La velocità limite

L'esistenza di una velocità massima possibile, valida per ogni ente fisico (corpi materiali, onde, etc. etc.), è scritta nelle trasformazioni di Lorentz. Si noti, infatti, che in queste compaiono denominatori con radici quadrate

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1);$$

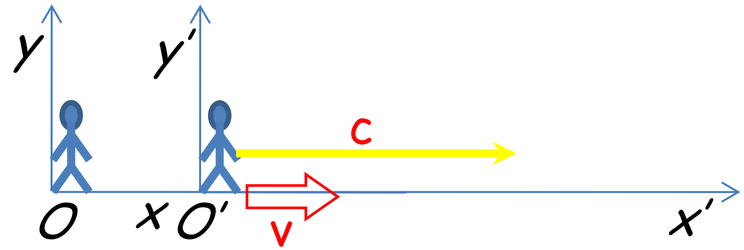
$$(z_2' - z_1') = (z_2 - z_1); \quad (t_2' - t_1') = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

per cui tali espressioni hanno senso solo se le radici quadrate sono reali e non nulle ovvero solo se $\boldsymbol{1-v^2/c^2>0}$ (escludiamo in questa analisi la possibilità che tali radici assumano valori complessi!). Si ottiene allora la seguente condizione sulla velocità della traslazione uniforme del riferimento

$$|v| < |c|$$

valida per un qualsiasi corpo materiale (infatti il riferimento è un corpo materiale come gli altri).

Concludiamo allora che le trasformazioni di Lorentz richiedono che, in ogni riferimento inerziale, **<u>la velocità di un qualunque corpo materiale sia sempre minore di quella della luce</u>** che cosi assume il ruolo di **<u>velocità limite</u>** raggiungibile solo dagli enti fisici non materiali come i campi elettromagnetici.



Chiaramente, **l'esistenza di una velocità limite comporta che la legge di composizione galileiana delle velocità sia errata**. Questo fatto emerge con chiarezza qualora si immagini che l'osservatore ***O'*** invii un raggio luminoso lungo le ***x'*** positive. Se valesse la legge galileiana, il raggio luminoso si propagherebbe con velocità **c+v** rispetto ad O violando l'esistenza della velocità limite oltre che, naturalmente, anche il secondo postulato.

Il teorema di addizione delle velocità

Consideriamo ad esempio le trasformazioni degli intervalli da O' ad O. Evidentemente si ottengono le velocità semplicemente mettendo a rapporto gli intervalli spaziali e temporali

$$\begin{cases}(x_2-x_1)=\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})+v(t_2^{'}-t_1^{'})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\\(y_2-y_1)=(y_2^{'}-y_1^{'})\\(z_2-z_1)=(z_2^{'}-z_1^{'})\\(t_2-t_1)=\dfrac{(t_2^{'}-t_1^{'})+\dfrac{v}{c^2}(x_2^{'}-x_1^{'})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{cases}
\qquad
\begin{cases}\dfrac{(x_2-x_1)}{(t_2-t_1)}=\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})+v(t_2^{'}-t_1^{'})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{(t_2^{'}-t_1^{'})+\dfrac{v}{c^2}(x_2^{'}-x_1^{'})}\\\dfrac{(y_2-y_1)}{(t_2-t_1)}=\dfrac{(y_2^{'}-y_1^{'})\sqrt{1-v^2/c^2}}{(t_2^{'}-t_1^{'})+\dfrac{v}{c^2}(x_2^{'}-x_1^{'})}\\\dfrac{(z_2-z_1)}{(t_2-t_1)}=\dfrac{(z_2^{'}-z_1^{'})\sqrt{1-v^2/c^2}}{(t_2^{'}-t_1^{'})+\dfrac{v}{c^2}(x_2^{'}-x_1^{'})}\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}+v}{1+\dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}}\\v_y=\dfrac{\dfrac{(y_2^{'}-y_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}}\\v_z=\dfrac{\dfrac{(z_2^{'}-z_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2^{'}-x_1^{'})}{(t_2^{'}-t_1^{'})}}\end{cases}
\qquad
\begin{cases}v_x=\dfrac{v_x^{'}+v}{1+\dfrac{v}{c^2}v_x^{'}}\\v_y=\dfrac{v_y^{'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\dfrac{v}{c^2}v_x^{'}}\\v_z=\dfrac{v_z^{'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\dfrac{v}{c^2}v_x^{'}}\end{cases}$$

Otteniamo così le **<u>leggi relativistiche di composizione delle velocità</u>**

$$\boxed{v_x=\frac{v_x^{'}+v}{1+\frac{v}{c^2}v_x^{'}}\qquad v_y=\frac{v_y^{'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}v_x^{'}}\qquad v_z=\frac{v_z^{'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}v_x^{'}}}$$

che sostituiscono quelle galileiane. La struttura delle nuove leggi di composizione è piuttosto complessa, tuttavia, come atteso, le leggi relativistiche conducono a quelle galileiane nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Infatti se *v<<c* si ottiene facilmente

$$v_x\simeq v_x^{'}+v\qquad v_y\simeq v_y^{'}\quad v_z\simeq v_z^{'}$$

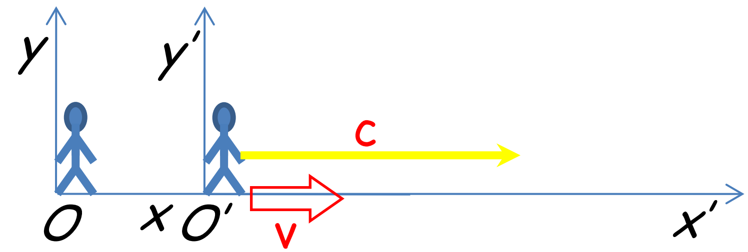
Notiamo che dato un corpo materiale in moto con una certa velocità v'_x, v'_y, v'_z rispetto ad **O'** appare in moto anche ad **O**, ovviamente. Tuttavia le velocità trasversali al moto che egli osserva, non dipendono solamente dalle velocità trasversali che il corpo aveva rispetto ad **O'**, dipendono anche da quella longitudinale lungo la direzione del moto. In un certo senso *le componenti della velocità si mescolano tra loro* contrariamente a quanto avviene con la composizione galileiana delle velocità.

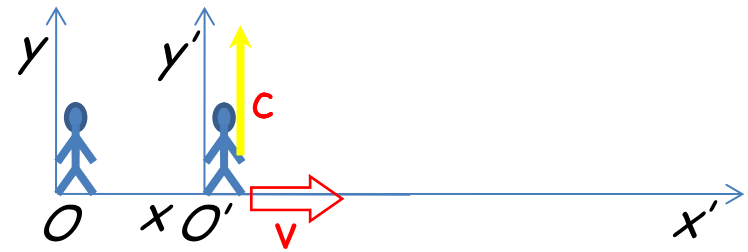
Ancora più sorprendente è **la regola di addizione delle velocità lungo la direzione del moto**. Ragionando con l'esempio esaminato all'inizio si ottiene

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}v'_x} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = c$$

*Ovvero dato un riferimento **O'** che si muove con velocità v rispetto ad **O** (lungo le **x'** positive), se un raggio luminoso si muove con velocità c rispetto ad **O'** (lungo le **x'** positive), allora tale raggio si muove con velocità c anche rispetto ad **O**. Dunque, <u>**secondo le leggi relativistiche di composizione delle velocità v+c=c, in accordo con l'esistenza di una velocità limite**</u>* (e con il secondo postulato) ma in completo conflitto con le leggi galileiane.

Per completezza analizziamo anche il caso in cui **il raggio luminoso sale verticalmente rispetto ad O' (v'_x=0, v'_y=c) e quindi obliquamente rispetto ad O**. Si ha allora





$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}v'_x} & v_y = \dfrac{v'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}v'_x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v & v_y = c\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}$$

da cui possiamo calcolare la velocità del raggio luminoso rispetto ad O

$$\sqrt{(v_x^2+v_y^2)} = \sqrt{v^2+c^2(1-v^2/c^2)} = c$$

in accordo con il secondo postulato.

Il principio di causalità

Dato che una teoria fisica, qualunque essa sia, si pone l'obiettivo di **prevedere l'evoluzione temporale di un sistema fisico** si comprende che l'ipotesi che esso **evolva attraverso un flusso temporalmente ordinato e prevedibile di eventi fisici** ne costituisce l'inevitabile presupposto.

