La Teoria della Relatività Ristretta

A. Einstein, in un famoso lavoro pubblicato nel 1905 in una rivista specializzata tedesca prende la direzione che tutti gli esperimenti a seguire dimostreranno essere quella giusta (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, pubblicato su Zeitschrift für Physik*).

In tale lavoro, il primo passo fu quello di **abbandonare il concetto di etere.** Dato che Einstein era fermamente convinto che le equazioni di Maxwell fossero corrette, l'unica possibile interpretazione della velocità c dell'onda elettromagnetica prevista da queste equazioni era che **c fosse la velocità dell'onda elettromagnetica rispetto ad un qualunque sistema di riferimento inerziale.** Tale ipotesi rappresenta uno dei due capisaldi della teoria dove occupa la posizione di secondo postulato.

E' assai significativo ricordare una dichiarazione di A. Einstein secondo la quale, al momento della formulazione della TRR, non era a conoscenza dell'esperimento di Michelson e Morley e che la ragione che lo spinse ad abbandonare il concetto di etere fu soprattutto la possibilità di recuperare la completa equivalenza di tutti gli osservatori inerziali, sia per i fenomeni meccanici che per quelli elettromagnetici, in accordo con la sua intuizione che **il principio di relatività galileiano dovesse essere un principio generale, valido per tutti i fenomeni fisici.** Questa ipotesi rappresenta l'altro caposaldo della costruzione einsteniana, dove vi figura come primo postulato.

Stabiliti questi due punti fermi, A. Einstein mostrò che era possibile costruire una visione della fisica (in particolare dell'elettromagnetismo) coerente con queste assunzioni purché si fosse disposti ad abbracciare una nuova concezione dello spazio e del tempo abbandonando quella familiare della fisica classica.

E' inutile sottolineare che tutto ciò sarebbe rimasto un ardito esercizio intellettuale se gli esperimenti, oramai numerosissimi, non avessero puntualmente confermato tutte le rivoluzionarie previsioni della nuova teoria!

Fatte queste premesse, possiamo formulare i due principi o postulati, che A. Einstein assunse come veri, e dai quali, in modo deduttivo, si ottengono tutte le conseguenze della TRR:

Primo postulato : *in tutti i riferimenti inerziali valgono le stesse leggi fisiche*

Secondo postulato: *in tutti i riferimenti inerziali la velocità della luce assume lo stesso valore*

Le trasformazioni di Galileo violano il secondo postulato

Mostreremo ora che ***le trasformazioni di Galileo contraddicono il secondo postulato*** per cui *risulta necessario procedere ad una loro modifica*.

Consideriamo i due soliti riferimenti ***O*** ed ***O'***, ed immaginiamo che, nel momento in cui le origini coincidono, dalla origine del riferimento mobile ***O'*** venga emesso un raggio di luce nella direzione delle ***x'*** positive. La posizione in funzione del tempo, del fronte del raggio, per l'osservatore ***O'*** vale

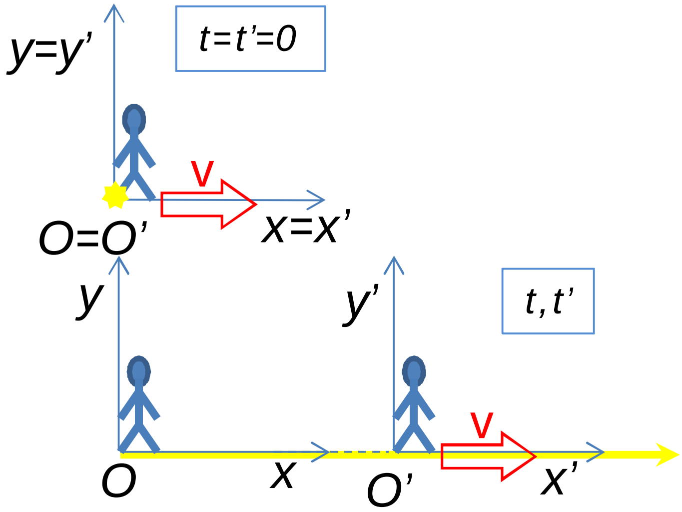
$$x' = ct'$$

Richiamando le Trasformazioni di Galileo, sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct + vt \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = (c+v)t \\ - \end{cases}$$

Il risultato mostra che **l'osservatore O vede un raggio luminoso che si propaga nella direzione delle x positive con velocità c'=(c+v) in completo disaccordo con il secondo postulato** che invece richiede che anche per l'osservatore ***O*** la velocità del raggio luminoso valga ***c***!

A questo proposito vale la pena sottolineare **quanto il secondo postulato sia in conflitto con il senso comune**: dal punto di vista dell'osservatore ***O***, il raggio luminoso ha seguito un percorso più lungo rispetto al riferimento ***O*** che



rispetto al riferimento ***O'***. Ciononostante il raggio si muove con la stessa velocità rispetto ad entrambi i riferimenti ! Ciò è possibile solo se sui ammette che i due osservatori misurino le durate degli stessi fenomeni in modo diverso.

Il punto finale di queste considerazioni è che **le trasformazioni di Galileo non sono compatibili con i postulati della teoria della relatività ristretta per cui risulta necessario procedere alla costruzione delle nuove trasformazioni.**

La costruzione delle nuove trasformazioni

Le nuove trasformazioni possono essere costruite analizzando le seguenti situazioni fisiche:

i) Un corpo materiale in quiete nell'origine del riferimento O', deve apparire in moto con velocità v all'osservatore O:

$$\{x'=0 \qquad x=vt$$

Evidentemente tale condizione può essere soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x'=x-vt \quad \rightarrow \quad x'=\alpha(x-vt)$$

dove α *è una costante da determinare*.

