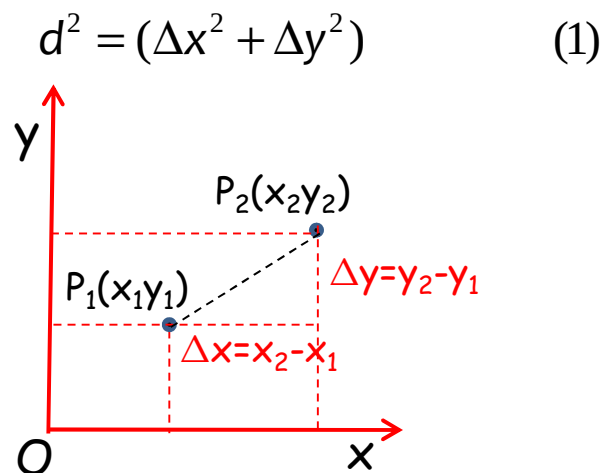
(si noti che in questa forma, l'assolutezza delle coincidenze spaziotemporali viste nella pagina precedente si deriva immediatamente). Nei prossimi paragrafi mostreremo come questo fatto possa essere sfruttato per giungere ad una elegante e potente riformulazione della teoria della relatività ristretta in termini geometrici.

La rotazione del riferimento tridimensionale

La proprietà delle trasformazioni di Lorentz di lasciare invariata la forma quadratica (4) fu messa in luce nel 1908 da Hermann Minkowsky, già professore di A. Einstein al politecnico di Zurigo, che sviluppò una elegante e potente formulazione geometrica della TRR. Per capire l'approccio proposto da Minkowsky vale la pena sviluppare alcune considerazioni preliminari.

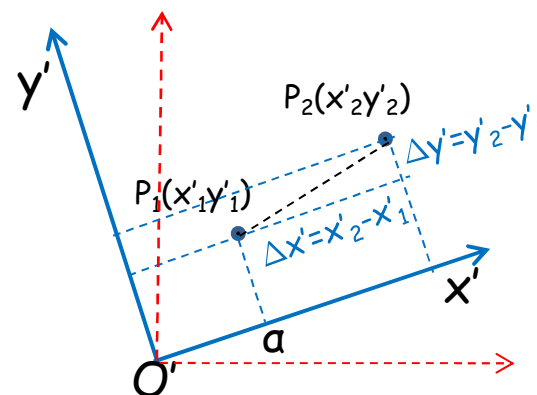
❑ Le rotazioni nello spazio tridimensionale

Per semplificare le formule senza perdere i concetti essenziali, pensiamo a **due punti dello spazio tridimensionale euclideo giacenti sul piano xy di un riferimento O**: la loro distanza può essere calcolata attraverso il teorema di Pitagora sommando i quadrati delle differenze delle coordinate



Ora assumiamo un riferimento **O'** ruotato, rispetto ad O, di angolo antiorario α attorno all'asse z normale al piano del foglio. Il nuovo osservatore misurerà diverse coordinate dei punti e quindi diversi valori degli intervalli $\Delta x'$ e $\Delta y'$ ma, quando va a calcolare la distanza tra P e Q, troverà lo stesso valore misurato da **O**

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2) \quad (2)$$

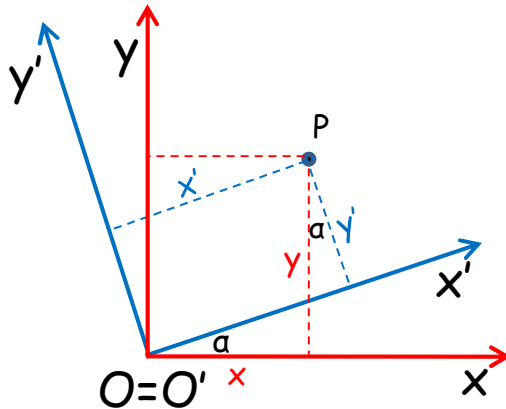


verificando il fatto ben noto che la distanza tra due punti del piano euclideo non viene alterata dalla rotazione del riferimento. La (1) e la (2) conducono allora alla seguente eguaglianza

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \quad (3)$$

E' utile verificare questo fatto considerando le trasformazioni cui sono soggette le coordinate cartesiane dei punti a seguito della rotazione.

Nel caso in cui il riferimento O' viene ruotato di un angolo α antiorario rispetto ad O abbiamo la situazione indicata nella seguente figura



dalla quale possiamo ricavare facilmente le seguenti relazioni tra le coordinate del punto P nei due riferimenti

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha \, x + \sin \alpha \, y \\ y' &= -\sin \alpha \, x + \cos \alpha \, y \end{aligned} \quad (4)$$

Da queste ricaviamo immediatamente le trasformazioni degli intervalli tra le coordinate di due punti