In tali sistemi riveste un ruolo chiave la **relazione di causa-effetto** tra due eventi che permette di descriverne l'evoluzione temporale come una sequenza di accadimenti successivi connessi tra loro in modo tale che quello che precede – la causa - determina quello che segue - l'effetto (se ad ogni causa corrisponde un solo effetto si ha un sistema non solo causale ma anche deterministico).

Queste osservazioni fanno comprendere che le teorie fisiche, proprio per la loro intrinseca necessità di fare previsioni, **devono organizzare le grandezze fisiche in cause ed effetti**, un aspetto che non viene quasi mai sottolineato. Ad esempio nella meccanica newtoniana è la forza che determina l'accelerazione e non viceversa per cui si dice che la forza è la causa e l'accelerazione l'effetto oppure che forza ed accelerazione sono in una relazione di causa-effetto. Così, in elettromagnetismo sono le cariche elettriche che, accelerando, generano un'onda elettromagnetica e non viceversa.

Alcune importante proprietà della relazione di causa-effetto emergono quasi immediatamente.

In primo luogo, poiché la relazione di causa-effetto esprime una connessione tra eventi realizzata attraverso un qualche ente fisico essa ha un carattere oggettivo e deve essere verificata da ogni possibile osservatore: **la relazione di causa-effetto è verificata da tutti gli osservatori ed ha un carattere assoluto.**

Una seconda inevitabile proprietà riguarda l'ordine temporale: **se due eventi sono in relazione di causa-effetto la causa precede sempre l'effetto per tutti gli osservatori** (data la natura assoluta delle proprietà). Se ciò non accadesse la teoria potrebbe condurre a situazioni palesemente assurde (ad esempio immaginiamo che in un certo punto dello spazio, ad un certo tempo, venga esploso un colpo di pistola il cui proiettile va a colpire, ad un certo tempo successivo, una bottiglia posizionata ad una certa distanza frantumandola in mille pezzi. Se l'effetto non seguisse la causa per tutti gli osservatori accadrebbe che qualcuno di loro vedrebbe la bottiglia frantumarsi prima del colpo di pistola).

Ora, supponiamo che una teoria preveda che le azioni fisiche, qualunque sia la loro natura, possano propagarsi con una velocità limitata superiormente da un certo valore V_m. E' chiaro che in questo caso due eventi fisici possono essere causalmente connessi da una qualche azione fisica solo se la loro separazione temporale e spaziale non è incompatibile con la propagazione della più veloce delle azioni fisiche. Concludiamo allora che **due eventi separati da una distanza temporale Δt possono essere in relazione di causa-effetto solo se la loro separazione spaziale Δx è tale che $|\Delta x/\Delta T|<V_m$ per tutti gli osservatori** (natura assoluta delle proprietà). Una ovvia conseguenza di questo fatto è che

mano a mano che la distanza temporale tra causa ed effetto diminuisce deve diminuire anche la corrispondente distanza spaziale per cui, nel limite di una causa ed effetto simultanee si deve avere anche una separazione spaziale nulla. Giungiamo così alla conclusione che **due eventi causalmente connessi e simultanei, ovvero temporalmente coincidenti, devono coincidere anche spazialmente e queste coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori**. In altri termini **le connessioni causali simultanee sono solo locali**, una proprietà riferita come **causalità locale** (come esempio di teoria non causalmente locale possiamo citare la meccanica classica che non possiede alcun limite intrinseco alla velocità di propagazione delle interazioni ammettendo, ad esempio, l'azione gravitazionale istantanea a distanza).

Questo fatto ci fa comprendere che in una teoria fisica causale, con una velocità di propagazione massima delle interazioni, **le coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori** ovvero devono avere un **carattere assoluto**, un punto torneremo nel prossimo paragrafo.

Giungiamo allora alla conclusione che una teoria fisica come la relatività ristretta deve essere <u>**localmente causale**</u> ovvero deve essere tale che, nel caso di eventi in relazione di causale, **in tutti i riferimenti inerziali la causa deve precedere l'effetto e il quoziente tra il loro intervallo spaziale ed il loro intervallo temporale deve soddisfare la relazione $|\Delta x/\Delta t| < c$.** Qualora ciò non accadesse si aprirebbe un delicato problema di consistenza interna della teoria stessa.

❑ Le proprietà causali della TRR

Per stabilire se la Teoria della Relatività Ristretta soddisfa il principio di causalità locale ed assoluta conviene richiamare la trasformazione di Lorentz per l'intervallo temporale che riscriviamo nella seguente forma

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\left[1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t_2' - t_1') \quad (1)$$

Ora immaginiamo che nel riferimento O' accadano due eventi fisici causalmente connessi: la causa nella posizione X1 al tempo t1 e l'effetto nella posizione X2 al tempo t2>t1. Poiché tali eventi sono causalmente connessi, sulla base del secondo postulato della teoria della relatività ristretta avremo la condizione

$$\left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < c \qquad -c < \frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < c \quad (2)$$

Consideriamo ora la quantità tra parentesi quadra nella (1) e sostituiamo la (2), si ha

$$1 - \frac{v}{c} < 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < 1 + \frac{v}{c}$$

da cui, in particolare, discende che per tutti gli eventi in relazione di causa-effetto si ha

$$1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 1 - \frac{v}{c} > 0 \quad (3)$$

tenendo conto della (3) dalla (1) otteniamo

$$(t_2 - t_1) = \underbrace{\left(\frac{1 + \frac{v}{c^2} \frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right)}_{>0} (t_2' - t_1')$$

la quale mostra gli intervalli temporali mantengono la stessa segnatura. Abbiamo così mostrato che **nel caso di eventi causalmente connessi l'ordine temporale è lo stesso per tutti gli osservatori** per cui **la precedenza temporale della causa sull'effetto ha un carattere assoluto** in accordo con quanto atteso nel caso di una teoria che soddisfa il principio di causalità.

E' istruttivo osservare che nel caso di eventi che non possono essere causalmente connessi in quanto non soddisfano la (2) otteniamo che la segnatura degli intervalli temporali può essere invertita. Questo significa che **per tali eventi l'ordine temporale non ha un carattere assoluto** e può accadere che i differenti osservatori vedano una differente sequenza degli eventi. Per quanto ciò possa apparire strano è comunque certo che, essendo tali eventi fisicamente indipendenti, tale fatto non condurrà mai a situazioni assurde.

❑ Dai raggi luminosi alle proprietà dello spazio e del tempo

Ora vogliamo discutere in maggior dettaglio un aspetto già commentato nei precedenti paragrafi. Si tratta del fatto che, in una teoria come la relatività ristretta che ha nella velocità della luce la massima velocità delle azioni fisiche, due eventi simultanei causalmente connessi devono necessariamente avvenire nello stesso punto dello spazio e questo per ogni osservatore. In altri termini **il principio di causalità nella forma locale, cui soddisfa la TRR, implica che le coincidenze spazio-temporali devono avere un carattere assoluto.** Vale sempre la pena ricordare che questo fatto non è vero per le sole coincidenze spaziali (le coincidenze spaziali hanno un carattere relativo già nel caso delle trasformazioni di Galileo) o temporali (le coincidenze temporali hanno un carattere assoluto nel caso Galileiano ma assolutamente relativo con le trasformazioni di Lorentz dove si osserva la relatività della simultaneità) ma solo quando le coincidenze sono sia temporali che spaziali.

Ciò premesso, ora vedremo che l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà degli intervalli spaziali e temporali ottenute a suo tempo, analizzando la propagazione di raggi luminosi, devono essere assolutamente indipendenti dal fenomeno fisico utilizzato per evidenziarle e devono pertanto essere ritenute proprietà autonome ed intrinseche degli intervalli spaziali e temporali stessi.