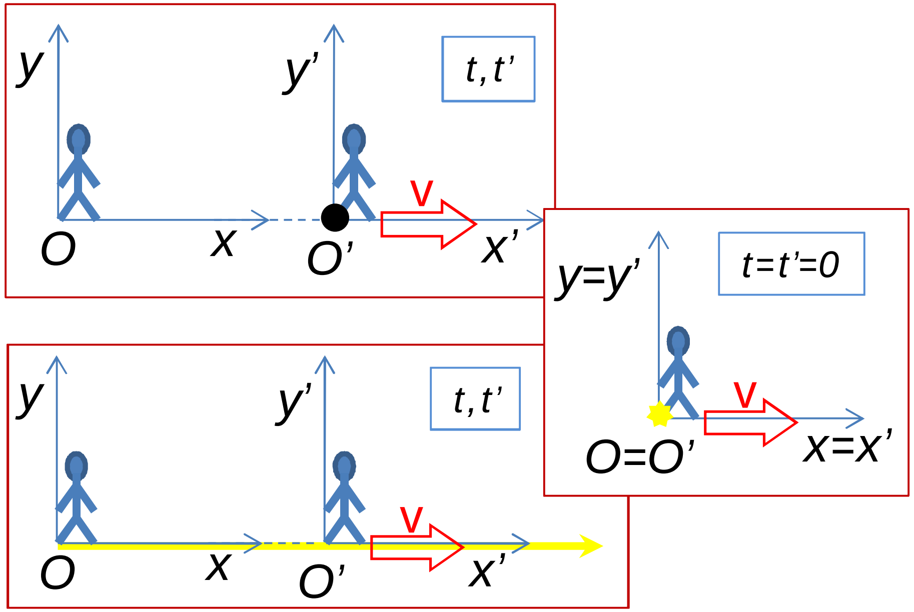
Un corpo materiale è in quiete nel riferimento O deve apparire in moto con velocità –v all'osservatore O':

$$\{x'=-vt' \qquad x=0$$

Tale condizione può essere condizione soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x=x'+vt=x'+vt' \quad \rightarrow \quad x=\alpha(x'+vt')$$

con *la stessa costante* α dato che i due osservatori sono del tutto equivalenti in accordo con il primo postulato. Confrontando le espressioni per ***x*** e ***x'*** arriviamo allora a comprendere che, in generale, dati due osservatori **O** e **O'**, in moto traslatorio uniforme, le trasformazioni di coordinate da **O** ad **O'** e da **O'** ad **O** possono differire nel solo segno della velocità (è facile verificare che questa proprietà è soddisfatta anche dalle trasformazioni di Galileo).



ii) Un raggio luminoso, nel momento in cui le origini coincidono, viene emesso nella direzione delle x e x' positive. In accordo con il secondo postulato, la posizione del fronte, nei rispettivi riferimenti, deve essere data dalle espressioni

$$\{x'=ct' \qquad x=ct$$

iii) La eguaglianza t'=t, non può essere valida poiché contraddice il secondo postulato (esempio iniziale). La nuova relazione tra i tempi deve comunque essere lineare (altrimenti entra nelle formule il problema della origine) per cui scriveremo nel modo più generale possibile tipo **t'=at+bx** che, per simmetria con quella relativa alle posizioni, prenderemo nella forma **$t'=\beta(t+\gamma x)$.**

Passiamo ora la costruzione delle nuove formule di trasformazione. Avremo allora per le **trasformazioni da O ad O' e da O' ad O** che si ricavano immediatamente

$$1)\ \begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v}\left(x' + \dfrac{\alpha}{\beta} v t'\right) \\ t = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v}\left(t' - \dfrac{\beta}{\alpha}\gamma x'\right) \end{cases}$$

Dal requisito i) otteniamo immediatamente che devono essere soddisfatte le condizioni

$$3)\ \left\{ \frac{\alpha}{\beta} = 1 \right. \rightarrow \alpha = \beta \qquad 4)\ \begin{cases} \alpha = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v} \\ \beta = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v} \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma v}}$$

Dal requisito ii), sostituendo nelle 1) **x'=ct'** e **x=ct** otteniamo invece

$$5)\ \begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \alpha(ct - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma ct) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \alpha(c - v)t \\ t' = \beta(1 + \gamma c)t \end{cases} \qquad c = \frac{\alpha(c - v)}{\beta(1 + \gamma c)} \qquad \gamma = -v/c^2$$

Tenendo conto delle 3), 4) e 5) otteniamo allora le espressioni

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \gamma = -v/c^2$$

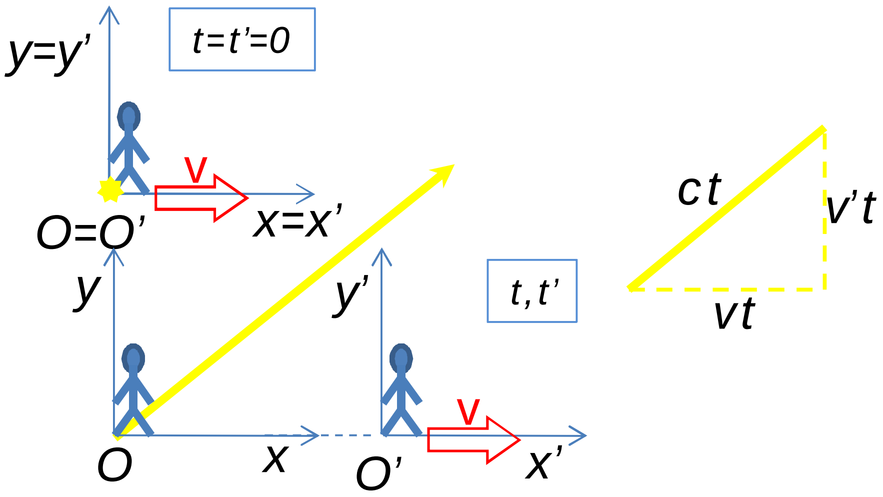
le quali, sostituite nelle 1) e 2), forniscono le *nuove trasformazioni di coordinate* per *x* e *t*.

$$6)\ O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$7)\ O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ora dobbiamo affrontare il problema delle trasformazioni delle coordinate *y* e *z* che, nel caso delle trasformazioni di Galileo, sono fornite dalle semplici leggi *y'=y* e *z'=z*. Continueranno ad essere valide? Ragioniamo come segue.