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \cos \alpha \, \Delta x + \sin \alpha \, \Delta y \\ \Delta y' &= -\sin \alpha \, \Delta x + \cos \alpha \, \Delta y \end{aligned} \quad (5)$$

che possono essere elevate al quadrato

$$\Delta x'^2 = \cos^2 \alpha \, \Delta x^2 + \sin^2 \alpha \, \Delta y^2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha \, \Delta x \, \Delta y$$

$$\Delta y'^2 = \sin^2 \alpha \, \Delta x^2 + \cos^2 \alpha \, \Delta y^2 - 2 \cos \alpha \sin \alpha \, \Delta x \, \Delta y$$

e sommate membro a membro

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Troviamo allora una espressione coincidente in con la (3). E' semplice intuire che nel caso avessimo considerato due punti P e Q nello spazio xyz invece che nel piano xy, e una rotazione del riferimento attorno ad una generica direzione dello spazio invece che attorno all'asse z, le coordinate dei punti P e Q avrebbero subito una trasformazione lineare più complessa della (4), ma sempre tale da lasciare invariata la distanza dei punti

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad (6)$$

Concludiamo allora che la rotazione del riferimento nello spazio euclideo tridimensionale determina una trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio tale per cui la distanza pitagorica di due punti rimane invariata.

La trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio a seguito della rotazione viene detta **trasformazione ortogonale** e le (4) e (5), sia pure in caso semplice di rotazione attorno all'asse z, ne sono un esempio.

❑ I vettori nello spazio tridimensionale

Un modo molto efficiente per trattare i punti dello spazio e le sue proprietà è quello di associare a ciascun punto un segmento orientato detto **vettore posizione** dove le proprietà geometriche dello spazio vengono incluse attraverso la definizione di un certo numero di operazioni: somma (e differenza), moltiplicazione scalare, prodotto scalare e vettoriale. Il concetto di vettore descrive efficacemente anche le proprietà delle coordinate dei punti dello spazio rispetto alle rotazioni.

Ad esempio si consideri un generico **punto P** dello spazio di coordinate x, y e z cui viene associato il **vettore posizione**

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (8)$$

le cui componenti coincidono con le coordinate cartesiane del punto. Quando si effettua una **rotazione del riferimento** tali componenti sono soggette ad una trasformazione lineare che potremmo esprimere in modo generale attraverso una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9)$$

oppure in modo più sintetico come

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad (10)$$

Notiamo che la distanza del punto P dalla origine O del riferimento, nel linguaggio dei vettori, è il modulo quadrato del vettore posizione ovvero il **prodotto scalare del vettore posizione con se stesso**

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (11)$$

Come osservato nel paragrafo precedente, la rotazione del riferimento ha la proprietà di lasciare inalterata la distanza di due punti dello spazio e quindi anche la distanza del punto P dall'origine O del riferimento. Questo significa che nel caso di una rotazione si deve avere

$$\vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad (12)$$

D'altra parte se eseguiamo una rotazione, dalla (3) otteniamo (introducendo la matrice trasposta R^T) il seguente prodotto scalare

$$\vec{r}' \cdot \vec{r}' = (R\vec{r}) \cdot (R\vec{r}) = \vec{r} R^T R \vec{r} \quad (12b)$$

che coincide con la (5) nel caso in cui

$$R^T R = I \quad \text{da cui} \quad R^T = R^{-1} \quad (13)$$

giungiamo così alla conclusione che la **rotazione del riferimento determina una trasformazione lineare delle componenti di un generico vettore esprimibile con una matrice R che soddisfa la (6)**. Una tale matrice viene detta **ortogonale**.

Naturalmente quanto detto per il vettore posizione di un generico punto vale per i vettori posizione

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

ed anche per la loro differenza

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

A seguito di una rotazione il prodotto scalare di questo vettore con se stesso rimane inalterato per cui, in analogia con la (12), possiamo scrivere

$$(\vec{r}_2' - \vec{r}_1') \cdot (\vec{r}_2' - \vec{r}_1') = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

che fornisce

$$(\Delta x', \Delta y', \Delta z') \cdot (\Delta x', \Delta y', \Delta z') = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

da cui, infine, l'espressione

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

che coincide con la (6) dimostrando che le proprietà delle rotazioni possono essere reinterpretate attraverso i vettori. Riassumendo: i) si associa al generico punto dello spazio il vettore posizione; ii) si associa alla generica rotazione del riferimento una matrice R che opera sui vettori posizione; iii) si richiede che la rotazione lasci invariata la distanza di due punti dello spazio il che richiede che la matrice R sia ortogonale ovvero soddisfi una relazione come la (13).

Questo modo formale di gestire le rotazioni torna molto utile nelle considerazioni del prossimo paragrafo.

□ Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale

Una legge fisica è una relazione tra grandezze fisiche - espressa in forma di equazione - capace di descrivere una certa classe di fenomeni. Mentre la forma dettagliata della legge fisica trova il suo fondamento negli esperimenti riguardanti quella specifica classe di fenomeni, la sua struttura generale è dettata da un certo numero di requisiti che si ritiene debbano essere soddisfatti da qualunque legge fisica.

Ad esempio un requisito generale è che i due membri della equazione che esprime una legge fisica abbiano le stesse dimensioni, siano esse metri, newton o altro.

Poi, dato che fino ad oggi si è verificato che nello spazio non vi sono direzioni privilegiate o posizioni privilegiate, risulta necessario richiedere che le leggi fisiche abbiano una 'forma' indipendente dall'orientamento del riferimento o dalla posizione del riferimento.

Naturalmente, sulla base del principio di relatività, risulta anche necessario richiedere che la 'forma' della legge fisica sia indipendente dalla velocità del riferimento (uniforme rispetto ad un qualche riferimento inerziale).