Intanto verifichiamo quanto detto. Dalle trasformazioni di Lorentz per gli intervalli otteniamo

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2^{'} - x_1^{'}) + v(t_2^{'} - t_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}; \\ (y_2 - y_1) = (y_2^{'} - y_1^{'}); \\ (z_2 - z_1) = (z_2^{'} - z_1^{'}); \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2^{'} - t_1^{'}) + \dfrac{v}{c^2}(x_2^{'} - x_1^{'})}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

da cui consegue che se l'osservatore O' vede due eventi coincidere spazio-temporalmente

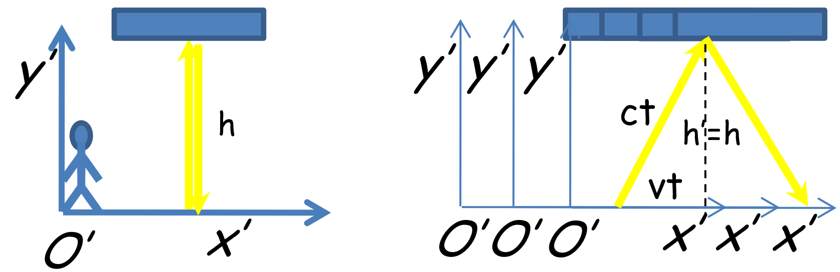
$$\{(x_2 - x_1) = 0 \qquad (y_2 - y_1) = 0 \qquad (z_2 - z_1) = 0 \qquad (t_2 - t_1) = 0$$

anche l'osservatore O li vedrà coincidere spazio-temporalmente

$$\{(x_2^{'} - x_1^{'}) = 0 \qquad (y_2^{'} - y_1^{'}) = 0 \qquad (z_2^{'} - z_1^{'}) = 0 \qquad (t_2^{'} - t_1^{'}) = 0$$

Dunque **due eventi fisici spazialmente e temporalmente coincidenti per un osservatore inerziale risultano tali per ogni altro osservatore inerziale.** In altri termini, come atteso, **le coincidenze spazio-temporali di due eventi sono assolute**.

Come accennato, questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di grande rilevanza. Il secondo postulato precisa in che modo si propaga la luce nei diversi riferimenti, assieme al primo determina la forma delle trasformazioni di Lorentz e permette di costruire i diversi esperimenti ideali attraverso i quali abbiamo esplorato gli effetti relativistici della dilatazione del tempo, contrazione delle lunghezze e relatività della



simultaneità. Il ruolo centrale giocato dalla propagazione della luce potrebbe fare sorgere il dubbio che le trasformazioni di Lorentz e gli effetti relativistici non ci informino di reali proprietà dello spazio e del tempo ma solo di proprietà della misura degli intervalli spaziali e temporali per mezzo di raggi luminosi. In altri termini si potrebbe pensare che gli effetti relativistici potrebbero essere effetti a carico della operazione di misura i quali, una volta corretti, permetterebbero di ottenere la vera misura degli intervalli spaziali e temporali. In realtà, come vedremo, la natura assoluta delle coincidenze spazio-temporali non lascia aperta questa possibilità, forzandoci a concludere che le proprietà dello spazio e del tempo, dedotte attraverso ragionamenti con regoli ed orologi luminosi, devono essere attribuite non a questi ultimi ma proprio allo spazio ed al tempo.

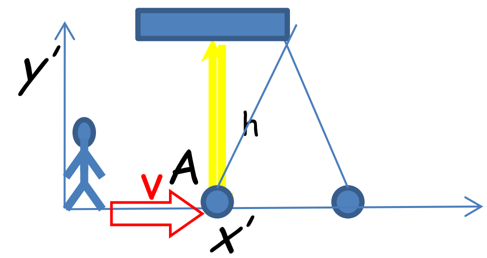
Ad esempio consideriamo il semplice dispositivo utilizzato per illustrare il fenomeno della dilatazione dei tempi. Come sappiamo i postulati della TRR conducono alla espressione seguente

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

la quale afferma che l'intervallo temporale Δt_0 misurato dall'osservatore in quiete ***O'***, è più corto di quello Δt_M misurato dall'osservatore in moto ***O***. In questa situazione *si potrebbe pensare che non è l'intervallo temporale a dilatarsi ma piuttosto il modo in cui lo misuriamo*. In altre parole, si potrebbe pensare che usando un orologio 'luminoso' si trovi l'effetto calcolato mentre usando, ad esempio, un orologio a cucù, si potrebbe trovare una diversa entità dell'effetto o, addirittura, la sua completa assenza. Se le cose stessero così, non saremmo in presenza di proprietà autentiche (ovvero intrinseche) degli intervalli temporali, ma piuttosto di proprietà dipendenti dal modo in cui questi vengono misurati. Come vedremo la TRR non lascia aperta questa possibilità!

Per comprendere questo fatto, immaginiamo di aggiungere al dispositivo appena visto *un pendolo di lunghezza tale da oscillare, nel riferimento O', con lo stesso tempo che impiega il raggio luminoso a compiere il cammino di andata e ritorno*. Possiamo poi sistemare il pendolo in modo tale che, quando il raggio luminoso parte dal punto A, il pendolo parta dallo stesso punto. Siccome il pendolo ha la lunghezza giusta, quando torna nel punto A, incontra nuovamente, in quel punto, il raggio luminoso.

Notiamo subito che in A la posizione del pendolo e del raggio luminoso coincidono sia spazialmente che temporalmente e che, dopo un certo tempo, il raggio luminoso ed il pendolo tornano nello stesso punto A ovvero tornano a coincidere sia spazialmente che temporalmente.



Siccome le coincidenze spaziotemporali sono assolute, queste avvengono per tutti gli osservatori inerziali per cui ogni altro osservatore inerziale O troverà tali coincidenze. Questo però richiede che l'oscillazione del pendolo e l'oscillazione dell'orologio luminoso abbiano la stessa durata non solo per l'osservatore O' ma per ogni altro osservatore O.

Questo a sua volta equivale ad affermare che se si dilata il tempo misurato dall'orologio luminoso deve dilatarsi, nello stesso modo, anche il tempo misurato dal pendolo.

Dato che questo stesso ragionamento può essere ripetuto con qualunque dispositivo si voglia misurare gli intervalli temporali, è chiaro che ci troviamo innanzi ad una proprietà del tempo indipendente dal modo in cui viene misurato vale a dire ad una sua proprietà intrinseca.

Questi ragionamenti possono essere facilmente estesi anche agli altri effetti relativistici quali la relatività della simultaneità e la contrazione delle lunghezze. Possiamo allora affermare in generale che:

l’assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà dello spazio e del tempo, misurate con i raggi luminosi, debbano essere verificate da qualunque altro metodo di misura, ovvero, che tali proprietà sono **proprietà intrinseche dello spazio e del tempo**.

Dunque esiste una connessione profonda tra aspetti apparentemente diversi della teoria della relatività ristretta: la causalità nella forma locale richiede che le coincidenze spazio-temporali abbiano una natura assoluta e questa proprietà delle coincidenze è, a sua volta, cruciale per rendere le proprietà degli intervalli temporali e spaziali, messe in luce attraverso orologi e regoli luminosi, autentiche proprietà del tempo e dello spazio.

Una nuova grandezza assoluta: la distanza spaziotemporale

L'analisi delle proprietà degli intervalli spaziali e temporali condotta fino ad ora probabilmente ci ha convinti che la TTR renda sistematicamente relative, ovvero dipendenti dal riferimento utilizzato, quelle grandezze che le trasformazioni di Galileo, valide nella fisica classica, pensavano essere assolute. Vedremo in questo paragrafo che questa affermazione è solo parzialmente vera poiché se da un lato gli intervalli spaziali e temporali sono relativi troveremo che esiste invece un nuovo tipo di intervallo che assume lo stesso valore per tutti gli osservatori e che pertanto è assoluto.

Richiamiamo le trasformazioni di Lorentz dal riferimento O a quello O' nella forma degli intervalli

$$\begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\,\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ora eleviamo al quadrato i due membri di ciascuna eguaglianza

$$\begin{cases} \Delta x'^2 = \dfrac{\Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 - 2v\Delta x\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ \Delta t'^2 = \dfrac{\Delta t^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x^2 - 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{cases}$$

Poi riscriviamo le eguaglianza in termini non di Δt ma di cΔt (lo stesso si faccia per Δt')

$$\begin{cases} \Delta x'^2 = \dfrac{\Delta x^2 + \dfrac{v^2}{c^2} c^2 \Delta t^2 - 2\dfrac{v}{c}\Delta x\, c\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ c^2 \Delta t'^2 = \dfrac{c^2 \Delta t^2 + \dfrac{v^2}{c^2}\Delta x^2 - 2\dfrac{v}{c}\Delta x\, c\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{cases}$$

A questo punto si esegua la somma membro a membro delle prime tre equazioni e si sottragga la quarta

$$\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2-c^2\Delta t'^2=\frac{\Delta x^2+\frac{v^2}{c^2}c^2\Delta t^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2-\frac{c^2\Delta t^2+\frac{v^2}{c^2}\Delta x^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}=$$

$$=\frac{\Delta x^2+\frac{v^2}{c^2}c^2\Delta t^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t-c^2\Delta t^2-\frac{v^2}{c^2}\Delta x^2+2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2=$$

$$=\frac{\Delta x^2(1-v^2/c^2)-c^2\Delta t^2(1-v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2=$$

$$=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2$$

Giungiamo allora alla conclusione che il quadrato di un intervallo spaziale (e quindi la distanza spaziale) ed il quadrato di un intervallo temporale (e quindi la distanza temporale o durata) tra due eventi, come più volte osservato, non è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Tuttavia se gli osservatori inerziali sottraggono al quadrato della distanza spaziale tra due eventi il prodotto della velocità della luce per il quadrato della loro distanza temporale (che ha le dimensioni di una lunghezza elevata al quadrato) troveranno tutti lo stesso valore. Questo particolare modo di combinare tra loro gli intervalli spaziali e temporali viene detto **intervallo spaziotemporale** o **distanza spaziotemporale** per cui possiamo affermare che nella teoria della relatività ristretta **la distanza spazio-temporale tra gli eventi è la stessa per tutti gli osservatori inerziali** ovvero che **la distanza spaziotemporale tra due eventi è una grandezza assoluta**

$$\boxed{(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2} \qquad (4)$$

(si noti che in questa forma, l'assolutezza delle coincidenze spaziotemporali viste nella pagina precedente si deriva immediatamente). Nei prossimi paragrafi mostreremo come questo fatto possa essere sfruttato per giungere ad una elegante e potente riformulazione della teoria della relatività ristretta in termini geometrici.

