

La relatività della simultaneità

Richiamando ancora la trasformazione del tempo da O' ad O

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad 1)$$

cercheremo ora di comprendere il significato del termine A. La cosa più semplice è riferirsi ad una coppia di eventi tali che

$$(x'_2 - x'_1) \neq 0 \quad (t'_2 - t'_1) = 0 \quad 2)$$

ovvero eventi che per l'osservatore O' accadono in punti dello spazio differenti lungo la direzione del moto relativo dei riferimenti ma che vengono misurati accadere nello stesso istante essendo quindi simultanei.

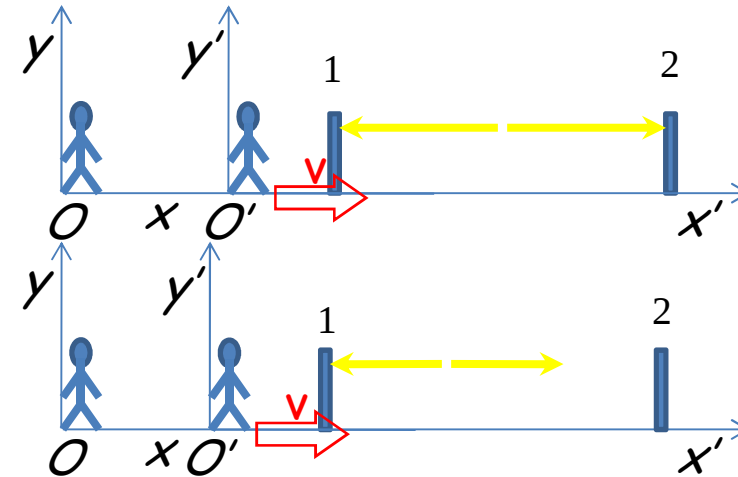
Notiamo subito che una tale coppia di eventi fornisce la seguente espressione della (1)

$$(t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che possiamo porre nella forma

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad 3)$$

Questa espressione mostra che **i due eventi non sono misurati come simultanei dall'osservatore in moto relativo O che li vede dissincroni in una misura crescente con la loro separazione spaziale** (si noti in questa formula la separazione spaziale è espressa nelle variabili di O').



Per interpretare questo fatto immaginiamo che nel riferimento O' , lungo la direzione x' , siano disposti due traguardi distanti L' nelle posizioni x'_1 e x'_2 . Ad un certo istante, dal punto di mezzo (tra i due traguardi), vengono emessi due raggi luminosi lungo l'asse x' in versi opposti, raggiungendo, dopo un certo tempo, i traguardi stessi. Senza dubbio per l'osservatore O' i raggi raggiungono i traguardi contemporaneamente. Gli intervalli spaziali e temporali che separano gli eventi arrivo dei due raggi luminosi sui due traguardi valgono allora

$$\Delta x' = (x'_2 - x'_1) = L' \quad \Delta t' = (t'_2 - t'_1) = 0$$

Quali intervalli misura invece l'osservatore O ? Mentre O' vede i raggi cadere simultaneamente sui due traguardi, l'osservatore O , vede un raggio andare incontro al traguardo (1) e l'altro inseguire il traguardo (2). Dato che **la velocità della luce vale c per tutti e due i raggi luminosi** egli deve concludere che la luce raggiungerà

prima un traguardo e poi l'altro. Ora, assumendo come origine dei tempi l'istante in cui vengono emessi i raggi luminosi, le posizioni lungo l'asse delle x dei raggi e dei traguardi sono date dalle espressioni

$$\text{traguardo(1)} \quad x_0 - \frac{L}{2} + vt$$

$$\text{raggio(1)} \quad x_0 - ct$$

$$\text{traguardo(2)} \quad x_0 + \frac{L}{2} + vt$$

$$\text{raggio(2)} \quad x_0 + ct$$

dove, introducendo L , abbiamo previsto la possibilità che i due traguardi vengano misurati da O ad una distanza diversa da quella misurata da O' .

Chiaramente i raggi incontrano i rispettivi traguardi quando eguagliano le rispettive posizioni sull'asse delle x per cui otteniamo le uguaglianze