Tra questi, prendiamo in esame il requisito della indipendenza della 'forma' della equazione dall'orientamento del riferimento.

Per ragionare su di una legge concreta, prendiamo in esame il secondo principio della dinamica newtoniana

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (15)$$

che esprime il legame esistente tra la forza applicata ad un punto materiale e l'accelerazione che gli viene impressa.

Come osservato poco fa, ci attendiamo che il 'contenuto fisico' di questa equazione sia indipendente dall'orientamento nello spazio del riferimento O prescelto. Ciò significa che qualora assumessimo un riferimento O' ruotato rispetto ad O, il 'contenuto fisico' della equazione dovrebbe rimanere invariato. In effetti le cose stanno così. Infatti, ricordando la (10), una rotazione del riferimento determina la seguente trasformazione delle componenti dei vettori

$$R\vec{f} = R(m\vec{a}) = mR\vec{a} \quad (15b)$$

(essendo la massa una grandezza scalare non viene modificata dalla matrice di rotazione) che conduce alla relazione

$$\vec{f}' = m\vec{a}' \quad (16)$$

In tale equazione le componenti dei vettori sono cambiate rispetto alla (15) - un fatto inevitabile poiché è cambiato l'orientamento del riferimento - tuttavia la struttura o **forma della equazione**, ovvero il tipo di legame esistente tra forza ed accelerazione è rimasto lo stesso - i) modulo della forza proporzionale al modulo della accelerazione, ii) forza ed accelerazione lungo la stessa direzione e nello stesso verso -

e con esso anche ciò che abbiamo chiamato 'contenuto fisico' della equazione.

In che modo è stata garantita questa proprietà? Un attimo di riflessione è sufficiente per individuare nella (15b) il passaggio chiave: l'equazione ha conservato la sua forma a seguito della rotazione perché i due membri si sono trasformati nello stesso modo e questo - a sua volta - è accaduto perché tali membri sono enti matematici dello stesso genere: nel caso specifico entrambi vettori.

Giungiamo così ad una importante conclusione di valore generale detta **principio di covarianza**: **affinché una equazione sia invariante in forma rispetto ad una certa trasformazione è necessario che entrambi i suoi membri si trasformino nello stesso modo quando viene compiuta quella trasformazione.**

Nel caso della (15) il requisito della invarianza in forma della equazione rispetto alle rotazioni è stato assicurato dal fatto di avere scritto l'equazione come eguaglianza tra vettori. Nel fare questa cosa apparentemente ovvia, abbiamo in realtà immesso nella equazione stessa il fatto fisico fondamentale che l'orientamento del riferimento non può avere alcun significato fisico particolare se non quello di permettere di associare ad ogni vettore certe particolari componenti. Il vero significato fisico è invece contenuto nella 'forma' della equazione che è stata salvaguardata dall'aver scritto l'equazione con membri matematicamente omogenei ovvero in forma covariante.

La formulazione geometrica della teoria della relatività ristretta

Le considerazioni sulle rotazioni sviluppate nel precedente paragrafo sono sufficienti per comprendere la riformulazione della teoria della relatività ristretta proposta da Minkowsky.

□ Trasformazioni di Lorentz e rotazioni nello spazio di Minkowsky

In primo luogo ricordiamo che **il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, descritto da una trasformazione di Lorentz, modifica gli intervalli spaziali e temporali tra gli eventi ma non l'intervallo spazio-temporale**, come espresso dalla (4) del par 3.9

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) - c^2 \Delta t'^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2 \Delta t^2 \quad (1)$$

Notiamo che questa espressione ha una forte somiglianza con la (6) del par 3.10 che esprimeva l'invarianza della distanza di due punti dello spazio a seguito di una rotazione del riferimento tridimensionale. Ciò potrebbe **suggerire di interpretare una trasformazione di Lorentz come una 'rotazione' del riferimento**. Se si vuole seguire questa strada è però necessario superare alcune difficoltà.

In primo luogo risulta necessario estendere la nozione di spazio e sistema di riferimento. Infatti nella (6) del par 3.10 compaiono i quadrati dei tre intervalli spaziali Δx , Δy , Δz mentre qui si aggiunge pure il quadrato dell'intervallo temporale $c\Delta t$ (si noti che $c\Delta t$ ha le dimensioni di una lunghezza come gli intervalli spaziali). Questo indica che **gli eventi devono essere collocati in uno spazio a quattro**

dimensioni e che in esso **un riferimento ha quattro assi coordinati**, tre per rappresentare gli intervalli spaziali ed il quarto per l'intervallo temporale.

A questo punto bisogna però tenere conto del fatto che la distanza, in questo ipotetico spazio a quattro dimensioni, non viene calcolata sommando i quadrati degli intervalli secondo il teorema di pitagora ma piuttosto sommando i quadrati degli intervalli spaziali e sottraendo quello dell'intervallo temporale. Può apparire una differenza di poco conto tuttavia ciò comporta che **la distanza tra due punti in questo spazio a quattro dimensioni possa anche essere negativa**, un fatto che non ha riferimenti nella ordinaria geometria euclidea dove le distanze sono sempre positive o al più nulle. Per tale motivo tale spazio a quattro dimensioni viene detto **spazio pseudoeuclideo**.