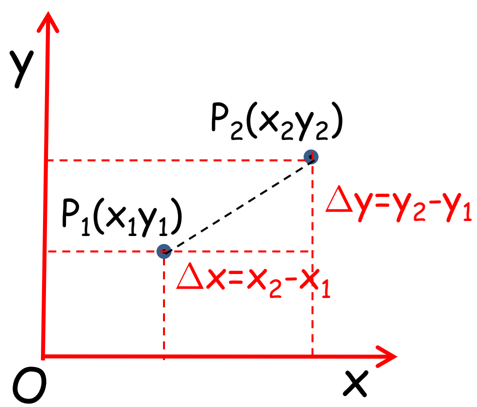
La rotazione del riferimento tridimensionale

La proprietà delle trasformazioni di Lorentz di lasciare invariata la forma quadratica (4) fu messa in luce nel 1908 da Hermann Minkowsky, già professore di A. Einstein al politecnico di Zurigo, che sviluppò una elegante e potente formulazione geometrica della TRR. Per capire l'approccio proposto da Minkowsky vale la pena sviluppare alcune considerazioni preliminari.

❑ Le rotazioni nello spazio tridimensionale

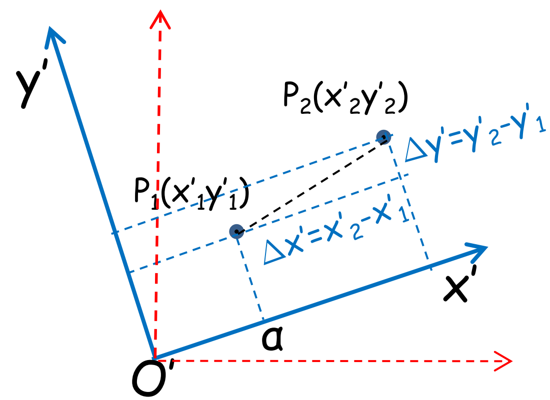
Per semplificare le formule senza perdere i concetti essenziali, pensiamo a **due punti dello spazio tridimensionale euclideo giacenti sul piano xy di un riferimento O**: la loro distanza può essere calcolata attraverso il teorema di Pitagora sommando i quadrati delle differenze delle coordinate

$$d^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \qquad (1)$$



Ora assumiamo un riferimento ***O'*** ruotato, rispetto ad O, di angolo antiorario α attorno all'asse z normale al piano del foglio. Il nuovo osservatore misurerà diverse coordinate dei punti e quindi diversi valori degli intervalli ***Δx'*** e ***Δy'*** ma, quando va a calcolare la distanza tra P e Q, troverà lo stesso valore misurato da ***O***

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2) \qquad (2)$$

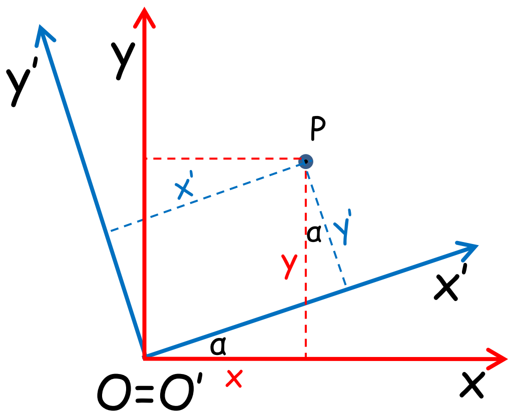


verificando il fatto ben noto che **<u>la distanza tra due punti del piano euclideo non viene alterata dalla rotazione del riferimento</u>.** La (1) e la (2) conducono allora alla seguente eguaglianza

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \qquad (3)$$

E' utile verificare questo fatto considerando le trasformazioni cui sono soggette le coordinate cartesiane dei punti a seguito della rotazione.

Nel caso in cui il riferimento O' viene ruotato di un angolo α antiorario rispetto ad O abbiamo la situazione indicata nella seguente figura



dalla quale possiamo ricavare facilmente le seguenti relazioni tra le coordinate del punto P nei due riferimenti

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha \; x + \sin\alpha \; y \\ y' &= -\sin\alpha \, x + \cos\alpha \, y \end{aligned} \qquad (4)$$

Da queste ricaviamo immediatamente le trasformazioni degli intervalli tra le coordinate di due punti

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \cos\alpha \; \Delta x + \sin\alpha \; \Delta y \\ \Delta y' &= -\sin\alpha \, \Delta x + \cos\alpha \, \Delta y \end{aligned} \qquad (5)$$

che possono essere elevate al quadrato

$$\Delta x'^2 = \cos^2\alpha \; \Delta x^2 + \sin^2\alpha \; \Delta y^2 + 2\cos\alpha \sin\alpha \, \Delta x \, \Delta y$$

$$\Delta y'^2 = \sin^2\alpha \, \Delta x^2 + \cos^2\alpha \, \Delta y^2 - 2\cos\alpha \sin\alpha \, \Delta x \, \Delta y$$

e sommate membro a membro

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Troviamo allora una espressione coincidente in con la (3). E' semplice intuire che nel caso avessimo considerato due punti P e Q nello spazio xyz invece che nel piano xy, e una rotazione del riferimento attorno ad una generica direzione dello spazio invece che attorno all'asse z, le coordinate dei punti P e Q avrebbero subito una trasformazione lineare più complessa della (4), ma sempre tale da lasciare invariata la distanza dei punti

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (6)$$

Concludiamo allora che **la rotazione del riferimento nello spazio euclideo tridimensionale determina una trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio tale per cui la distanza pitagorica di due punti rimane invariata**.

La trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio a seguito della rotazione viene detta **trasformazione ortogonale** e le (4) e (5), sia pure in caso semplice di rotazione attorno all'asse z, ne sono un esempio.

❑ I vettori nello spazio tridimensionale

Un modo molto efficiente per trattare i punti dello spazio e le sue proprietà è quello di associare a ciascun punto un segmento orientato detto **vettore posizione** dove le proprietà geometriche dello spazio vengono incluse attraverso la definizione di un certo numero di operazioni: somma (e differenza), moltiplicazione scalare, prodotto scalare e vettoriale. Il concetto di vettore descrive efficacemente anche le proprietà delle coordinate dei punti dello spazio rispetto alle rotazioni.