Si immagini una variante dell'esempio esaminato all'inizio nel quale, il raggio luminoso (nell'istante in cui le origini coincidono), viene indirizzato, nel riferimento in moto ***O'***, lungo l'asse delle ***y'*** positive. Mentre il raggio viaggia in direzione verticale verso l'alto per l'osservatore ***O'***, viaggia pure in direzione diagonale per ***O***. Dopo un certo intervallo di tempo la traiettoria percorsa nel riferimento ***O*** potrebbe essere quella tracciata nella figura.



La posizione del fronte, nei due riferimenti, è data dalle equazioni

$$8)\begin{cases} y'=ct' \\ x'=0 \end{cases} \qquad 9)\begin{cases} y=v't \\ x=vt \end{cases}$$

Si noti che O vede un raggio luminoso che si propaga in direzione diagonale con una velocità che deve valere ***c*** (in accordo con il secondo postulato) per cui si deve avere dal teorema di Pitagora

$$(ct)^2=(vt)^2+(v't)^2 \qquad v'=(c\sqrt{1-v^2/c^2}\,)t$$

sostituendo nelle 9) e riscrivendo sia le 8) che le 9), otteniamo

$$10)\begin{cases} y'=ct' \\ x'=0 \end{cases} \qquad 11)\begin{cases} y=(c\sqrt{1-v^2/c^2}\,)t \\ x=vt \end{cases}$$

Ora, si deve richiamare la trasformazione del tempo data dalla seconda delle 6),

$$t' = \frac{\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e sostituirla nella prima delle 10), si ottiene

$$12)\begin{cases} y'=c\dfrac{(t-\frac{v}{c^2}vt)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=(c\sqrt{1-v^2/c^2})t \\ x'=0 \end{cases}$$

per confronto diretto, verifichiamo che la prima delle 12) coincide con la prima delle 11) per cui ***y'=y***. Dato che analoghe considerazioni valgono anche per la coordinata z concludiamo che **le leggi di trasformazione delle coordinate perpendicolari alla direzione del moto non necessitano di alcuna correzione**

$$13)\begin{cases} y'=y \\ z'=z \end{cases}$$

Le Traformazioni di Lorentz

Nelle pagine precedenti abbiamo ottenuto **le trasformazioni delle misure di posizione e tempo di un certo evento fisico tra due osservatori inerziali O ed O' compatibili con i postulati della teoria della relatività ristretta** [formule dalle 6), 7) e 13)] .

Queste trasformazioni hanno una storia piuttosto complessa: furono trovate, a partire dal 1887, da G. Fitzgerald, J. Larmor, H. Lorentz e W. Voigt essenzialmente per spiegare l'esito nullo dell'esperimento di Michelson e Morley. Pare che J. Larmor avesse compreso l'effetto della dilatazione del tempo in esse nascosto, e Lorentz la loro proprietà di lasciare invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo, ma fu A. Einstein che per primo chiarì fino in fondo il loro vero significato fisico._In effetti, è solo con la teoria della relatività ristretta che queste trasformazioni - dette trasformazioni di Lorentz – vengono ad assumere **un ruolo fondativo per tutta la fisica prescrivendo le proprietà di trasformazione della misure di posizione e tempo tra osservatori inerziali in moto relativo uniforme valide per tutti i fenomeni fisici**.

Queste formule si presentano come relazioni tra le misure di posizione ***(x,y,z)*** e tempo ***t*** di un certo evento fisico operate dall'osservatore inerziale ***O*** con quelle di posizione ***(x',y',z')*** e tempo ***t'*** operate da un altro osservatore inerziale ***O'*** in moto, rispetto al primo, con una certa velocità **v**. In accordo con le condizioni imposte nella costruzione di queste formule [vedi condizione i) del paragrafo precedente] **le espressioni da O ad O' si possono ottenere da quelle da O' ad O semplicemente scambiando gli apici ed invertendo il segno della velocità di traslazione**, una regola che torna utile nella memorizzazione delle formule stesse.

$$O \to O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \to O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2}x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

❑ La trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare

In numerose situazioni che analizzeremo, troveremo più agevole riferirci non a singoli eventi ma a coppie di eventi fisici osservati sia da O che da O' per cui ragioneremo su intervalli spaziali e temporali tra gli eventi piuttosto che su valori di posizione e tempo del singolo evento.

Per ottenere le trasformazioni di Lorentz per gli intervalli spaziali e temporali tra i due eventi è sufficiente scrivere le trasformazioni per ciascun evento

$$x_1' = \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad y_1' = y_1 \qquad z_1' = z_1 \qquad t_1' = \frac{(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad y_2' = y_2 \qquad z_2' = z_2 \qquad t_2' = \frac{(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e poi procedere ad una sottrazione membro a membro. Si ottengono immediatamente le **trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare** riportate qui a fianco sia per il passaggio da O ad O' che per quello da O' ad O.

$$O \rightarrow O' \quad \begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \rightarrow O \quad \begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz e raggi luminosi

Nei paragrafi seguenti analizzeremo il contenuto fisico delle trasformazioni di Lorentz ed avremo modo di verificare che queste contengono un certo numero di fatti assolutamente nuovi, tali da richiedere una radicale revisione di quelle proprietà dello spazio e del tempo che abbiamo sedimentato attraverso la nostra esperienza quotidiana e che abbiamo elevato al rango di leggi fisiche costruendo la fisica classica. A tali nuovi fatti si suole dare il nome di **effetti relativistici,** tuttavia deve essere ben chiaro che non si tratta di ‘effetti’ ma della realtà delle cose, che appare ‘rivoluzionaria’ solo perché la nostra esperienza matura in contesti caratterizzati da velocità piccole rispetto a quella della luce dove tali ‘effetti’ non sono apprezzabili, ma che troveremmo assolutamente naturali qualora fossimo nati in un mondo dominato da fenomeni con alte velocità.