Un espediente per non rinunciare al teorema di pitagora nel calcolo della distanza, tenendo però conto del fatto che questa va calcolata sottraendo il quadrato dell'intervallo temporale, è quello di riscrivere la (1) con **l'unità immaginaria**

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) + (ic\Delta t')^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + (ic\Delta t)^2 \quad (2)$$

Posta in questa forma si vede che introducendo, accanto ai tre assi reali, un'asse dei tempi immaginario **la distanza tra due punti dello spazio quadrimensionale può essere calcolata formalmente con il teorema di pitagora** (in questo modo la natura pseudoeuclidea dello spazio è espressa dalla presenza di un asse immaginario piuttosto che dalla modifica del teorema di pitagora).

Fatte queste osservazioni giungiamo alla importante conclusione che il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero una trasformazione di Lorentz, può essere interpretata come una rotazione di un riferimento in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni che chiameremo **spazio di Minkowsky**.

Per gestire in modo razionale le proprietà dello spazio di Minkowsky conviene procedere sulla falsariga di ciò che abbiamo fatto nel paragrafo precedente nel caso dello spazio tridimensionale.

In primo luogo osserviamo che **ad un evento fisico** - che un certo osservatore O colloca nella posizione x, y e z al tempo t - viene a **corrispondere un punto in un riferimento quadridimensionale O nello spazio di Minkowsky**.

Se introduciamo il concetto di **vettore posizione nello spazio di Minkowsky** o **quadrivettore posizione**, ad un evento fisico corrisponderà il seguente quadrivettore

$$\bar{R} = (x, y, z, ict) \quad (12)$$

Vale la pena richiamare l'attenzione sul fatto che introducendo lo spazio di Minkowsky **il tempo viene integrato nella geometria dello spazio**, in quanto cessa di essere un parametro fisico esterno per divenire invece una coordinata degli eventi del tutto simile alle coordinate spaziali.

Quando si passa da un riferimento inerziale O ad un riferimento inerziale O' le coordinate di un evento fisico si

modificano in accordo con la trasformazione di Lorentz che possiamo porre nella forma di trasformazione di quadrivettori

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \quad (15)$$

ed anche nella forma compatta seguente

$$\bar{R}' = \Lambda \bar{R} \quad (16)$$

Dunque una trasformazione di Lorentz può essere interpretata come una trasformazione lineare Λ delle componenti del quadrivettore posizione (si noti ancora una volta l'analogia formale con le rotazioni tridimensionali).

Introduciamo ora il concetto di **prodotto scalare tra quadrivettori**. Dato che con l'introduzione di un asse immaginario dei tempi abbiamo ripristinato la validità del teorema di pitagora, il prodotto scalare può essere definito in modo analogo al caso tridimensionale. Il **modulo quadrato del quadrivettore posizione** sarà dato quindi dal prodotto scalare del quadrivettore con se stesso

$$\bar{R} \cdot \bar{R} = (x, y, z, ict) \cdot (x, y, z, ict) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (17)$$

E' facile verificare che la trasformazione lineare Λ (ovvero la trasformazione di Lorentz) lascia invariato, come atteso, il prodotto scalare (17). Dalla (16) si ha la seguente relazione

$$\bar{R}' \cdot \bar{R}' = (\Lambda \bar{R}) \cdot (\Lambda \bar{R}) = \bar{R} \Lambda^T \Lambda \bar{R}$$

che lascerà invariato il prodotto scalare solo se

$$\Lambda^T \Lambda = I$$

In effetti dalla (15) si ha che

$$\begin{aligned} \Lambda^T \Lambda &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-v^2/c^2} \begin{vmatrix} 1-v^2/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-v^2/c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

che conferma quindi la (18). Dunque una trasformazione di Lorentz, ovvero la trasformazione lineare Λ , lascia invariato il modulo quadrato del quadrivettore posizione.

Questo significa che una trasformazione di Lorentz deve lasciare invariato anche il modulo quadrato del quadrivettore differenza tra due eventi fisici. Dati allora i quadrivettori

$$\bar{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \bar{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2)$$

(18) possiamo calcolare il quadrivettore differenza

$$\begin{aligned} \bar{R}_2 - \bar{R}_1 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ict_2 - ict_1) = \\ &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) \end{aligned}$$

le cui componenti sono gli intervalli spaziali e temporale tra i due eventi. Calcolando ora il modulo di questo quadrivettore otteniamo l'espressione seguente

$$\begin{aligned} (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \cdot (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) = \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \end{aligned}$$

che coincide con la distanza spaziotemporale tra i due eventi. Dunque, la distanza spaziotemporale tra due eventi fisici può essere interpretata come il modulo quadrato del quadrivettore differenza dei due eventi e, come tale, è lasciata invariata dalla trasformazione di Lorentz.