Ad esempio si consideri un generico **punto P** dello spazio di coordinate x,y e z cui viene associato il **vettore posizione**

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad (8)$$

le cui componenti coincidono con le coordinate cartesiane del punto. Quando si effettua una **rotazione del riferimento** tali componenti sono soggette ad una trasformazione lineare che potremmo esprimere in modo generale attraverso una matrice 3x3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (9)$$

oppure in modo più sintetico come

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} \qquad (10)$$

Notiamo che la distanza del punto P dalla origine O del riferimento, nel linguaggio dei vettori, è il modulo quadrato del vettore posizione ovvero **il prodotto scalare del vettore posizione con se stesso**

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (11)$$

Come osservato nel paragrafo precedente, la rotazione del riferimento ha la proprietà di lasciare inalterata la distanza di due punti dello spazio e quindi anche la distanza del punto P dall'origine O del riferimento. Questo significa che nel caso di una rotazione si deve avere

$$\vec{r}\,' \cdot \vec{r}\,' = \vec{r} \cdot \vec{r} \qquad (12)$$

D'altra parte se eseguiamo una rotazione, dalla (3) otteniamo (introducendo la matrice trasposta R^T) il seguente prodotto scalare

$$\vec{r}\,' \cdot \vec{r}\,' = (R\vec{r}) \cdot (R\vec{r}) = \vec{r}\, R^T R\, \vec{r} \qquad (12b)$$

che coincide con la (5) nel caso in cui

$$R^T R = I \qquad da\ cui \qquad R^T = R^{-1} \qquad (13)$$

giungiamo così alla conclusione che **la rotazione del riferimento determina una trasformazione lineare delle componenti di un generico vettore esprimibile con una matrice R che soddisfa la (6).** Una tale matrice viene detta **ortogonale.**

facoltativo

Naturalmente quanto detto per il vettore posizione di un generico punto vale per i vettori posizione

$$\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1) \qquad \vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$$

ed anche per la loro differenza

$$\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

A seguito di una rotazione il prodotto scalare di questo vettore con se stesso rimane inalterato per cui, in analogia con la (12), possiamo scrivere

$$(\vec{r}_2\,'-\vec{r}_1\,')\cdot(\vec{r}_2\,'-\vec{r}_1\,')=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

che fornisce

$$(\Delta x',\Delta y',\Delta z')\cdot(\Delta x',\Delta y',\Delta z')=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cdot(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

da cui, infine, l'espressione

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$$

che coincide con la (6) dimostrando che le proprietà delle rotazioni possono essere reinterpretate attraverso i vettori. Riassumendo: i) si associa al generico punto dello spazio il vettore posizione; ii) si associa alla generica rotazione del riferimento una matrice R che opera sui vettori posizione; iii) si richiede che la rotazione lasci invariata la distanza di due punti dello spazio il che richiede che la matrice R sia ortogonale ovvero soddisfi una relazione come la (13).

Questo modo formale di gestire le rotazioni torna molto utile nelle considerazioni del prossimo paragrafo.

❑ Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale

Una legge fisica è una relazione tra grandezze fisiche - espressa in forma di equazione - capace di descrivere una certa classe di fenomeni. Mentre la forma dettagliata della legge fisica trova il suo fondamento negli esperimenti riguardanti quella specifica classe di fenomeni, la sua struttura generale è dettata da un certo numero di requisiti che si ritiene debbano essere soddisfatti da qualunque legge fisica.

Ad esempio un requisito generale è che i due membri della equazione che esprime una legge fisica abbiano le stesse dimensioni, siano esse metri, newton o altro.

Poi, dato che fino ad oggi si è verificato che nello spazio non vi sono direzioni privilegiate o posizioni privilegiate, risulta necessario richiedere che le leggi fisiche abbiano una '*forma*' indipendente dall'orientamento del riferimento o dalla posizione del riferimento.

Naturalmente, sulla base del principio di relatività, risulta anche necessario richiedere che la '*forma*' della legge fisica sia indipendente dalla velocità del riferimento (uniforme rispetto ad un qualche riferimento inerziale).

Tra questi, prendiamo in esame il requisito della indipendenza della '*forma*' della equazione dall' orientamento del riferimento.

Per ragionare su di una legge concreta, prendiamo in esame il secondo principio della dinamica newtoniana

$$\vec{f} = m\vec{a} \tag{15}$$

che esprime il legame esistente tra la forza applicata ad un punto materiale e l'accelerazione che gli viene impressa.

Come osservato poco fa, ci attendiamo che il 'contenuto fisico' di questa equazione sia indipendente dall' orientamento nello spazio del riferimento O prescelto. Ciò significa che qualora assumessimo un riferimento O' ruotato rispetto ad O, il 'contenuto fisico' della equazione dovrebbe rimanere invariato. In effetti le cose stanno così. Infatti, ricordando la (10), una rotazione del riferimento determina la seguente trasformazione delle componenti dei vettori

$$R\vec{f} = R(m\vec{a}) = mR\vec{a} \tag{15b}$$

(essendo la massa una grandezza scalare non viene modificata dalla matrice di rotazione) che conduce alla relazione

$$\vec{f}' = m\vec{a}' \tag{16}$$

In tale equazione le componenti dei vettori sono cambiate rispetto alla (15) - un fatto inevitabile poiché è cambiato l'orientamento del riferimento - tuttavia la struttura o **forma della equazione,** ovvero il tipo di legame esistente tra forza ed accelerazione è rimasto lo stesso - i) modulo della forza proporzionale al modulo della accelerazione, ii) forza ed accelerazione lungo la stessa direzione e nello stesso verso - e con esso anche ciò che abbiamo chiamato 'contenuto fisico' della equazione.

In che modo è stata garantita questa proprietà ? Un attimo di riflessione è sufficiente per individuare nella (15b) il passaggio chiave: l'equazione ha conservato la sua forma a seguito della rotazione perché i due membri si sono trasformati nello stesso modo e questo - a sua volta - è accaduto perché tali membri sono enti matematici dello stesso genere: nel caso specifico entrambi vettori.

Giungiamo così ad una importante conclusione di valore generale detta **principio di covarianza**: **affinché una equazione sia invariante in forma rispetto ad una certa trasformazione è necessario che entrambi i suoi membri si trasformino nello stesso modo quando viene compiuta quella trasformazione.**

Nel caso della (15) il requisito della invarianza in forma della equazione rispetto alle rotazioni è stato assicurato dal fatto di avere scritto l'equazione come eguaglianza tra vettori. Nel fare questa cosa apparentemente ovvia, abbiamo in realtà immesso nella equazione stessa il fatto fisico fondamentale che l'orientamento del riferimento non può avere alcun significato fisico particolare se non quello di permettere di associare ad ogni vettore certe particolari componenti. Il vero significato fisico è invece contenuto nella 'forma' della equazione che è stata salvaguardata dall'avere scritto l'equazione con membri matematicamente omogenei ovvero in forma covariante.

La formulazione geometrica della teoria della relatività ristretta

Le considerazioni sulle rotazioni sviluppate nel precedente paragrafo sono sufficienti per comprendere la riformulazione della teoria della relatività ristretta proposta da Minkowsky.

❑ Trasformazioni di Lorentz e rotazioni nello spazio di Minkowsky

In primo luogo ricordiamo che **il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, descritto da una trasformazione di Lorentz, modifica gli intervalli spaziali e temporali tra gli eventi ma non l'intervallo spazio-temporale**, come espresso dalla (4) del par 3.9

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2 \qquad (1)$$

Notiamo che questa espressione ha una forte somiglianza con la (6) del par 3.10 che esprimeva l'invarianza della distanza di due punti dello spazio a seguito di una rotazione del riferimento tridimensionale. Ciò potrebbe **suggerire di interpretare una trasformazione di Lorentz come una 'rotazione' del riferimento**. Se si vuole seguire questa strada è però necessario superare alcune difficoltà.

In primo luogo risulta necessario estendere la nozione di spazio e sistema di riferimento. Infatti nella (6) del par 3.10 compaiono i quadrati dei tre intervalli spaziali Δx, Δy, Δz mentre qui si aggiunge pure il quadrato dell'intervallo temporale $c\Delta t$ (si noti che $c\Delta t$ ha le dimensioni di una lunghezza come gli intervalli spaziali). Questo indica che **gli eventi devono essere collocati in uno spazio a quattro dimensioni** e che in esso **un riferimento ha quattro assi coordinati**, tre per rappresentare gli intervalli spaziali ed il quarto per l'intervallo temporale.

A questo punto bisogna però tenere conto del fatto che la distanza, in questo ipotetico spazio a quattro dimensioni, non viene calcolata sommando i quadrati degli intervalli secondo il teorema di pitagora ma piuttosto sommando i quadrati degli intervalli spaziali e sottraendo quello dell'intervallo temporale. Può apparire una differenza di poco conto tuttavia ciò comporta che **la distanza tra due punti in questo spazio a quattro dimensioni possa anche essere negativa**, un fatto che non ha riferimenti nella ordinaria geometria euclidea dove le distanze sono sempre positive o al più nulle. Per tale motivo tale spazio a quattro dimensioni viene detto **spazio pseudoeuclideo**.

Un espediente per non rinunciare al teorema di pitagora nel calcolo della distanza, tenendo però conto del fatto che questa va calcolata sottraendo il quadrato dell'intervallo temporale, è quello di riscrivere la (1) con **l'unità immaginaria**

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)+(ic\,\Delta t')^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)+(ic\,\Delta t)^2 \qquad (2)$$

Posta in questa forma si vede che introducendo, accanto ai tre assi reali, un'asse dei tempi immaginario **la distanza tra due punti dello spazio quadrimensionale può essere calcolata formalmente con il teorema di pitagora** (in questo modo la natura pseudoeuclidea dello spazio è espressa dalla presenza di un asse immaginario piuttosto che dalla modifica del teorema di pitagora).