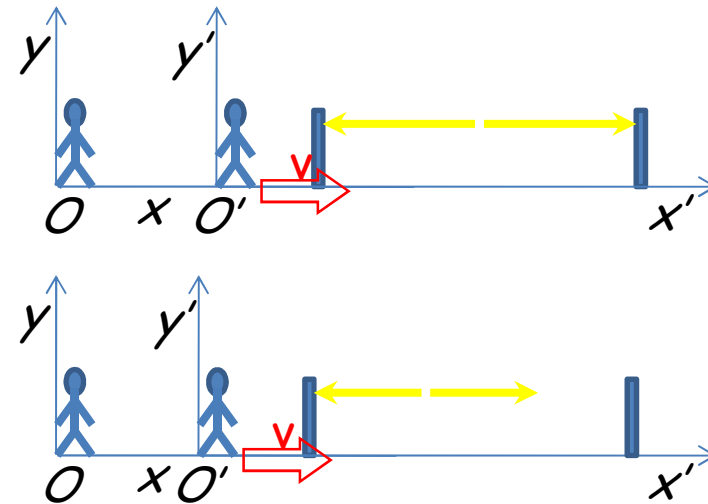
$$x_0 - ct_1 = x_0 - \frac{L}{2} + vt_1 \quad x_0 + ct_2 = x_0 + \frac{L}{2} + vt_2$$

da cui si ottengono i tempi

$$t_1 = \frac{L/2}{c+v} \quad t_2 = \frac{L/2}{c-v}$$

ed infine la separazione tra gli eventi di arrivo dei due raggi sui traguardi misurata da O

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} L / (1 - \frac{v^2}{c^2}) \quad 4)$$



Tale espressione non può ancora essere confrontata con la (3) perché in quella formula l'intervallo spaziale risulta misurato da O' e non da O . Le due espressioni (4) e (3) risulteranno coincidenti se

$$L = L' \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad 5)$$

Infatti sostituendo la (5) nella (4) troviamo

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} L' \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{(1 - v^2 / c^2)} = \frac{\frac{v}{c^2} L'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

da cui si ottiene infine l'espressione

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

che coincide con la (3)!

Dunque, ammettendo la relazione (5) che interpreteremo nel paragrafo seguente, i due osservatori misurano differenti situazioni. O vede i raggi luminosi raggiungere i traguardi nello stesso istante mentre O' vede il primo raggio andare incontro al primo traguardo ed il secondo raggio inseguire il secondo traguardo. Nonostante questo fatto entrambi gli osservatori misurerebbero l'arrivo dei raggi sui traguardi come simultaneo se la luce fosse soggetta alla legge galileiana di composizione della velocità (è facile provarlo!). Il punto però è che il secondo postulato afferma proprio che la luce si propaga con la stessa velocità per tutti gli osservatori violando la legge di composizione galileiana, un fatto che costringe a concludere che l'arrivo dei raggi sui due traguardi non può essere simultaneo per tutti e due gli osservatori.

L'esempio chiarisce allora che il secondo postulato comporta che **due eventi simultanei per l'osservatore in quiete risultano dissincroni per l'osservatore in movimento in misura crescente con la loro separazione spaziale.** Aumentando la velocità di traslazione del riferimento O' , pur restando per lui sincroni gli eventi, aumenta il dissincronismo misurato da O , che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **desincronizzazione degli intervalli temporali** e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz **due eventi possono essere simultanei per un solo osservatore risultando dissincroni per tutti gli altri** un fatto riferito sinteticamente affermando che, contrariamente a ciò che accadeva nella fisica classica, **la simultaneità degli**

eventi è un concetto relativo.

Per finire vale la pena notare che questo nuovo effetto comporta che un intervallo giudicato spaziale da O' viene invece giudicato come spaziale e temporale da O . Le trasformazioni di Galileo ammettevano che un intervallo puramente temporale per un osservatore potesse essere interpretato come spaziale e temporale da un altro (un fenomeno periodico per O' si chiude in tempi diversi ed in punti diversi per O). Tuttavia un intervallo puramente spaziale per un osservatore, rimaneva tale per ogni altro. In relatività il cerchio si chiude e si osserva una completa reversibilità dei punti di vista per cui anche **la definizione della natura spaziale o temporale di un intervallo acquisisce un carattere completamente relativo.**

La contrazione delle lunghezze

L'analisi del concetto di simultaneità sviluppata nel paragrafo precedente ha richiesto ad un certo punto la seguente relazione (vedi la (5)) tra la misura di lunghezza compiuta da O' - che vedeva i traguardi in quiete ad una distanza L' - e quella compiuta da O - che invece vedeva i traguardi in moto con velocità v

$$L = L' \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad (1)$$

Questo significa che non possiamo semplicemente assumere che i due tipi di misura coincidano ma che, al contrario, dobbiamo affrontare il problema inedito di misurare la distanza tra due traguardi che si trovino in movimento rispetto all'osservatore, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie quando i due traguardi si trovano in quiete. Infatti l'osservatore O', rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustapponendo un regolo graduato e annotando le tacche corrispondenti ai due traguardi. In questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi è verificata per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa.

Ragionando in termini di eventi fisici, che in questo consistono nella coincidenza dei traguardi con le tacche del regolo, abbiamo per l'osservatore O' i seguenti intervalli

$$(x'_2 - x'_1) = L' \quad (t'_2 - t'_1) \text{ qualsiasi} \quad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O che li vede muoversi? Può ancora utilizzare il regolo per misurare la distanza dei traguardi ora che sono in moto rispetto al regolo stesso?