Riassumendo, la procedura appena discussa prevede

- l'introduzione di uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, tre reali (per lo spazio) ed una immaginaria (per il tempo), dove le distanze si calcolano con il teorema di pitagora;

- l'introduzione di quadrivettori posizione in tale spazio con le consuete operazioni di somma, differenza e prodotto scalare;
- ad ogni evento fisico misurato da un certo osservatore O corrisponde allora un quadrivettore posizione in un certo riferimento O quadridimensionale;
- al passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero alla trasformazione di Lorentz, corrisponde una trasformazione lineare delle componenti del quadrivettore posizione;
- tale trasformazione lineare lascia invariato il prodotto scalare tra quadrivettori e può essere interpretata come una rotazione del riferimento quadridimensionale;
- in particolare tale trasformazione lascia invariato il prodotto scalare con se stesso del quadrivettore posizione differenza tra due eventi che coincide con la distanza spaziotemporale tra gli eventi stessi (che è il punto da cui sono partite le nostre considerazioni).

□ Le rotazioni nello spazio di Minkowsky ed i postulati della teoria della relatività ristretta

Come tante volte sottolineato, la teoria della relatività ristretta ha il suo punto d'inizio nei postulati di relatività e costanza della velocità della luce dai quali si ritiene debbano discendere tutte le conseguenze fisiche della

teoria stessa.

Dovendo ricostruire la fisica dall'inizio, abbiamo in primo luogo dedotto dai due postulati **le nuove trasformazioni degli eventi fisici**, ovvero le trasformazioni di posizione e tempo tra due osservatori inerziali (trasformazioni di Lorentz).

Dopo avere analizzato le rivoluzionarie proprietà di queste trasformazioni, abbiamo mostrato che collocando gli eventi fisici in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, con tanto di quadrivettori dotati delle 'consuete' operazioni (spazio di Minkowsky), le trasformazioni di Lorentz possono essere interpretate in chiave geometrica come rotazioni del riferimento in tale spazio.

Giungiamo in questo modo a comprendere che per rappresentare gli eventi fisici in accordo con i postulati della teoria è sufficiente posizzionarli nello spazio di Minkowsky:

i postulati della TRR sono soddisfatti collocando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky.

E' utile vedere questo fatto con un esempio diretto. Immaginiamo che un osservatore O misuri la velocità della luce, nel proprio riferimento misurando, l'intervallo spaziale e temporale intercorrente tra gli eventi partenza e arrivo del segnale luminoso

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{(t_2 - t_1)} \quad (1)$$

Quadrando, troviamo facilmente la relazione

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (2)$$

ed anche l'equazione seguente

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \quad (3)$$

Ora, notiamo che associando ai due eventi fisici i quadrivettori posizione nello spazio di Minkowsky

$$\bar{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \bar{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2) \quad (4)$$

si ottiene

$$\bar{R}_2 - \bar{R}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)) \quad (5)$$

da cui risulta che la (3) può essere scritta come prodotto scalare del quadrivettore differenza degli eventi fisici

$$(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \cdot (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) = 0 \quad (6)$$

Poiché sappiamo che il prodotto scalare è lasciato invariato dal cambiamento di riferimento inerziale o trasformazione di Lorentz, possiamo affermare che O' potrà scrivere

$$(\bar{R}_2' - \bar{R}_1') \cdot (\bar{R}_2' - \bar{R}_1') = 0 \quad (7)$$

dalla quale, con gli stessi passaggi sopra esposti, si giunge evidentemente alla espressione

$$c = \frac{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}{(t_2' - t_1')}$$

che rappresenta il valore della velocità della luce misurata da O' il

quale, in accordo con il secondo postulato, coincide con quello misurato da O.

Evidentemente il passaggio cruciale è quello che permette di passare dalla (6) alla (7) per cui possiamo concludere che il secondo postulato risulta garantito dalla invarianza del prodotto scalare rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, come si diceva, rappresentando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky si assicurano agli eventi stessi le proprietà richieste dai due postulati della teoria.

E' naturale domandarsi a questo punto se anche la costruzione di leggi fisiche in accordo con i postulati della teoria possa essere ottenuta formulando tali leggi nello spazio di Minkowsky.

Per rispondere a questa domanda richiamiamo innanzitutto il postulato di relatività, che in effetti si pronuncia su come 'costruire' le leggi fisiche: **le leggi fisiche devono essere le 'stesse' per tutti gli osservatori inerziali.** Con 'stesse' non si può certo intendere che le grandezze fisiche devono assumere gli stessi valori numerici in tutti i riferimenti ma, piuttosto, che la loro reciproca relazione deve essere la 'stessa' ovvero, più precisamente, che **le equazioni delle leggi fisiche devono avere la 'stessa forma' in tutti i riferimenti inerziali.**

Poiché si passa da un riferimento inerziale all'altro con una trasformazione di Lorentz, il principio di relatività sostanzialmente richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una trasformazione di Lorentz.**

Ma, abbiamo visto che una trasformazione di Lorentz è interpretabile come una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky per cui il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky.**

Richiamiamo ora le conclusioni raggiunte nel paragrafo ‘*Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale*’, dove abbiamo mostrato che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni tridimensionali è sufficiente scriverle in forma covariante ovvero in forma tale che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni tridimensionali stesse.