Fatte queste osservazioni giungiamo alla importante conclusione che **il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero una trasformazione di Lorentz, può essere interpretata come una rotazione di un riferimento in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni** che chiameremo **spazio di Minkowsky.**

Per gestire in modo razionale le proprietà dello spazio di Minkowsky conviene procedere sulla falsariga di ciò che abbiamo fatto nel paragrafo precedente nel caso dello spazio tridimensionale.

In primo luogo osserviamo che **ad un evento fisico** - che un certo osservatore O colloca nella posizione x, y e z al tempo t - viene a **corrispondere un punto in un riferimento quadridimensionale O nello spazio di Minkowsky**.

Se introduciamo il concetto di **vettore posizione nello spazio di Minkowsky** o **quadrivettore posizione**, ad un evento fisico corrisponderà il seguente quadrivettore

$$\overline{R} = (x, y, z, ict) \qquad (12)$$

Vale la pena richiamare l'attenzione sul fatto che introducendo lo spazio di Minkowsky **il tempo viene integrato nella geometria dello spazio**, in quanto cessa di essere un parametro fisico esterno per divenire invece una coordinata degli eventi del tutto simile alle coordinate spaziali.

Quando si passa da un riferimento inerziale O ad un riferimento inerziale O' le coordinate di un evento fisico si modificano in accordo con la trasformazione di Lorentz che possiamo porre nella forma di trasformazione di quadrivettori

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{vmatrix} \qquad (15)$$

ed anche nella forma compatta seguente

$$\overline{R}' = \Lambda \overline{R} \qquad (16)$$

Dunque **una trasformazione di Lorentz può essere interpretata come una trasformazione lineare Λ delle componenti del quadrivettore posizione** (si noti ancora una volta l'analogia formale con le rotazioni tridimensionali).

Introduciamo ora il concetto di **prodotto scalare tra quadrivettori**. Dato che con l'introduzione di un asse immaginario dei tempi abbiamo ripristinato la validità del teorema di pitagora, il prodotto scalare può essere definito in modo analogo al caso tridimensionale. Il **modulo quadrato del quadrivettore posizione** sarà dato quindi dal prodotto scalare del quadrivettore con se stesso

$$\overline{R} \cdot \overline{R} = (x, y, z, ict) \cdot (x, y, z, ict) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \qquad (17)$$

E' facile verificare che la trasformazione lineare Λ (ovvero la trasformazione di Lorentz) lascia invariato, come atteso, il prodotto scalare (17). Dalla (16) si ha la seguente relazione

$$\overline{R}'\cdot\overline{R}' = (\Lambda\,\overline{R})\cdot(\Lambda\,\overline{R}) = \overline{R}\,\Lambda^T\Lambda\,\overline{R}$$

che lascerà invariato il prodotto scalare solo se

$$\Lambda^T\Lambda = I \tag{18}$$

In effetti dalla (15) si ha che

$$\Lambda^T\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-v^2/c^2}\begin{vmatrix} 1-v^2/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-v^2/c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

che conferma quindi la (18). Dunque **una trasformazione di Lorentz, ovvero la trasformazione lineare Λ, lascia invariato il modulo quadrato del quadrivettore posizione.**

Questo significa che una trasformazione di Lorentz deve lasciare invariato anche il modulo quadrato del quadrivettore differenza tra due eventi fisici. Dati allora i quadrivettori

$$\overline{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \overline{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2)$$

possiamo calcolare il quadrivettore differenza

$$\overline{R}_2 - \overline{R}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ict_2 - ict_1) = \\ = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)$$

le cui componenti sono gli intervalli spaziali e temporale tra i due eventi. Calcolando ora il modulo di questo quadrivettore otteniamo l'espressione seguente

$$(\overline{R}_2 - \overline{R}_1)\cdot(\overline{R}_2 - \overline{R}_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) = \\ = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$$

che coincide con la distanza spaziotemporale tra i due eventi. Dunque, **la distanza spaziotemporale tra due eventi fisici può essere interpretata come il modulo quadrato del quadrivettore differenza dei due eventi** e, come tale, è lasciata invariata dalla trasformazione di Lorentz.

Riassumendo, la procedura appena discussa prevede

- l'introduzione di uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, tre reali (per lo spazio) ed una immaginaria (per il tempo), dove le distanze si calcolano con il teorema di pitagora;

facoltativo

- l'introduzione di quadrivettori posizione in tale spazio con le consuete operazioni di somma, differenza e prodotto scalare;
- ad ogni evento fisico misurato da un certo osservatore O corrisponde allora un quadrivettore posizione in un certo riferimento O quadridimensionale;
- al passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero alla trasformazione di Lorentz, corrisponde una trasformazione lineare delle componenti del quadrivettore posizione;
- tale trasformazione lineare lascia invariato il prodotto scalare tra quadrivettori e può essere interpretata come una rotazione del riferimento quadridimensionale;
- in particolare tale trasformazione lascia invariato il prodotto scalare con se stesso del quadrivettore posizione differenza tra due eventi che coincide con la distanza spaziotemporale tra gli eventi stessi (che è il punto da cui sono partite le nostre considerazioni).

❑ Le rotazioni nello spazio di Minkowsky ed i postulati della teoria della relatività ristretta

Come tante volte sottolineato, la teoria della relatività ristretta ha il suo punto d'inizio nei postulati di relatività e costanza della velocità della luce dai quali si ritiene debbano discendere tutte le conseguenze fisiche della teoria stessa.

Dovendo ricostruire la fisica dall'inizio, abbiamo in primo luogo dedotto dai due postulati **le nuove trasformazioni degli eventi fisici**, ovvero le trasformazioni di posizione e tempo tra due osservatori inerziali (trasformazioni di Lorentz).

Dopo avere analizzato le rivoluzionarie proprietà di queste trasformazioni, abbiamo mostrato che collocando gli eventi fisici in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, con tanto di quadrivettori dotati delle 'consuete' operazioni (spazio di Minkowsky), le trasformazioni di Lorenz possono essere interpretate in chiave geometrica come rotazioni del riferimento in tale spazio.

Giungiamo in questo modo a comprendere che per rappresentare gli eventi fisici in accordo con i postulati della teoria è sufficiente posizionarli nello spazio di Minkowsky:

<u>i postulati della TRR sono soddisfatti collocando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky</u>.

facoltativo

E' utile vedere questo fatto con un esempio diretto. Immaginiamo che un osservatore O misuri la velocità della luce, nel proprio riferimento misurando, l'intervallo spaziale e temporale intercorrente tra gli eventi partenza e arrivo del segnale luminoso

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{(t_2 - t_1)} \qquad (1)$$

facoltativo

Quadrando, troviamo facilmente la relazione

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 \qquad (2)$$

ed anche l'equazione seguente

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0 \qquad (3)$$

Ora, notiamo che associando ai due eventi fisici i quadrivettori posizione nello spazio di Minkowsky

$$\overline{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \overline{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2) \qquad (4)$$

si ottiene

$$\overline{R}_2 - \overline{R}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)) \qquad (5)$$

da cui risulta che la (3) può essere scritta come prodotto scalare del quadrivettore differenza degli eventi fisici

$$(\overline{R}_2 - \overline{R}_1) \cdot (\overline{R}_2 - \overline{R}_1) = 0 \qquad (6)$$

Poiché sappiamo che il prodotto scalare è lasciato invariato dal cambiamento di riferimento inerziale o trasformazione di Lorentz, possiamo affermare che O' potrà scrivere

$$(\overline{R}_2' - \overline{R}_1') \cdot (\overline{R}_2' - \overline{R}_1') = 0 \qquad (7)$$

dalla quale, con gli stessi passaggi sopra esposti, si giunge evidentemente alla espressione

$$c = \frac{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}{(t_2' - t_1')}$$

che rappresenta il valore della velocità della luce misurata da O' il quale, in accordo con il secondo postulato, coincide con quello misurato da O.

Evidentemente il passaggio cruciale è quello che permette di passare dalla (6) alla (7) per cui possiamo concludere che il secondo postulato risulta garantito dalla invarianza del prodotto scalare rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, come si diceva, rappresentando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky si assicurano agli eventi stessi le proprietà richieste dai due postulati della teoria.