Chiaramente in questo caso la difficoltà consiste nel fatto che i traguardi si muovono rispetto al regolo per cui il confronto delle loro posizioni lungo il regolo può essere fatto solo specificando l'istante di tempo. Un attimo di riflessione chiarisce che l'unica sensata possibilità è quella di confrontare tra loro le posizioni dei traguardi lungo il regolo nello stesso istante di tempo. Si potrebbe così identificare **la distanza dei traguardi misurata da O con la differenza delle posizioni simultanee dei traguardi lungo il regolo ad un qualunque istante di tempo**. Una tale definizione, nel caso in cui i traguardi fossero fermi rispetto al regolo, restituirebbe la consueta operazione di misura della distanza. Da un punto di vista concettuale, quella appena data, è una **definizione operativa di misura di lunghezza di un corpo materiale in movimento rispetto al regolo** (in questo caso la distanza di due traguardi fermi rispetto ad O'). Vale la pena sottolineare che il termine regolo può essere inteso in senso assai lato. Ad esempio una serie di osservatori disposti lungo la direzione del moto relativo, muniti di orologi sincronizzati, svolgono le operazioni appena discusse per misurare la lunghezza di corpi materiali in movimento (ad esempio la misura della lunghezza di un treno in moto).

La distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere quindi definita come **la distanza tra le tacche del regolo che, nello stesso istante, vengono occupate dai due traguardi**, la qual cosa comporta le seguenti condizioni sugli intervalli misurati da O

$$(x_2 - x_1) = L \quad (t_2 - t_1) = 0 \quad (4)$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare otteniamo

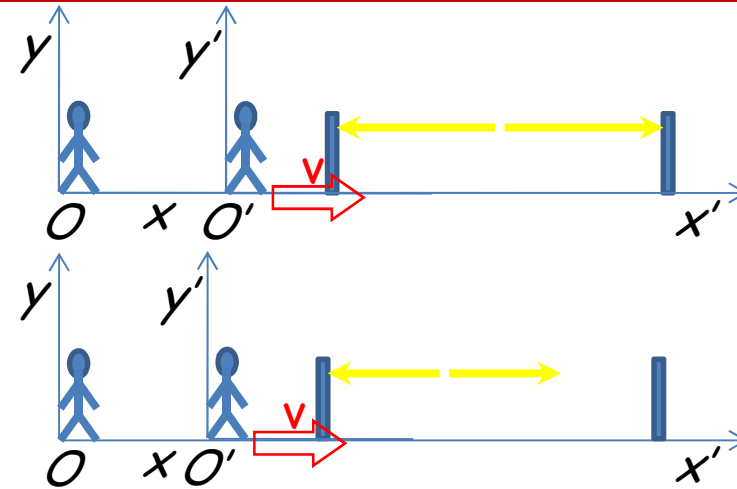
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} L = \frac{L' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \frac{L' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t'_2 - t'_1) = -\frac{v}{c^2}L \end{cases} \quad L = \frac{L' - v \frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (1) ipotizzata essere valida nel precedente paragrafo.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente **relazione tra le distanze dei traguardi $\Delta x'$, misurata con regolo in quiete, e Δx , misurata con regolo in moto**

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Concludiamo allora che **due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale $\Delta x'$ per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento**. A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **contrazione degli intervalli spaziali** o **contrazione delle lunghezze** e mostra che **secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici**. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, **la distanza tra due eventi è una grandezza relativa** e non assoluta.

La contrazione delle lunghezze

Richiamiamo la ben nota trasformazione degli intervalli spaziali disposti lungo la direzione del moto

$$(x_2 - x_1) = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

ed anche quella degli intervalli temporali

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

Poi, immaginiamo nuovamente la situazione analizzata nel paragrafo precedente dove, nel riferimento O' lungo la direzione x' , erano disposti due traguardi distanti L' nelle posizioni x'_1 e x'_2 .

Qual è la distanza L dei traguardi misurata dall'osservatore O che li vede muoversi con velocità v assieme al riferimento O' cui sono solidali? Coincide con la distanza L' misurata da O' ? Si pone così il problema inedito di misurare la distanza di due traguardi in movimento, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie la misura della distanza di due traguardi in quiete.

Infatti l'osservatore O , rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustappponendo un regolo graduato e verificando le tacche corrispondenti ai due traguardi. Si noti che in questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la

coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi deve essere verificata sempre, ovvero per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa. Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O' corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x'_2 - x'_1) = L' \quad (t'_2 - t'_1) \text{ qualsiasi} \quad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O ?