Come già sottolineato le trasformazioni di Lorentz sono state ottenute **cercando trasformazioni di coordinate compatibili con i due postulati della teoria**. Tra questi, il più dirompente è il secondo dal quale discendono le conseguenze più rilevanti e che conferisce alla propagazione dei raggi luminosi il ruolo di fenomeno di riferimento per eccellenza. Questo fatto non deve però fare pensare che la propagazione della luce abbia una qualche priorità sugli altri fenomeni. **Proprio perché la cinematica dei raggi luminosi viene precisata dal secondo postulato, essa è solo il fenomeno più conveniente attraverso il quale evidenziare le proprietà degli intervalli spaziali e temporali**. Si noterà infatti che nella costruzione delle nuove trasformazioni di coordinate l’attenzione era costantemente concentrata sugli intervalli spaziali e temporali intercorrenti tra due eventi fisici che solo per le suddette ragioni di opportunità riguardavano la propagazione della luce. Da questo punto di vista è ovvio che, **benché ottenute argomentando con i raggi luminosi, le proprietà degli intervalli spaziali e temporali così ottenute devono essere valide per tutti i fenomeni naturali diventando proprietà intrinseche dello spazio e del tempo**.

Premesso che torneremo nuovamente su questo aspetto della teoria, non dovrebbe più esserci alcuna difficoltà nell’attribuire il giusto significato agli esempi dei paragrafi seguenti, tutti basati sulla cinematica dei raggi dei luminosi, con i quali cercheremo di interpretare il contenuto fisico delle trasformazioni di Lorentz.

$$O \to O' \quad \begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \to O \quad \begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

.

❑ Le trasformazioni di Galileo come limite alle basse velocità delle trasformazioni di Lorentz.

Premesso che le corrette trasformazioni delle misure di posizione e tempo sono quelle di Lorentz, è comunque vero che, in certi contesti fisici, queste sono molto ben approssimate dalle trasformazioni di Galileo. Richiamando le trasformazioni di Lorentz è facile rendersi conto quando questo accade.

Si osservi che, nel caso in cui si possa trascurare il rapporto ***v^2/c^2*** nelle radici quadrate e ***vx/c^2*** nelle trasformazioni del tempo, si ottengono esattamente le Trasformazioni di Galileo. Ora, il termine ***v^2/c^2*** è trascurabile quando la velocità della traslazione del riferimento è piccola rispetto alla velocità della luce. Per quanto riguarda, invece, il termine ***vx/c^2***, si osservi che ***x*** rappresenta la posizione dell'evento fisico rispetto al riferimento ***O*** e che, se l'evento è connesso ad un qualche moto di velocità ***v'*** lungo ***x***, avremo ***x=v't*** per cui si ha ***$vx/c^2 = vv'/c^2$*** che è trascurabile se anche questa velocità è piccola rispetto alla velocità della luce.

$$O \to O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t \end{cases}$$

Dunque riassumendo, **le Trasformazioni di Galileo valgono con approssimazione sempre migliore mano a mano che la velocità di traslazione del riferimento e le velocità dei processi fisici in gioco assumono valori piccoli rispetto alla velocità della luce.** Questo fatto mostra che il passaggio dalla fisica classica a quella relativistica avviene con continuità, essenzialmente modulato dal quoziente v/c tra le velocità in gioco nel processo fisico e la velocità della luce.

Ciò premesso, le trasformazioni di Lorentz affermano che, in relazione alla **velocità della luce che viene ad assumere nella fisica il ruolo di velocità di riferimento**, esistono **due regimi**: quello **classico** delle basse velocità e quello **relativistico** delle alte velocità che esploreremo nei prossimi paragrafi. Sotto questo profilo **la TRR non dichiara il fallimento della fisica classica ma ne limita solo il dominio di applicabilità** riconoscendo che il regime classico si estende fino alle velocità che rimangono piccole rispetto a quella della luce.

$$O' \to O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2}x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t' \end{cases}$$

La dilatazione dei tempi

Esaminiamo la trasformazione degli intervalli temporali da ***O'*** ad ***O***. Rispetto alla trasformazione di Galileo $(t_2 - t_1) = (t_2^{'} - t_1^{'})$, compaiono differenze essenziali nei punti indicati

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'}) + \overbrace{\frac{v}{c^2}}^{A}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\underbrace{\sqrt{1 - v^2/c^2}}_{B}} \qquad 1)$$

Quale è il contenuto fisico di queste differenze? Tenendo ben presente quanto affermato nel paragrafo precedente (*Trasformazioni di Lorentz e raggi luminosi*), cercheremo di interpretare questi termini facendo riferimento ad eventi riguardanti la propagazione di raggi luminosi.