E' naturale domandarsi a questo punto se anche la costruzione di leggi fisiche in accordo con i postulati della teoria possa essere ottenuta formulando tali leggi nello spazio di Minkowsky.

Per rispondere a questa domanda richiamiamo innanzitutto il postulato di relatività, che in effetti si pronuncia su come 'costruire' le leggi fisiche: **le leggi fisiche devono essere le 'stesse' per tutti gli osservatori inerziali**. Con 'stesse' non si può certo intendere che le grandezze fisiche devono assumere gli stessi valori numerici in tutti i riferimenti ma, piuttosto, che la loro reciproca relazione deve essere la 'stessa' ovvero, più precisamente, che **le equazioni delle leggi fisiche devono avere la 'stessa forma' in tutti i riferimenti inerziali**.

Poiché si passa da un riferimento inerziale all'altro con una trasformazione di Lorentz, il principio di relatività sostanzialmente richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una trasformazione di Lorentz**.

Ma, abbiamo visto che una trasformazione di Lorentz è interpretabile come una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky per cui il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky.**

Richiamiamo ora le conclusioni raggiunte nel paragrafo '*Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale*', dove abbiamo mostrato che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni tridimensionali è sufficiente scriverle in forma covariante ovvero in forma tale che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni tridimensionali stesse.

Da questo possiamo allora dedurre che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni nello spazio di Minkowsky sarà sufficiente scrivere tali leggi in forma covariante in tale spazio, ovvero in modo che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni stesse ovvero rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Giungiamo allora a comprendere che, in ultima analisi, il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere covarianti nello spazio di Minkowsky.**

Possiamo allora mettere assieme le conclusioni cui siamo pervenuti affermando che

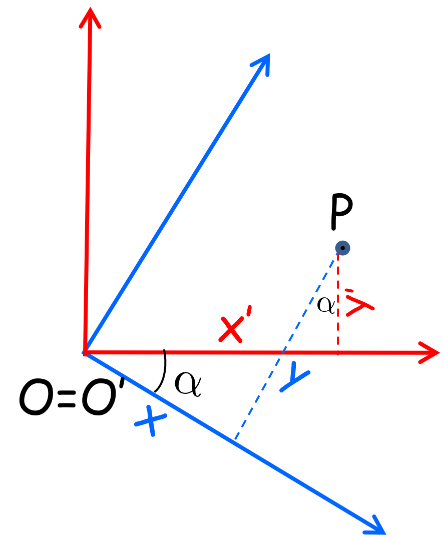
i postulati della teoria della relatività ristretta sono soddisfatti:

i) **posizionando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky**;

ii) **scrivendo le leggi fisiche in forma covariante nello spazio di Minkowsky.**

Tale affermazione, spesso riferita come **postulato di covarianza**, traduce in una **prescrizione formale ed operativa di natura geometrica il contenuto fisico dei postulati della teoria**. Attraverso di esso risulta più semplice riformulare, e se necessario correggere, le teorie della fisica classica in modo da accordarle con i principi della relatività, mentre rappresenta il principio guida fondamentale nella costruzione di ogni nuova teoria.

❑ Le traformazioni di Lorentz come rotazione nello spazio di Minkwosky

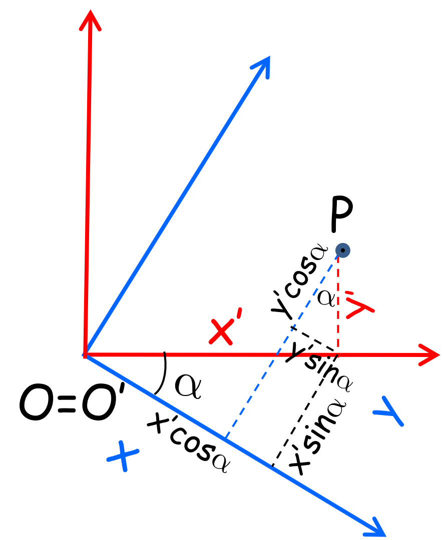


Le trasformazioni di Lorentz da noi considerate sono relative a sistemi di riferimento ad assi paralleli in moto relativo uniforme lungo l'asse delle ascisse. Con questa scelta geometrica le uniche variabili soggette a trasformazione sono le ascisse x ed il tempo t mentre le y e le z rimangono inalterate. Dunque quella che in generale dovrebbe essere una rotazione nello spazio quadridimensionale si riduce, in questo caso, ad una rotazione di due assi ovvero ad una rotazione nel piano.

Possiamo allora facilmente dedurre per via geometrica la relazione esistente tra le coordinate x e t di un quadrivettore a seguito di una rotazione nello spazio di Minkowsky di un certo angolo assegnato.

Per cominciare analizziamo una ***rotazione piana ordinaria*** di un certo angolo α. Con tutta evidenza il punto ***P*** possiede coordinate ***x'*** e ***y'*** rispetto al sistema iniziale (in rosso) e coordinate ***x*** e ***y*** rispetto a quello finale ruotato (in blu). Dalla figura sottostante troviamo facilmente

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \dfrac{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \\ y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = \dfrac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \end{cases}$$



le quale si può anche scrivere come

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x'\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \end{cases}$$

Tali espressioni mostrano una notevole somiglianza con le trasformazioni di Lorentz e lo diventano esattamente se teniamo conto che l'asse y è l'asse immaginario dei tempi

$$y' = ict' \qquad y = ict$$

e richiediamo la seguente eguaglianza

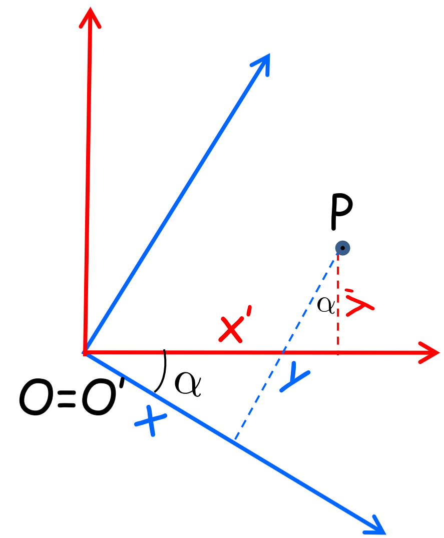
$$\sqrt{1+tg^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad tg^2\alpha = -\frac{v^2}{c^2} \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

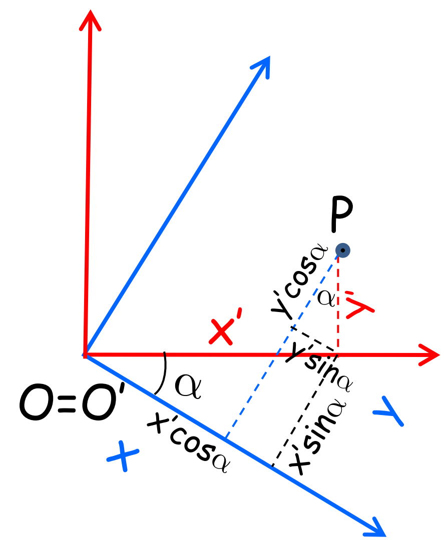
Infatti sostituendo ora *y', y, e tg* α nelle formule della rotazione ordinaria della pagina precedente otteniamo le espressioni

(14)
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' - ict'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \\ ict = \dfrac{ict' + x'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

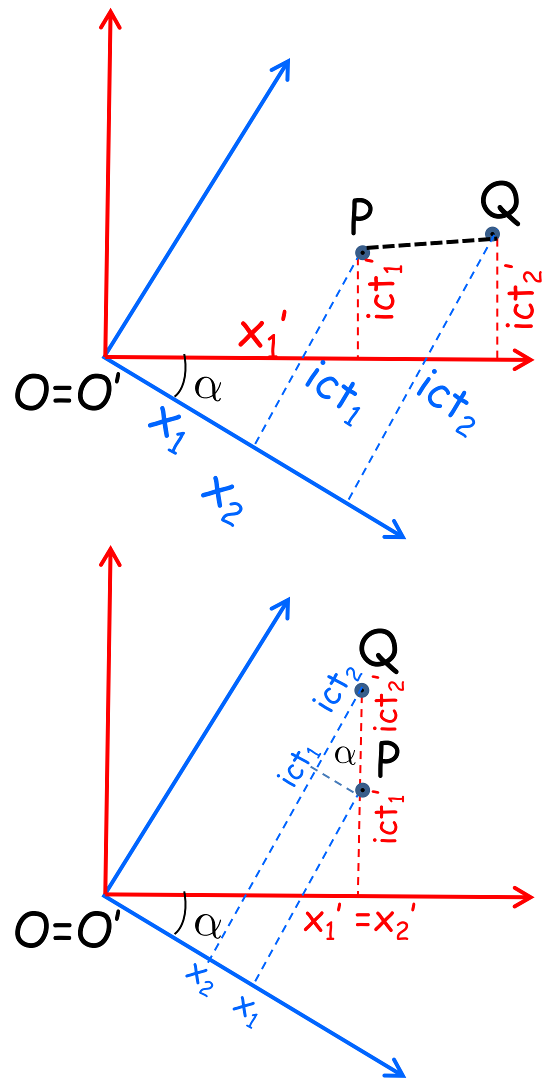
perfettamente coincidenti con le trasformazioni di Lorentz per le coordinate ***x*** *e* ***t****!* Giungiamo allora alla conclusione che : **il passaggio da un riferimento inerziale O' in moto traslatorio uniforme con velocità v lungo l'asse delle x ad un riferimento fisso O (trasformazione di Lorentz) è formalmente identica ad una rotazione oraria piana nello spazio di Minkowsky degli assi x' e ict' di un angolo tale che**