Immaginiamo di dovere misurare la lunghezza di un treno in transito nella stazione. Potremmo innanzitutto disporre osservatori dotati di cronometro lungo il marciapiede per una lunghezza sufficiente a comprendere l'intero treno. Poi potremmo sincronizzare i diversi cronometri con una qualche procedura in modo che marcino perfettamente paralleli (si può pensare di inviare un segnale luminoso lungo il marciapiede ricevuto il quale, ogni osservatore, posizionerà il cronometro ad un tempo pari a d/c dove d è la distanza dell'osservatore dal punto di emissione del segnale). A questo punto è sufficiente che, al passaggio del treno, ogni osservatore annoti i tempi in cui vede di fronte a sé la testa e la coda del treno. Si comprende allora che è ragionevole assumere, come lunghezza del treno, la distanza di due osservatori (qualunque) che vedono la testa e la coda del treno nello stesso istante.

Dunque, la distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere definita come la distanza tra due punti dello spazio del riferimento O che, nello stesso istante, vengono occupati dai due traguardi. Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x_2 - x_1) = L \quad (t_2 - t_1) = 0 \quad (4)$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle formula (1) e (2) otteniamo

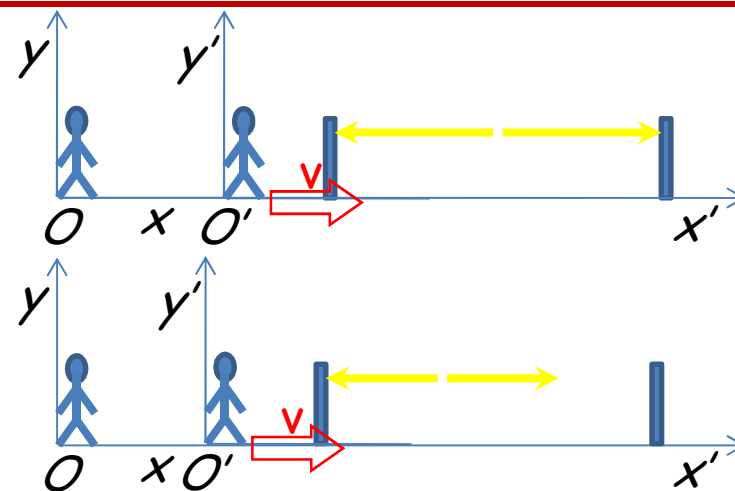
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} L = \frac{L' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \frac{L' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t'_2 - t'_1) = -\frac{v}{c^2}L \end{cases} \quad L = \frac{L' - v \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (3) che, nel precedente paragrafo, abbiamo ipotizzato essere valida.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente relazione tra le distanze dei traguardi $\Delta x'$ e Δx misurate dagli osservatori O' ed O rispettivamente in quiete ed in moto rispetto ai traguardi stessi

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Concludiamo allora che due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale $\Delta x'$ per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento. A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto contrazione degli intervalli spaziali o contrazione delle lunghezze e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, la distanza tra due eventi è una grandezza relativa e non assoluta.

La velocità limite

L'esistenza di una velocità massima possibile, valida per ogni ente fisico (corpi materiali, onde, etc. etc.), è scritta nelle trasformazioni di Lorentz. Si noti, infatti, che in queste compaiono denominatori con radici quadrate

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (y'_2 - y'_1) = (y_2 - y_1);$$

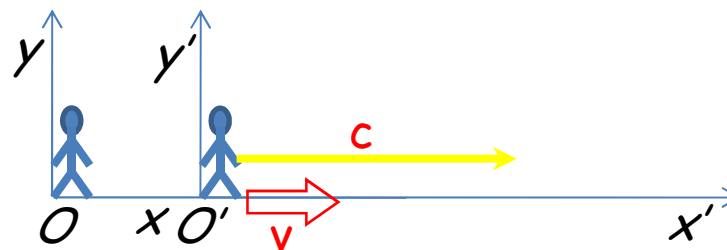
$$(z'_2 - z'_1) = (z_2 - z_1); \quad (t'_2 - t'_1) = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

per cui tali espressioni hanno senso solo se le radici quadrate sono reali e non nulle ovvero solo se $1 - v^2/c^2 > 0$ (escludiamo in questa analisi la possibilità che tali radici assumano valori complessi!). Si ottiene allora la seguente condizione sulla velocità della traslazione uniforme del riferimento

$$|v| < |c|$$

valida per un qualsiasi corpo materiale (infatti il riferimento è un corpo materiale come gli altri).

Concludiamo allora che le trasformazioni di Lorentz richiedono che, in ogni riferimento inerziale, **la velocità di un qualunque corpo materiale sia sempre minore di quella della luce** che così assume il ruolo di **velocità limite** raggiungibile solo dagli enti fisici non materiali come i campi elettromagnetici.



Chiaramente, **l'esistenza di una velocità limite comporta che la legge di composizione galileiana delle velocità sia errata**. Questo fatto emerge con chiarezza qualora si immagini che l'osservatore O' invii un raggio luminoso lungo le x' positive. Se valesse la legge galileiana, il raggio luminoso si propagherebbe con velocità $c+v$ rispetto ad O violando l'esistenza della velocità limite oltre che, naturalmente, anche il secondo postulato.