Da questo possiamo allora dedurre che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni nello spazio di Minkowsky sarà sufficiente scrivere tali leggi in forma covariante in tale spazio, ovvero in modo che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni stesse ovvero rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Giungiamo allora a comprendere che, in ultima analisi, il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere covarianti nello spazio di Minkowsky.**

Possiamo allora mettere assieme le conclusioni cui siamo pervenuti affermando che

i postulati della teoria della relatività ristretta sono soddisfatti:

- i) **posizionando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky;**
- ii) **scrivendo le leggi fisiche in forma covariante nello spazio di Minkowsky.**

Tale affermazione, spesso riferita come **postulato di covarianza**, traduce in una **prescrizione formale ed operativa di natura geometrica il contenuto fisico dei postulati della teoria**. Attraverso di esso risulta più semplice riformulare, e se necessario correggere, le teorie della fisica classica in modo da accordarle con i principi della relatività, mentre rappresenta il principio guida fondamentale nella costruzione di ogni nuova teoria.

Gli effetti relativistici nello spazio di Minkowsky

Le trasformazioni di Lorentz come rotazione nello spazio di Minkowsky

Le trasformazioni di Lorentz da noi considerate sono relative a sistemi di riferimento ad assi paralleli in moto relativo uniforme lungo l'asse delle ascisse. Con questa scelta geometrica le uniche variabili soggette a trasformazione sono le ascisse x ed il tempo t mentre le y e le z rimangono inalterate. Dunque quella che in generale dovrebbe essere una rotazione nello spazio quadridimensionale si riduce, in questo caso, ad una rotazione di due assi ovvero ad una rotazione nel piano.

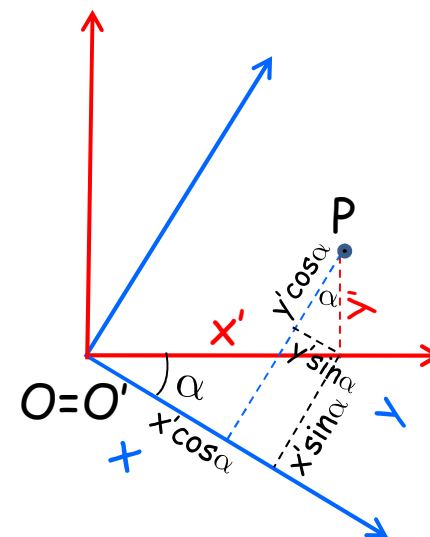
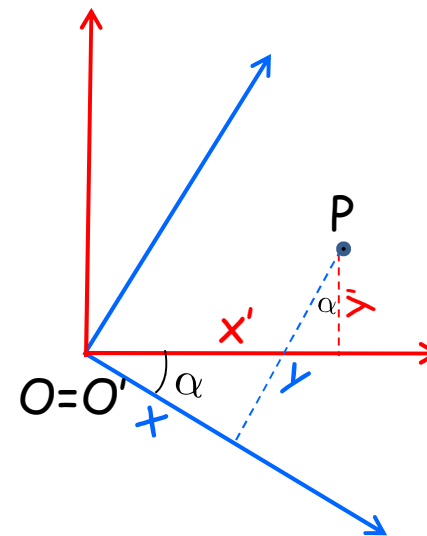
Possiamo allora facilmente dedurre per via geometrica la relazione esistente tra le coordinate x e t di un quadrivettore a seguito di una rotazione nello spazio di Minkowsky di un certo angolo assegnato.

Per cominciare analizziamo una **rotazione piana ordinaria** di un certo angolo α . Con tutta evidenza il punto P possiede coordinate x' e y' rispetto al sistema iniziale (in rosso) e coordinate x e y rispetto a quello finale ruotato (in blu). Dalla figura sottostante troviamo facilmente

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{x' \cos \alpha - y' \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \\ y = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha = \frac{y' \cos \alpha + x' \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \end{cases}$$

le quale si può anche scrivere come

$$\begin{cases} x = \frac{x' - y' \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ y = \frac{y' + x' \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \end{cases}$$



Tali espressioni mostrano una notevole somiglianza con le trasformazioni di Lorentz e lo diventano esattamente se teniamo conto che l'asse y è l'asse immaginario dei tempi

$$y' = ict' \quad y = ict$$

e richiediamo la seguente eguaglianza

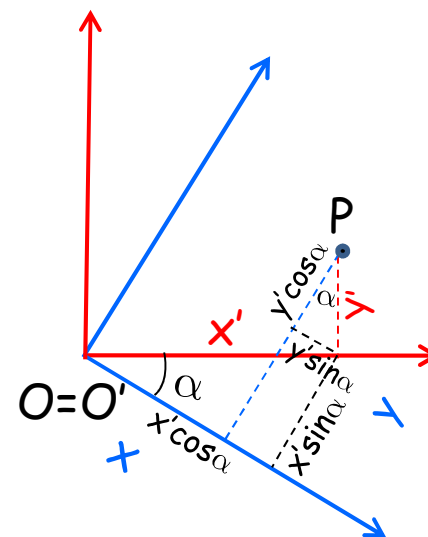
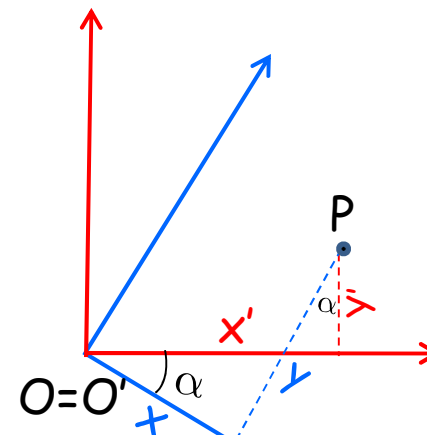
$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{v^2}{c^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = i \frac{v}{c}$$