Per saggiare il significato del **termine B escludendo il termine A,** conviene riferirsi ad eventi che per l'osservatore O' accadono nello stesso punto dello spazio in tempi però diversi in modo tale da avere

$$(x_2^{'} - x_1^{'}) = 0 \qquad (t_2^{'} - t_1^{'}) \neq 0 \qquad 2)$$

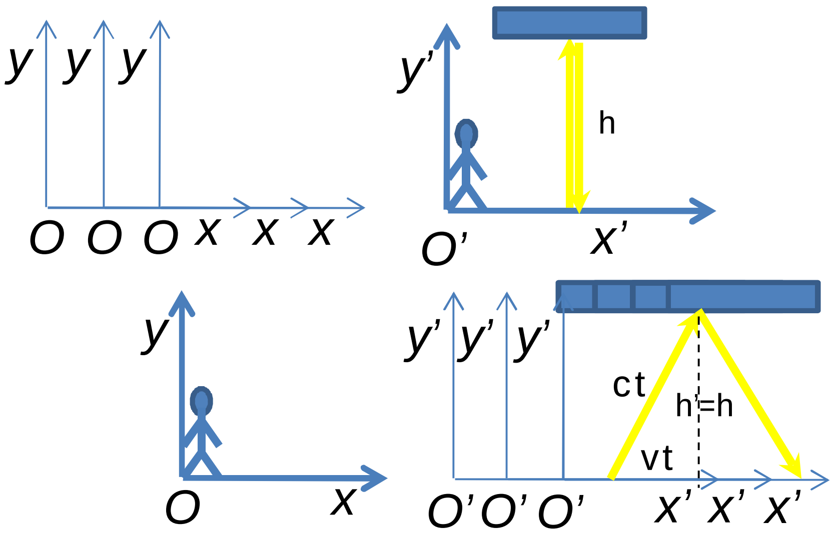
Con una tale coppia di eventi dalla (1) si ottiene l'espressione

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che possiamo porre nella forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad 4)$$

Troviamo allora che il termine B nella trasformazione (1) indica che **due eventi separati da un intervallo temporale $\Delta t'$ per l'osservatore in quiete, risultano separati da un intervallo temporale Δt più lungo per l'osservatore in movimento !**



Per interpretare questo fatto Immaginiamo un raggio luminoso che, nel riferimento ***O'***, parte dal punto **(x_1',y_1')** al tempo ***t_1'***, si propaga in direzione verticale per un tratto ***h***, incontra uno specchio che lo riflette fino a tornare nello stesso punto **(*x_1', y_1'*)** al tempo ***t_2'***. Gli eventi fisici '*partenza del raggio luminoso*' e '*ritorno del raggio luminoso*' soddisfano le (2) fornendo

$$\Delta x' = (x_2^{'} - x_1^{'}) = 0 \qquad \Delta t' = (t_2^{'} - t_1^{'}) = 2h/c \qquad 3)$$

Quale separazione temporale misura invece ***O?*** Osserviamo in primo luogo che l'osservatore O vedrà un raggio luminoso salire obliquamente verso lo specchio per poi ridiscendere obliquamente verso il punto del riferimento O' da cui era stato emesso.

Tenendo presente che **la velocità della luce vale c anche per O**, da semplici considerazioni cinematiche si ottiene immediatamente che il tempo ***t*** impiegato dal raggio luminoso per raggiungere lo specchio soddisfa la relazione

$$ct = \sqrt{h^2 + (vt)^2}$$

da cui si ottiene

$$t = \frac{h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e quindi un tempo di andata e ritorno del raggio luminoso pari a

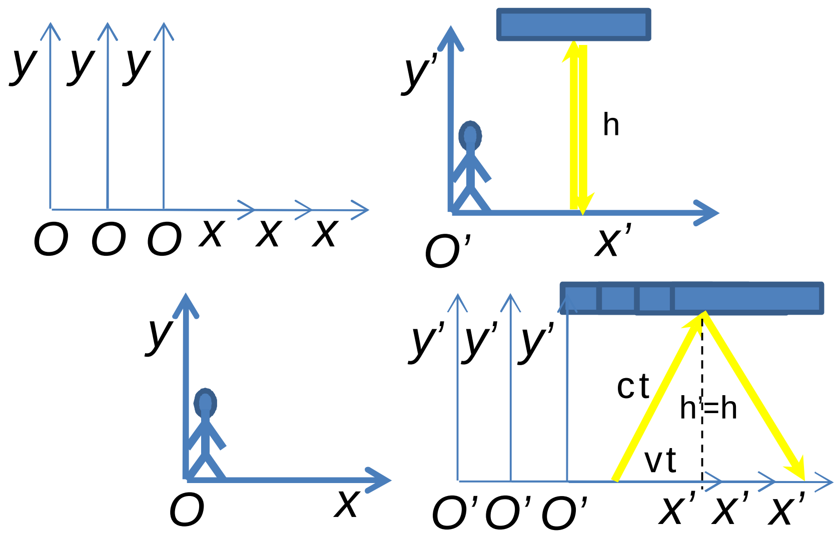
$$t_2 - t_1 = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

il quale, tenendo conto della (3), può essere espresso nella forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che coincide in effetti con la (4).

Dunque, gli osservatori O' ed O osservano la luce compiere due diversi tragitti di cui il primo più breve del secondo. Nonostante questo fatto, i due osservatori misurerebbero la stessa separazione temporale tra gli eventi partenza ed arrivo del segnale luminoso se la luce fosse soggetta alla legge galileiana di composizione della velocità (è facile provarlo!). Il punto però è che il secondo postulato afferma proprio che la luce si propaga con la stessa velocità per tutti gli osservatori violando la legge di composizione galileiana, un fatto possibile solo se gli osservatori misurano intervalli temporali differenti.



L'esempio chiarisce allora che il secondo postulato comporta che **<u>due eventi separati da un intervallo temporale Δt' per l'osservatore in quiete devono risultano separati da un intervallo temporale Δt più lungo per l'osservatore in movimento</u>**. Aumentando la velocità di traslazione del riferimento ***O'***, pur restando invariato per lui l'intervallo temporale ***Δt'*** tra gli eventi, aumenta quello ***Δt*** misurato da ***O***, che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di ***O'*** si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **<u>dilatazione degli intervalli temporali</u>** e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz **<u>ogni osservatore inerziale misura una propria durata degli eventi fisici</u>** un fatto riferito sinteticamente affermando che, contrariamente a ciò che accadeva nella fisica classica, **<u>gli intervalli temporali sono relativi.</u>**

La relatività della simultaneità

Richiamando ancora la trasformazione del tempo da O' ad O

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'}) + \frac{v}{c^2}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad 1)$$

A

B

cercheremo ora di comprendere il significato del termine A. La cosa più semplice è riferirsi ad una coppia di eventi tali che

$$(x_2^{'} - x_1^{'}) \neq 0 \qquad (t_2^{'} - t_1^{'}) = 0 \quad 2)$$

ovvero eventi che per l'osservatore O' accadono in punti dello spazio differenti lungo la direzione del moto relativo dei riferimenti ma che vengono misurati accadere nello stesso istante essendo quindi simultanei.