(15)
$$\boxed{tg\alpha = i\frac{v}{c}}$$





Questo significa che è possibile costruire una trasformazione di Lorentz ruotando due assi x’ e ict’ di un certo angolo orario α tale che ***tgα=i v/c*** (si noti che essendo un asse immaginario le tangenti degli angoli, rapporti di ordinate ed ascisse, sono immaginarie).



❑ Distanza spaziotemporale

Dati due eventi fisici ***P*** e ***Q***, la trasformazione di Lorentz (rotazione) lascia invariata la distanza degli eventi

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \Delta y' = ic\Delta t' \qquad \Delta y = ic\Delta t$$

sostituendo otteniamo

$$\Delta x'^2 + (ic\Delta t')^2 = \Delta x^2 + (ic\Delta t)^2 \qquad \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2$$

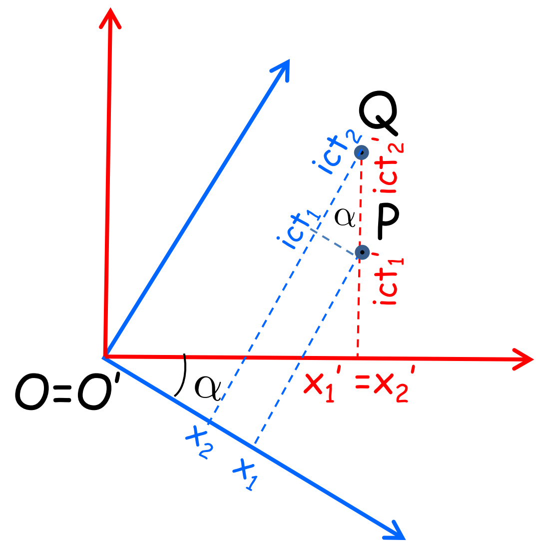
la quale mostra che **<u>l’invarianza della distanza spaziotemporale tra due eventi in seguito ad una trasformazione di Lorentz viene interpretata come invarianza della distanza pitagorica nello spazio di Minkowsky a seguito della rotazione corrispondente.</u>**

Si noti che, come caso particolare, si ottiene immediatamente che se P e Q coincidono per O’ allora coincidono anche per O da cui l’affermazione che *se due eventi coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora devono coincidere per ogni altro.*

❑ Dilatazione del tempo

Consideriamo *l'orologio luminoso* con il cammino di andata e ritorno del raggio lungo l'asse ***y'*** del riferimento ***O'*** analizzato a suo tempo. La partenza e l'arrivo del raggio luminoso in ***O'*** corrispondono a due eventi con la stessa ascissa ***x'*** e diversa ordinata ***ict'*** (vedi figura).

La trasformazione di Lorentz (rotazione del riferimento) fa si che l'osservatore O veda invece due eventi con un certo intervallo spaziale $\boldsymbol{x_2\text{-}x_1}$ (che ***O'*** non osserva) e soprattutto un diverso intervallo temporale $\boldsymbol{t_2\text{-}t_1}$ (dilatazione del tempo). Per quanto riguarda quest'ultimo si ha



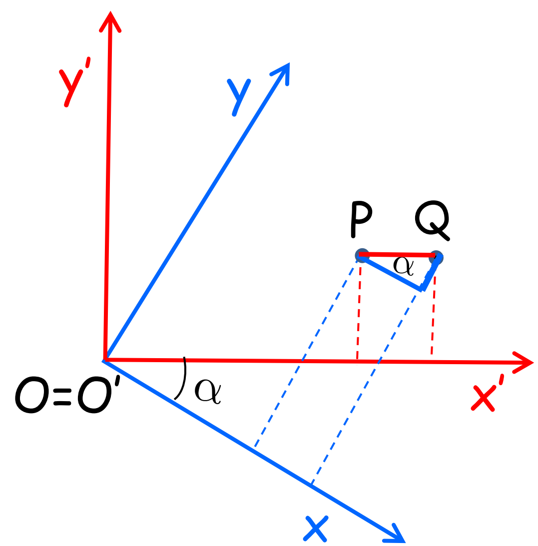
$$\Delta y = \Delta y' \cos\alpha \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad \Delta y' = ic\Delta t' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = ic\Delta t' / \sqrt{1+tg^2\alpha} = ic\Delta t' / \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

❑ Relatività della simultaneità

Gli eventi ***P*** e ***Q***, in posizioni diverse, appaiono simultanei a ***O'*** ma non ad ***O*** (relatività della simultaneità). Dalla geometria si ha facilmente che



$$\Delta y = \Delta x' \sin\alpha \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = \Delta x' \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \Delta x' \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

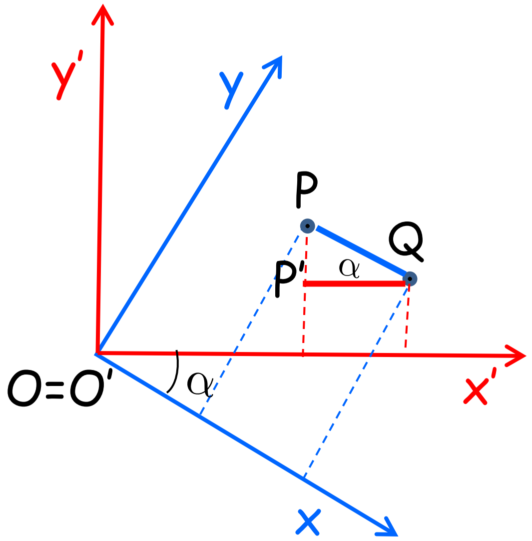
da cui la desincronizzazione

$$\boxed{\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

❑ Contrazione delle lunghezze

Data una lunghezza in quiete nel riferimento ***O'***, l'osservatore in moto ***O*** misura una lunghezza pari alla distanza di due suoi osservatori che vedono gli estremi nello stesso istante, dunque la distanza dei punti ***P*** e **Q**. L'osservatore ***O'*** invece misura la distanza dei punti ***P'*** e **Q**. Abbiamo allora

$$\Delta x \cos\alpha = \Delta x' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$



da cui la formula della contrazione delle lunghezze

$$\boxed{\Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Alcuni commenti

Spesso si dice che con la teoria della relatività tutto diventa relativo. Nulla di più sbagliato!

La teoria della relatività afferma che certe grandezze che nella fisica classica si pensava fossero assolute sono in realtà relative ma che esistono nuove grandezze fisiche, ignote alla fisica classica, che invece sono assolute. In un certo senso ***la teoria della relatività rende relative le vecchie grandezze fisiche ma ne introduce di nuove che sono assolute.***

Questo fatto è in se evidente se riassumiamo le principali conclusioni cui siamo giunti analizzando le trasformazioni di Lorentz:

i) gli intervalli temporali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relativi ed aumentano con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *dilatazione dei tempi*);

ii) la simultaneità tra due eventi separati nello spazio dipende dall'osservatore inerziale, è dunque relativa ed il grado di dissincronia aumenta con la velocità dell'osservatore e con la distanza spaziale degli eventi stessi (*relatività della simultaneità*);

iii) le distanze spaziali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relative e diminuiscono con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *contrazione delle lunghezze*);

iv) la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque una grandezza assoluta;

v) le distanze spaziotemporali e le coincidenze spaziotemporali sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e sono dunque grandezze assolute;

vi) l'ordine temporale di eventi che possono essere connessi causalmente è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque assoluto.