Infatti sostituendo ora y' , y , e $\operatorname{tg} \alpha$ nelle formule della rotazione ordinaria della pagina precedente otteniamo le espressioni

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' - y' \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ y = \frac{y' + x' \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' - ict'(i \frac{v}{c})}{\sqrt{1 + (i \frac{v}{c})^2}} \\ ict = \frac{ict' + x'(i \frac{v}{c})}{\sqrt{1 + (i \frac{v}{c})^2}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

perfettamente coincidenti con le trasformazioni di Lorentz per le coordinate x e t ! Giungiamo allora alla conclusione che : il passaggio da un riferimento inerziale O' in moto traslatorio uniforme con velocità v lungo l'asse delle x ad un riferimento fisso O (trasformazione di Lorentz) è formalmente identica ad una rotazione oraria piana nello spazio di Minkowsky degli assi x' e ict' di un angolo tale che

$$(15) \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha = i \frac{v}{c}}$$



Questo significa che è possibile costruire una trasformazione di Lorentz ruotando due assi x' e ict' di un certo angolo orario α tale che $\tan \alpha = i v/c$ (si noti che essendo un asse immaginario le tangenti degli angoli, rapporti di ordinate ed ascisse, sono immaginarie).

□ Distanza spaziotemporale

Dati due eventi fisici P e Q , la trasformazione di Lorentz (rotazione) lascia invariata la distanza degli eventi

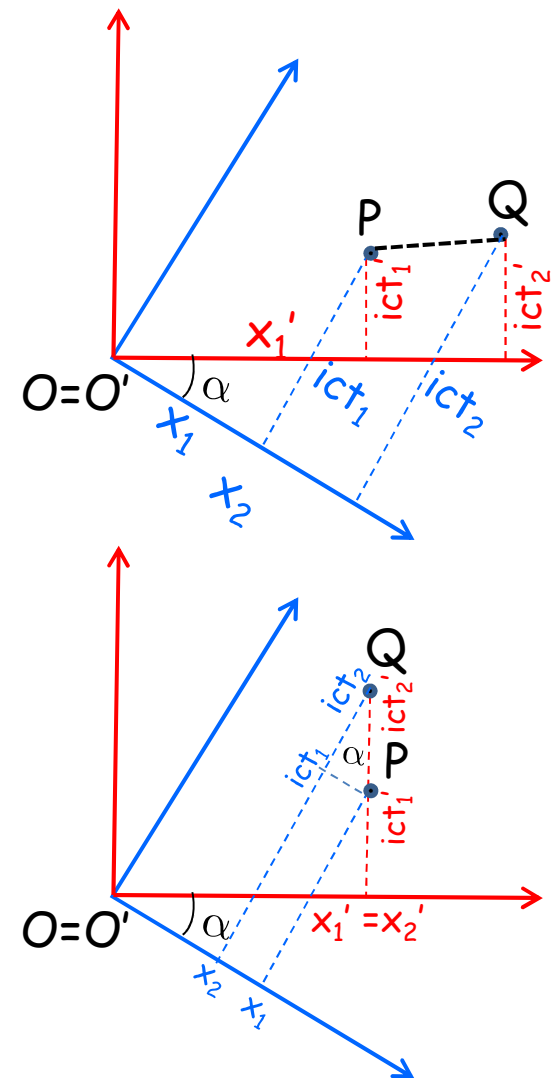
$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \Delta y' = ic\Delta t' \quad \Delta y = ic\Delta t$$

sostituendo otteniamo

$$\Delta x'^2 + (ic\Delta t')^2 = \Delta x^2 + (ic\Delta t)^2 \quad \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

la quale mostra che l'invarianza della distanza spaziotemporale tra due eventi in seguito ad una trasformazione di Lorentz viene interpretata come invarianza della distanza pitagorica nello spazio di Minkowsky a seguito della rotazione corrispondente.

Si noti che, come caso particolare, si ottiene immediatamente che se P e Q coincidono per O' allora coincidono anche per O da cui l'affermazione che se due eventi coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora devono coincidere per ogni altro.



□ Dilatazione del tempo

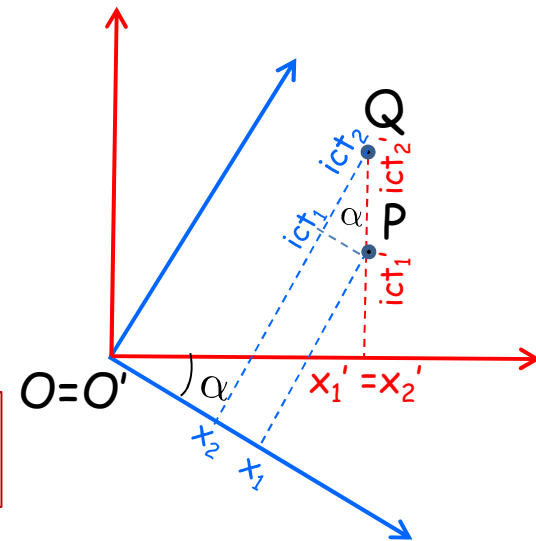
Consideriamo l'orologio luminoso con il cammino di andata e ritorno del raggio lungo l'asse y' del riferimento O' analizzato a suo tempo. La partenza e l'arrivo del raggio luminoso in O' corrispondono a due eventi con la stessa ascissa x' e diversa ordinata ict' (vedi figura).