Il teorema di addizione delle velocità

Consideriamo ad esempio le trasformazioni degli intervalli da O' ad O. Evidentemente si ottengono le velocità semplicemente mettendo a rapporto gli intervalli spaziali e temporali

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1) = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y'_2 - y'_1) \\ (z_2 - z_1) = (z'_2 - z'_1) \\ (t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)} \\ \frac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{(y'_2 - y'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)} \\ \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{(z'_2 - z'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{\frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)}} \\ v_y = \frac{\frac{(y'_2 - y'_1)}{(t'_2 - t'_1)} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)}} \\ v_z = \frac{\frac{(z'_2 - z'_1)}{(t'_2 - t'_1)} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \\ v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \end{array} \right.$$

Otteniamo così le **leggi relativistiche di composizione delle velocità**

$$\boxed{v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x}}$$

che sostituiscono quelle galileiane. La struttura delle nuove leggi di composizione è piuttosto complessa, tuttavia, come atteso, le leggi relativistiche conducono a quelle galileiane nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Infatti se $v \ll c$ si ottiene facilmente

$$v_x \simeq v'_x + v \quad v_y \simeq v'_y \quad v_z \simeq v'_z$$

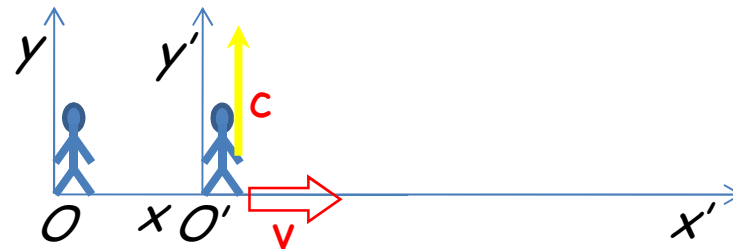
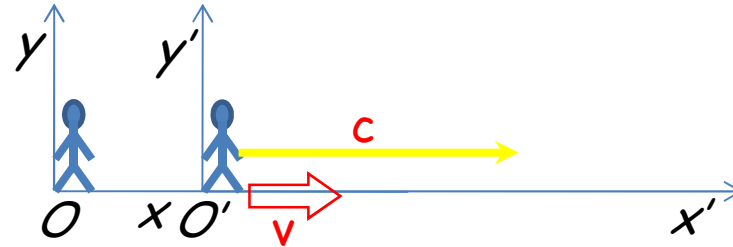
Notiamo che dato un corpo materiale in moto con una certa velocità v'_x, v'_y, v'_z rispetto ad O' appare in moto anche ad O , ovviamente. Tuttavia le velocità trasversali al moto che egli osserva, non dipendono solamente dalle velocità trasversali che il corpo aveva rispetto ad O' , dipendono anche da quella longitudinale lungo la direzione del moto. In un certo senso *le componenti della velocità si mescolano tra loro* contrariamente a quanto avviene con la composizione galileiana delle velocità.

Ancora più sorprendente è **la regola di addizione delle velocità lungo la direzione del moto**. Ragionando con l'esempio esaminato all'inizio si ottiene

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

Ovvero dato un riferimento O' che si muove con velocità v rispetto ad O (lungo le x' positive), se un raggio luminoso si muove con velocità c rispetto ad O' (lungo le x' positive), allora tale raggio si muove con velocità c anche rispetto ad O . Dunque, **secondo le leggi relativistiche di composizione delle velocità $v+c=c$, in accordo con l'esistenza di una velocità limite** (e con il secondo postulato) ma in completo conflitto con le leggi galileiane.

Per completezza analizziamo anche il caso in cui **il raggio luminoso sale verticalmente rispetto ad O' ($v'_x=0, v'_y=c$) e quindi obliquamente rispetto ad O** . Si ha allora



$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} & v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \\ v_x = v & v_y = c \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}$$

da cui possiamo calcolare la velocità del raggio luminoso rispetto ad O

$$\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$

in accordo con il secondo postulato.

Il principio di causalità

Dato che una teoria fisica, qualunque essa sia, si pone l'obiettivo di **prevedere l'evoluzione temporale di un sistema fisico** si comprende che l'ipotesi che esso **evolva attraverso un flusso temporalmente ordinato e prevedibile di eventi fisici** ne costituisce l'inevitabile presupposto.

In tali sistemi riveste un ruolo chiave la **relazione di causa-effetto** tra due eventi che permette di descriverne l'evoluzione temporale come una sequenza di accadimenti successivi connessi tra loro in modo tale che quello che precede – la causa - determina quello che segue - l'effetto (se ad ogni causa corrisponde un solo effetto si ha un sistema non solo causale ma anche deterministico).