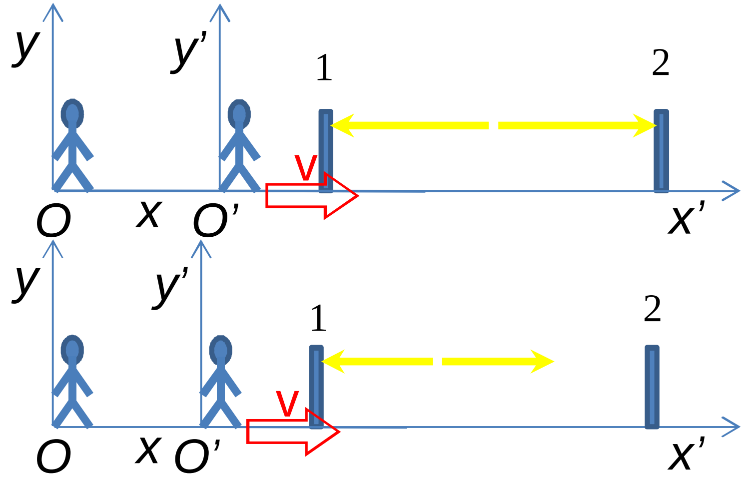
Notiamo subito che una tale coppia di eventi fornisce la seguente espressione della (1)

$$(t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che possiamo porre nella forma

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad 3)$$

Questa espressione mostra che **i due eventi non sono misurati come simultanei dall'osservatore in moto relativo O che li vede dissincroni in una misura crescente con la loro separazione spaziale** (si noti in questa formula la separazione spaziale è espressa nelle variabili di O').



Per interpretare questo fatto immaginiamo che nel riferimento ***O'***, lungo la direzione ***x'***, siano disposti due traguardi distanti **L'** nelle posizioni **x_1'** e ***x_2'***. Ad un certo istante, dal punto di mezzo (tra i due traguardi), vengono emessi due raggi luminosi lungo l'asse ***x'*** in versi opposti, raggiungendo, dopo un certo tempo, i traguardi stessi. Senza dubbio per l'osservatore **O'** i raggi raggiungono i traguardi contemporaneamente. Gli intervalli spaziali e temporali che separano gli eventi arrivo dei due raggi luminosi sui due traguardi valgono allora

$$\Delta x' = (x_2^{'} - x_1^{'}) = L' \qquad \Delta t' = (t_2^{'} - t_1^{'}) = 0$$

Quali intervalli misura invece l'osservatore O? Mentre O' vede i raggi cadere simultaneamente sui due traguardi, l'osservatore ***O***, vede un raggio andare incontro al traguardo (1) e l'altro inseguire il traguardo (2). Dato che **la velocità della luce vale c per tutti e due i raggi luminosi** egli deve concludere che la luce raggiungerà prima un traguardo e poi l'altro. Ora, assumendo come origine dei tempi l'istante in cui vengono emessi i raggi luminosi, le posizioni lungo l'asse delle x dei raggi e dei traguardi sono date dalle espressioni

$$\begin{array}{ll} traguardo(1) & x_0 - \frac{L}{2} + vt \\ raggio(1) & x_0 - ct \\ traguardo(2) & x_0 + \frac{L}{2} + vt \\ raggio(2) & x_0 + ct \end{array}$$

dove, introducendo L, abbiamo previsto la possibilità che i due traguardi vengano misurati da O ad una distanza diversa da quella misurata da O'.

Chiaramente i raggi incontrano i rispettivi traguardi quando eguagliano le rispettive posizioni sull'asse delle x per cui otteniamo le uguaglianze

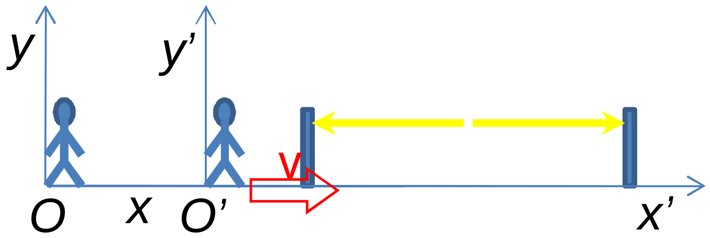
$$x_0 - ct_1 = x_0 - \frac{L}{2} + vt_1 \qquad x_0 + ct_2 = x_0 + \frac{L}{2} + vt_2$$

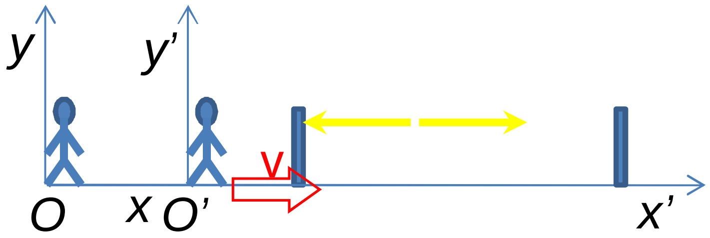
da cui si ottengono i tempi

$$t_1 = \frac{L/2}{c+v} \qquad t_2 = \frac{L/2}{c-v}$$

ed infine la separazione tra gli eventi di arrivo dei due raggi sui traguardi misurata da O

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} L / (1 - \frac{v^2}{c^2}) \qquad 4)$$





Tale espressione non può ancora essere confrontata con la (3) perché in quella formula l'intervallo spaziale risulta misurato da O' e non da O. Le due espressioni (4) e (3) risulteranno coincidenti se

$$L = L'\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad 5)$$

Infatti sostituendo la (5) nella (4) troviamo

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} L'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v^2/c^2)} = \frac{\frac{v}{c^2} L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene infine l'espressione

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che coincide con la (3)!