La trasformazione di Lorentz (rotazione del riferimento) fa sì che l'osservatore O veda invece due eventi con un certo intervallo spaziale $x_2 - x_1$ (che O' non osserva) e soprattutto un diverso intervallo temporale $t_2 - t_1$ (dilatazione del tempo). Per quanto riguarda quest'ultimo si ha

$$\Delta y = \Delta y' \cos \alpha \quad \Delta y = ic\Delta t \quad \Delta y' = ic\Delta t' \quad \operatorname{tg} \alpha = i \frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = ic\Delta t' / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = ic\Delta t' / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$



□ Relatività della simultaneità

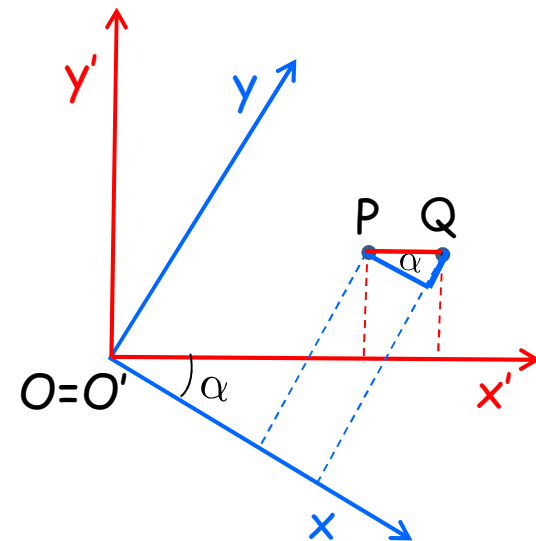
Gli eventi P e Q , in posizioni diverse, appaiono simultanei a O' ma non ad O (relatività della simultaneità). Dalla geometria si ha facilmente che

$$\Delta y = \Delta x' \sin \alpha \quad \Delta y = ic\Delta t \quad \operatorname{tg} \alpha = i \frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = \Delta x' \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \Delta x' \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

da cui la desincronizzazione

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



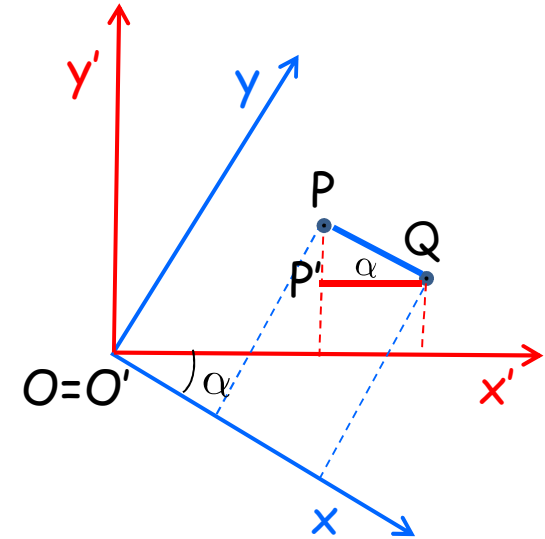
□ Contrazione delle lunghezze

Data una lunghezza in quiete nel riferimento O' , l'osservatore in moto O misura una lunghezza pari alla distanza di due suoi osservatori che vedono gli estremi nello stesso istante, dunque la distanza dei punti P e Q . L'osservatore O' invece misura la distanza dei punti P' e Q . Abbiamo allora

$$\Delta x \cos \alpha = \Delta x' \quad \text{tg} \alpha = i \frac{v}{c}$$

da cui la formula della contrazione delle lunghezze

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



Alcuni commenti

Spesso si dice che con la teoria della relatività tutto diventa relativo. Nulla di più sbagliato!

La teoria della relatività afferma che certe grandezze che nella fisica classica si pensava fossero assolute sono in realtà relative ma che esistono nuove grandezze fisiche, ignote alla fisica classica, che invece sono assolute. In un certo senso **la teoria della relatività rende relative le vecchie grandezze fisiche ma ne introduce di nuove che sono assolute.**

Questo fatto è in se evidente se riassumiamo le principali conclusioni cui siamo giunti analizzando le trasformazioni di Lorentz:

- i) gli intervalli temporali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relativi ed aumentano con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *dilatazione dei tempi*);
- ii) la simultaneità tra due eventi separati nello spazio dipende dall'osservatore inerziale, è dunque relativa ed il grado di dissincronia aumenta con la velocità dell'osservatore e con la distanza spaziale degli eventi stessi (*relatività della simultaneità*);
- iii) le distanze spaziali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relative e diminuiscono con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *contrazione delle lunghezze*);

- iv) la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque una grandezza assoluta;
- v) le distanze spaziotemporali e le coincidenze spaziotemporali sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e sono dunque grandezze assolute;
- vi) l'ordine temporale di eventi che possono essere connessi causalmente è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque assoluto.