Queste osservazioni fanno comprendere che le teorie fisiche, proprio per la loro intrinseca necessità di fare previsioni, **devono organizzare le grandezze fisiche in cause ed effetti**, un aspetto che non viene quasi mai sottolineato. Ad esempio nella meccanica newtoniana è la forza che determina l'accelerazione e non viceversa per cui si dice che la forza è la causa e l'accelerazione l'effetto oppure che forza ed accelerazione sono in una relazione di causa-effetto. Così, in elettromagnetismo sono le cariche elettriche che, accelerando, generano un'onda elettromagnetica e non viceversa.

Alcune importanti proprietà della relazione di causa-effetto emergono quasi immediatamente.

In primo luogo, poiché la relazione di causa-effetto esprime una connessione tra eventi realizzata attraverso un qualche ente fisico essa ha un carattere oggettivo e deve essere

verificata da ogni possibile osservatore: **la relazione di causa-effetto è verificata da tutti gli osservatori ed ha un carattere assoluto.**

Una seconda inevitabile proprietà riguarda l'ordine temporale: **se due eventi sono in relazione di causa-effetto la causa precede sempre l'effetto per tutti gli osservatori** (data la natura assoluta delle proprietà). Se ciò non accadesse la teoria potrebbe condurre a situazioni palesemente assurde (ad esempio immaginiamo che in un certo punto dello spazio, ad un certo tempo, venga esploso un colpo di pistola il cui proiettile va a colpire, ad un certo tempo successivo, una bottiglia posizionata ad una certa distanza frantumandola in mille pezzi. Se l'effetto non seguisse la causa per tutti gli osservatori accadrebbe che qualcuno di loro vedrebbe la bottiglia frantumarsi prima del colpo di pistola).

Ora, supponiamo che una teoria preveda che le azioni fisiche, qualunque sia la loro natura, possano propagarsi con una velocità limitata superiormente da un certo valore V_m . E' chiaro che in questo caso due eventi fisici possono essere causalmente connessi da una qualche azione fisica solo se la loro separazione temporale e spaziale non è incompatibile con la propagazione della più veloce delle azioni fisiche. Concludiamo allora che **due eventi separati da una distanza temporale Δt possono essere in relazione di causa-effetto solo se la loro separazione spaziale Δx è tale che $|\Delta x/\Delta t| < V_m$ per tutti gli osservatori** (natura assoluta delle proprietà). Una ovvia conseguenza di questo fatto è che

mano a mano che la distanza temporale tra causa ed effetto diminuisce deve diminuire anche la corrispondente distanza spaziale per cui, nel limite di una causa ed effetto simultanee si deve avere anche una separazione spaziale nulla. Giungiamo così alla conclusione che **due eventi causalmente connessi e simultanei, ovvero temporalmente coincidenti, devono coincidere anche spazialmente e queste coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori**. In altri termini **le connessioni causali simultanee sono solo locali**, una proprietà riferita come **causalità locale** (come esempio di teoria non causalmente locale possiamo citare la meccanica classica che non possiede alcun limite intrinseco alla velocità di propagazione delle interazioni ammettendo, ad esempio, l'azione gravitazionale istantanea a distanza).

Questo fatto ci fa comprendere che in una teoria fisica causale, con una velocità di propagazione massima delle interazioni, **le coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori** ovvero devono avere un **carattere assoluto**, un punto torneremo nel prossimo paragrafo.

Giungiamo allora alla conclusione che una teoria fisica come la relatività ristretta deve essere **localmente causale** ovvero deve essere tale che, nel caso di eventi in relazione di causale, **in tutti i riferimenti inerziali la causa deve precedere l'effetto e il quoziente tra il loro intervallo spaziale ed il loro intervallo temporale deve soddisfare la relazione $|\Delta x / \Delta t| < c$** . Qualora ciò non accadesse si aprirebbe un delicato problema di consistenza interna della teoria stessa.

□ Le proprietà causali della TRR

Per stabilire se la Teoria della Relatività Ristretta soddisfa il principio di causalità locale ed assoluta conviene richiamare la trasformazione di Lorentz per l'intervallo temporale che riscriviamo nella seguente forma

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left[1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} \right] (t'_2 - t'_1) \quad (1)$$

Ora immaginiamo che nel riferimento O' accadano due eventi fisici causalmente connessi: la causa nella posizione X_1 al tempo t_1 e l'effetto nella posizione X_2 al tempo $t_2 > t_1$. Poiché tali eventi sono causalmente connessi, sulla base del secondo postulato della teoria della relatività ristretta avremo la condizione

$$\left| \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} \right| < c \quad -c < \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} < c \quad (2)$$