Dunque, ammettendo la relazione (5) che interpreteremo nel paragrafo seguente, i due osservatori misurano differenti situazioni. O vede i raggi luminosi raggiungere i traguardi nello stesso istante mentre O' vede il primo raggio andare incontro al primo traguardo ed il secondo raggio inseguire il secondo traguardo. Nonostante questo fatto entrambi gli osservatori misurerebbero l'arrivo dei raggi sui traguardi come simultaneo se la luce fosse soggetta alla legge galileiana di composizione della velocità (è facile provarlo!). Il punto però è che il secondo postulato afferma proprio che la luce si propaga con la stessa velocità per tutti gli osservatori violando la legge di composizione galileiana, un fatto che costringe a concludere che l'arrivo dei raggi sui due traguardi non può essere simultaneo per tutti e due gli osservatori.

L'esempio chiarisce allora che il secondo postulato comporta che **due eventi simultanei per l'osservatore in quiete risultano dissincroni per l'osservatore in movimento in misura crescente con al loro separazione spaziale**. Aumentando la velocità di traslazione del riferimento ***O'***, pur restando per lui sincroni gli eventi, aumenta il dissincronismo misurato da ***O***, che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di ***O'*** si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **desincronizzazione degli intervalli temporali** e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz **due eventi possono essere simultanei per un solo osservatore risultando dissincroni per tutti gli altri** un fatto riferito sinteticamente affermando che, contrariamente a ciò che accadeva nella fisica classica, **la simultaneità degli eventi è un concetto relativo.**

Per finire vale la pena notare che questo nuovo effetto comporta che un intervallo giudicato spaziale da O' viene invece giudicato come spaziale e temporale da O. Le trasformazioni di Galileo ammettevano che un intervallo puramente temporale per un osservatore potesse essere interpretato come spaziale e temporale da un altro (un fenomeno periodico per ***O'*** si chiude in tempi diversi ed in punti diversi per ***O***). Tuttavia un intervallo puramente spaziale per un osservatore, rimaneva tale per ogni altro. In relatività il cerchio si chiude e si osserva una completa reversibilità dei punti di vista per cui anche **la definizione della natura spaziale o temporale di un intervallo acquisisce un carattere completamente relativo.**

La contrazione delle lunghezze

L'analisi del concetto di simultaneità sviluppata nel paragrafo precedente ha richiesto ad un certo punto la seguente relazione (vedi la (5)) tra la misura di lunghezza compiuta da O' - che vedeva i traguardi in quiete ad una distanza L' - e quella compiuta da O – che invece vedeva i traguardi in moto con velocità v

$$L = L'\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (1)$$

Questo significa che non possiamo semplicemente assumere che i due tipi di misura coincidano ma che, al contrario, dobbiamo affrontare il problema inedito di misurare la distanza tra due traguardi che si trovino in movimento rispetto all'osservatore, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie quando i due traguardi si trovano in quiete. Infatti l'osservatore O', rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustapponendo un regolo graduato e annotando le tacche corrispondenti ai due traguardi. In questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi è verificata per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa.

Ragionando in termini di eventi fisici, che in questo consistono nella coincidenza dei traguardi con le tacche del regolo, abbiamo per l'osservatore O' i seguenti intervalli

$$(x_2' - x_1') = L' \qquad (t_2' - t_1')\ qualsiasi \qquad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O che li vede muoversi? Può ancora utilizzare il regolo per misurare la distanza dei traguardi ora che sono in moto rispetto al regolo stesso?

Chiaramente in questo caso la difficoltà consiste nel fatto che i traguardi si muovono rispetto al regolo per cui il confronto delle loro posizioni lungo il regolo può essere fatto solo specificando l'istante di tempo. Un attimo di riflessione chiarisce che l'unica sensata possibilità è quella di confrontare tra loro le posizioni dei traguardi lungo il regolo nello stesso istante di tempo. Si potrebbe così identificare **la distanza dei traguardi misurata da O con la differenza delle posizioni simultanee dei traguardi lungo il regolo ad un qualunque istante di tempo**. Una tale definizione, nel caso in cui traguardi fossero fermi rispetto al regolo, restituirebbe la consueta operazione di misura della distanza. Da un punto di vista concettuale, quella appena data, è una **definizione operativa di misura di lunghezza di un corpo materiale in movimento rispetto al regolo** (in questo caso la distanza di due traguardi fermi rispetto ad O'). Vale la pena sottolineare che il termine regolo può essere inteso in senso assai lato. Ad esempio una serie di osservatori disposti lungo la direzione del moto relativo, muniti di orologi sincronizzati, svolgono le operazioni appena discusse per misurare la lunghezza di corpi materiali in movimento (ad esempio la misura della lunghezza di un treno in moto).

La distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere quindi definita come **la distanza tra le tacche del regolo che, nello stesso istante, vengono occupate dai due traguardi,** la qual cosa comporta le seguenti condizioni sugli intervalli misurati da O

$$(x_2 - x_1) = L \qquad (t_2 - t_1) = 0 \qquad (4)$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare otteniamo

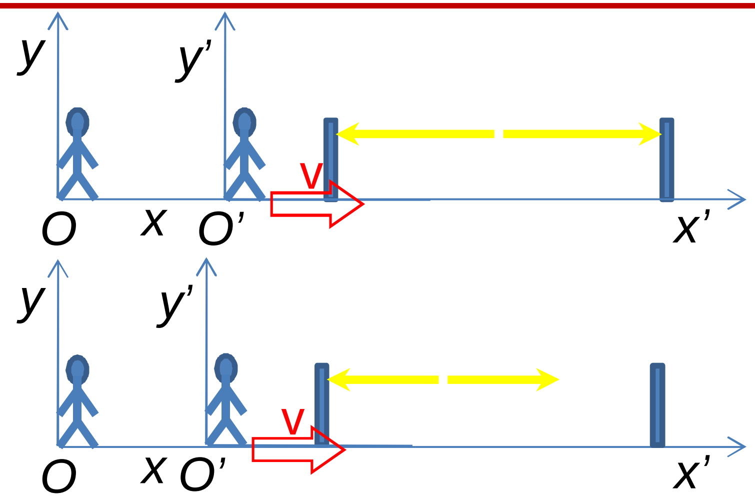
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \qquad L = \dfrac{L' - v\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (1) ipotizzata essere valida nel precedente paragrafo.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente **relazione tra le distanze dei traguardi $\Delta x'$, misurata con regolo in quiete, e Δx, misurata con regolo in moto**

$$\boxed{\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Concludiamo allora che **due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale $\Delta x'$ per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento.** A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **contrazione degli intervalli spaziali** o **contrazione delle lunghezze** e mostra che **secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici**. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, **la distanza tra due eventi è una grandezza relativa** e non assoluta.

La contrazione delle lunghezze

Richiamiamo la ben nota trasformazione degli intervalli spaziali disposti lungo la direzione del moto

$$(x_2 - x_1) = \frac{(x_2^{'} - x_1^{'}) + v(t_2^{'} - t_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (1)$$

ed anche quella degli intervalli temporali

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2^{'} - t_1^{'}) + \frac{v}{c^2}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (2)$$

Poi, immaginiamo nuovamente la situazione analizzata nel paragrafo precedente dove, nel riferimento ***O'*** lungo la direzione ***x'***, erano disposti due traguardi distanti **L'** nelle posizioni $\mathbf{x_1'}$ e $\boldsymbol{x_2'}$.

Qual è la distanza L dei traguardi misurata dall'osservatore O che li vede muoversi con velocità v assieme al riferimento O' cui sono solidali? Coincide con la distanza L' misurata da O'? Si pone così il problema inedito di misurare la distanza di due traguardi in movimento, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie la misura della distanza di due traguardi in quiete.

Infatti l'osservatore O', rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustapponendo un regolo graduato e verificando le tacche corrispondenti ai due traguardi. Si noti che in questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi deve essere verificata sempre, ovvero per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa. Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O' corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x_2^{'} - x_1^{'}) = L' \qquad (t_2^{'} - t_1^{'}) \; qualsiasi \qquad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O?

Immaginiamo di dovere misurare la lunghezza di un treno in transito nella stazione. Potremmo innanzitutto disporre osservatori dotati di cronometro lungo il marciapiede per una lunghezza sufficiente a comprendere l'intero treno. Poi potremmo sincronizzare i diversi cronometri con una qualche procedura in modo che marcino perfettamente paralleli (si può pensare di inviare un segnale luminoso lungo il marciapiede ricevuto il quale, ogni osservatore, posizionerà il cronometro ad un tempo pari a ***d/c*** dove ***d*** è la distanza dell'osservatore dal punto di emissione del segnale). A questo punto è sufficiente che, al passaggio del treno, ogni osservatore annoti i tempi in cui vede di fronte a se la testa e la coda del treno. Si comprende allora che è ragionevole assumere, come lunghezza del treno, la distanza di due osservatori (qualunque) che vedono la testa e la coda del treno nello stesso istante.

Dunque, la distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere definita come ***la distanza tra due punti dello spazio del riferimento O che, nello stesso istante, vengono occupati dai due traguardi.*** Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x_2 - x_1) = L \qquad (t_2 - t_1) = 0 \tag{4}$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle formula (1) e (2) otteniamo

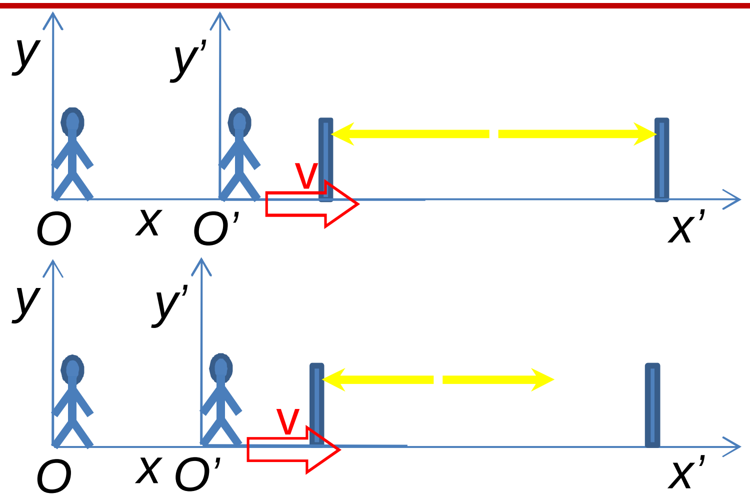
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \qquad L = \frac{L' - v\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (3) che, nel precedente paragrafo, abbiamo ipotizzato essere valida.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente relazione tra le distanze dei traguardi $\Delta x'$ e Δx misurate dagli osservatori O' ed O rispettivamente in quiete ed in moto rispetto ai traguardi stessi

$$\boxed{\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Concludiamo allora che ***due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale $\Delta x'$ per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento.*** A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto ***contrazione degli intervalli spaziali*** o ***contrazione delle lunghezze*** e mostra che ***secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici***. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, ***la distanza tra due eventi è una grandezza relativa*** e non assoluta.