Consideriamo ora la quantità tra parentesi quadra nella (1) e sostituiamo la (2), si ha

$$1 - \frac{v}{c} < 1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} < 1 + \frac{v}{c}$$

da cui, in particolare, discende che per tutti gli eventi in relazione di causa-effetto si ha

$$1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x'_2 - x'_1)}{(t'_2 - t'_1)} > 1 - \frac{v}{c} > 0 \quad (3)$$

tenendo conto della (3) dalla (1) otteniamo

$$(t_2 - t_1) = \left(\frac{1 + \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) (t_2' - t_1')$$

la quale mostra gli intervalli temporali mantengono la stessa segnatura. Abbiamo così mostrato che **nel caso di eventi causalmente connessi l'ordine temporale è lo stesso per tutti gli osservatori** per cui **la precedenza temporale della causa sull'effetto ha un carattere assoluto** in accordo con quanto atteso nel caso di una teoria che soddisfa il principio di causalità.

E' istruttivo osservare che nel caso di eventi che non possono essere causalmente connessi in quanto non soddisfano la (2) otteniamo che la segnatura degli intervalli temporali può essere invertita. Questo significa che **per tali eventi l'ordine temporale non ha un carattere assoluto** e può accadere che i differenti osservatori vedano una differente sequenza degli eventi. Per quanto ciò possa apparire strano è comunque certo che, essendo tali eventi fisicamente indipendenti, tale fatto non condurrà mai a situazioni assurde.

□ Dai raggi luminosi alle proprietà dello spazio e del tempo

Ora vogliamo discutere in maggior dettaglio un aspetto già commentato nei precedenti paragrafi. Si tratta del fatto che, in una teoria come la relatività ristretta che ha nella velocità della luce la massima velocità delle azioni fisiche, due eventi simultanei causalmente connessi devono necessariamente avvenire nello stesso punto dello spazio e questo per ogni osservatore. In altri termini **il principio di causalità nella forma locale, cui soddisfa la TRR, implica che le coincidenze spazio-temporali devono avere un carattere assoluto**. Vale sempre la pena ricordare che questo fatto non è vero per le sole coincidenze spaziali (le coincidenze spaziali hanno un carattere relativo già nel caso delle trasformazioni di Galileo) o temporali (le coincidenze temporali hanno un carattere assoluto nel caso Galileiano ma assolutamente relativo con le trasformazioni di Lorentz dove si osserva la relatività della simultaneità) ma solo quando le coincidenze sono sia temporali che spaziali.

Ciò premesso, ora vedremo che l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà degli intervalli spaziali e temporali ottenute a suo tempo, analizzando la propagazione di raggi luminosi, devono essere assolutamente indipendenti dal fenomeno fisico utilizzato per evidenziarle e devono pertanto essere ritenute proprietà autonome ed intrinseche degli intervalli spaziali e temporali stessi.

Intanto verifichiamo quanto detto. Dalle trasformazioni di Lorentz per gli intervalli otteniamo

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \frac{(x'_2 - x'_1) + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ (y_2 - y_1) = (y'_2 - y'_1); \\ (z_2 - z_1) = (z'_2 - z'_1); \\ (t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

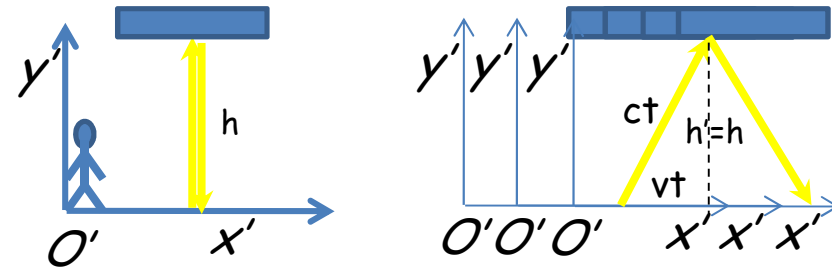
da cui consegue che se l'osservatore O' vede due eventi coincidere spazio-temporalmente

$\{(x_2 - x_1) = 0 \quad (y_2 - y_1) = 0 \quad (z_2 - z_1) = 0 \quad (t_2 - t_1) = 0\}$
 anche l'osservatore O li vedrà coincidere spazio-temporalmente

$$\{(x'_2 - x'_1) = 0 \quad (y'_2 - y'_1) = 0 \quad (z'_2 - z'_1) = 0 \quad (t'_2 - t'_1) = 0\}$$

Dunque **due eventi fisici spazialmente e temporalmente coincidenti per un osservatore inerziale risultano tali per ogni altro osservatore inerziale.** In altri termini, come atteso, **le coincidenze spazio-temporali di due eventi sono assolute.**

Come accennato, questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di grande rilevanza. Il secondo postulato precisa in che modo si propaga la luce nei diversi riferimenti, assieme al primo determina la forma delle trasformazioni di Lorentz e permette di costruire i diversi esperimenti ideali attraverso i quali abbiamo esplorato gli effetti relativistici della dilatazione del tempo, contrazione delle lunghezze e relatività della



simultaneità. Il ruolo centrale giocato dalla propagazione della luce potrebbe fare sorgere il dubbio che le trasformazioni di Lorentz e gli effetti relativistici non ci informino di reali proprietà dello spazio e del tempo ma solo di proprietà della misura degli intervalli spaziali e temporali per mezzo di raggi luminosi. In altri termini si potrebbe pensare che gli effetti relativistici potrebbero essere effetti a carico della operazione di misura i quali, una volta corretti, permetterebbero di ottenere la vera misura degli intervalli spaziali e temporali. In realtà, come vedremo, la natura assoluta delle coincidenze spazio-temporali non lascia aperta questa possibilità, forzandoci a concludere che le proprietà dello spazio e del tempo, dedotte attraverso ragionamenti con regoli ed orologi luminosi, devono essere attribuite non a questi ultimi ma proprio allo spazio ed al tempo.

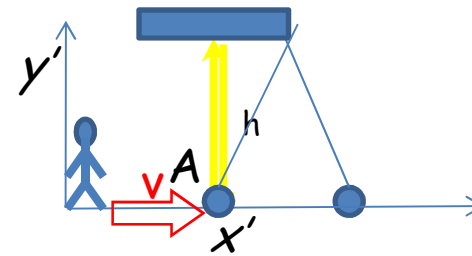
Ad esempio consideriamo il semplice dispositivo utilizzato per illustrare il fenomeno della dilatazione dei tempi. Come sappiamo i postulati della TRR conducono alla espressione seguente

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

la quale afferma che l'intervallo temporale Δt_0 misurato dall'osservatore in quiete O' , è più corto di quello Δt_M misurato dall'osservatore in moto O . In questa situazione si potrebbe pensare che non è l'intervallo temporale a dilatarsi ma piuttosto il modo in cui lo misuriamo. In altre parole, si potrebbe pensare che usando un orologio 'luminoso' si trovi l'effetto calcolato mentre usando, ad esempio, un orologio a cucù, si potrebbe trovare una diversa entità dell'effetto o, addirittura, la sua completa assenza. Se le cose stessero così, non saremmo in presenza di proprietà autentiche (ovvero intrinseche) degli intervalli temporali, ma piuttosto di proprietà dipendenti dal modo in cui questi vengono misurati. Come vedremo la TRR non lascia aperta questa possibilità!

Per comprendere questo fatto, immaginiamo di aggiungere al dispositivo appena visto un pendolo di lunghezza tale da oscillare, nel riferimento O' , con lo stesso tempo che impiega il raggio luminoso a compiere il cammino di andata e ritorno. Possiamo poi sistemare il pendolo in modo tale che, quando il raggio luminoso parte dal punto A, il pendolo parta dallo stesso punto. Siccome il pendolo ha la lunghezza giusta, quando torna nel punto A, incontra nuovamente, in quel punto, il raggio luminoso.

Notiamo subito che in A la posizione del pendolo e del raggio luminoso coincidono sia spazialmente che temporalmente e che, dopo un certo tempo, il raggio luminoso ed il pendolo tornano nello stesso punto A ovvero tornano a coincidere sia spazialmente che temporalmente.



Siccome le coincidenze spaziotemporali sono assolute, queste avvengono per tutti gli osservatori inerziali per cui ogni altro osservatore inerziale O troverà tali coincidenze. Questo però richiede che l'oscillazione del pendolo e l'oscillazione dell'orologio luminoso abbiano la stessa durata non solo per l'osservatore O' ma per ogni altro osservatore O .

Questo a sua volta equivale ad affermare che se si dilata il tempo misurato dall'orologio luminoso deve dilatarsi, nello stesso modo, anche il tempo misurato dal pendolo.

Dato che questo stesso ragionamento può essere ripetuto con qualunque dispositivo si voglia misurare gli intervalli temporali, è chiaro che ci troviamo innanzi ad una proprietà del tempo indipendente dal modo in cui viene misurato vale a dire ad una sua proprietà intrinseca.

Questi ragionamenti possono essere facilmente estesi anche agli altri effetti relativistici quali la relatività della simultaneità e la contrazione delle lunghezze. Possiamo allora affermare in generale che:

l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà dello spazio e del tempo, misurate con i raggi luminosi, debbano essere verificate da qualunque altro metodo di misura, ovvero, che tali proprietà sono proprietà intrinseche dello spazio e del tempo.

Dunque esiste una connessione profonda tra aspetti apparentemente diversi della teoria della relatività ristretta: la causalità nella forma locale richiede che le coincidenze spazio-temporali abbiano una natura assoluta e questa proprietà delle coincidenze è, a sua volta, cruciale per rendere le proprietà degli intervalli temporali e spaziali, messe in luce attraverso orologi e regoli luminosi, autentiche proprietà del tempo e dello spazio.

fine lezione del 23 Aprile 2014