La meccanica relativistica del punto materiale

Le leggi meccaniche, nel caso in cui le velocità dei corpi materiali sono piccole rispetto alla velocità della luce, non possono che essere quelle della meccanica newtoniana: nel suo ambito i successi nello spiegare i fatti sperimentali sono tali da non lasciare spazio a dubbi.

Per rendere più precisa questa osservazione è necessario introdurre il concetto di **riferimento proprio** **O'** che è ***il sistema di riferimento inerziale che all'istante t vede il corpo materiale fermo*** (dato che il corpo materiale in generale può accelerare è evidente che il riferimento ***O'*** può soddisfare questa condizione solo all'istante ***t*** e per questo viene a volte detto riferimento istantaneamente in quiete). Per quanto detto possiamo allora affermare che ***l'osservatore proprio verifica le leggi della meccanica newtoniana***.

Per capire quali siano, invece, le leggi meccaniche nel caso in cui la velocità del corpo materiale sia rilevante rispetto a quella della luce, si potrebbe pensare di assumere il punto di vista di un **riferimento relativistico** *ovvero di un* ***riferimento inerziale O che vede il riferimento O' in rapido moto,*** e di ottenere le leggi meccaniche valide per questo l'osservatore effettuando una trasformazione di Lorentz su ognuna delle grandezze che compaiono nelle leggi meccaniche newtoniane dell'osservatore proprio, giungendo così alla meccanica relativistica. Si può fare ! Ma sorgono alcuni problemi che devono essere superati.

Per cominciare a ragionare in termini concreti, immaginiamo che l'osservatore proprio newtoniano ***O'*** applichi il secondo principio della dinamica ad un certo corpo materiale di massa ***m'*** soggetto ad una forza ***F'***. Scriverà allora, lungo l'asse delle ***x'***, l'equazione seguente

$$F'_x = m'\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}x' \qquad (1)$$

dove gli apici ricordano che si tratta di grandezze fisiche misurate da ***O'***.

Sulla base di quanto detto, si potrebbe pensare di ottenere la formulazione relativistica di questa equazione effettuando una trasformazione di Lorentz sulle grandezze ***F'***$_x$ ***, m', dt'***, e ***x'.*** Premesso che non sappiamo come si trasformano ***F'***$_x$ ed ***m',*** è comunque chiaro che il numero di trasformazioni di Lorentz da effettuare nei due membri della equazione dovrebbe essere differente violando il principio di covarianza e con esso i postulati della teoria della relatività ristretta. Infatti, come è facile intuire, effettuando un diverso numero di trasformazioni di Lorentz nei due membri si determinerebbe un *cambiamento di forma* della equazione nel passaggio da O' ad O, in palese conflitto con il primo postulato il quale invece richiede che ***le equazioni delle leggi fisiche devono avere la stessa forma in tutti riferimenti inerziali.***

Riprendiamo allora l'equazione meccanica (1)

$$F'_x = m'\frac{d}{dt'}\frac{d}{dt'}x'$$

ed osserviamo subito che abbiamo buoni motivi per affermare che la forza ***F'**$_x$* si trasformi, nel passaggio da un riferimento all'altro, come ***Δx'*** (ricordiamo infatti che la forza altro non è che l'azione sviluppata da un dinamometro compresso o allungato disposto, ad un certo istante, tra due punti dello spazio ***P*** e ***Q***). Trasformandosi la forza come ***Δx'***, il membro di sinistra porta con se una trasformazione di Lorentz per cui la stessa cosa deve fare il membro di destra. Dato che la posizione **x'** del corpo materiale porta con se una trasformazione di Lorentz dobbiamo concludere che le grandezze ***m'*** e ***dt'*** non devono essere trasformate rimanendo quelle del riferimento proprio per ogni osservatore inerziale ***O***.

Dunque, affinché sia soddisfatto il principio di covarianza è necessario che ***la massa del corpo materiale e l'intervallo temporale che compaiono nella equazione del secondo principio della dinamica vengano misurate sempre nel riferimento proprio***.

Dato che la massa e il tempo nel riferimento proprio si chiamano solitamente ***massa a riposo*** e ***tempo proprio*** e si indicano con $\boldsymbol{m_0}$ e τ, la (1) prende allora la forma seguente

$$F'_x = m_0\frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}x'$$

Eseguendo su questa equazione una trasformazione di Lorentz, possiamo ottenere la seguente espressione valida nel riferimento relativistico (si noti che l'unica differenza consiste nel fatto che spariscono gli apici)

$$F_x = m_0\frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}x$$

da cui consegue **l'espressione vettoriale relativistica del secondo principio della dinamica in forma covariante**

$$\boxed{\vec{F} = m_0\frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\vec{x}} \qquad (2)$$

la forza eguaglia il prodotto della massa a riposo per la derivata seconda rispetto al tempo proprio della posizione.

Il principio di covarianza ci ha condotti dunque ad una espressione dove compaiono grandezze fisiche misurate in riferimenti diversi, masse e tempi nel riferimento proprio, forze e posizioni in quello del generico osservatore O. Proprio perché dedotta dal principio di covarianza tale espressione ha il vantaggio di rendere esplicite le proprietà di trasformazione ma è scomoda da usarsi per l'osservatore O che preferirebbe certamente servirsi solo di grandezze fisiche misurate nel suo sistema di riferimento. Non è difficile ottenere questo risultato.

❑ Il secondo principio della dinamica nelle variabili dello stesso riferimento inerziale. La quantità di moto relativistica.

La scrittura covariante del secondo principio della dinamica fornisce la legge nella sua forma più semplice ed ha per questo il pregio della chiarezza. Per esplorare però il contenuto fisico della legge relativistica risulta assai utile scriverla in uno specifico riferimento ovvero per mezzo delle variabili di un determinato osservatore. Uno sguardo alla (2) è sufficiente per capire che quello che dobbiamo fare è semplicemente trasformare l'intervallo di tempo proprio nell'intervallo di tempo misurato dall'osservatore nel riferimento prescelto. Dalla legge di trasformazione degli intervalli abbiamo

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui la relazione

$$d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2}\, dt$$

che sostituita nella (2) fornisce

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\vec{x} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Si noti ora che la quantità sotto il segno di derivata, nel limite delle basse velocità, fornisce l'espressione newtoniana della quantità di moto

$$\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0\vec{v}\,(1+\frac{1}{2}v^2/c^2) \approx m_0\vec{v}$$

un fatto che suggerisce di identificarla con **<u>l'espressione relativistica della quantità di moto</u>**

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \qquad (4)$$

Volendo scrivere il secondo principio nella forma in cui al secondo membro compare la derivata temporale della quantità di moto, si deve riportare la radice accanto alla forza ottenendo l'espressione seguente

$$\boxed{\vec{F}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \qquad (5)$$

che può essere considerata una utile **espressione del secondo principio della dinamica in funzione della quantità di moto nelle variabili dello stesso osservatore inerziale** del tutto equivalente alla (2).

❑ La potenza della forza. Energia totale, energia cinetica ed energia a riposo.

Nei precedenti paragrafi abbiamo costruito l'espressione relativistica del secondo principio della dinamica ed anche ottenuto l'espressione relativistica della quantità di moto. Vogliamo ora trovare l'espressione relativistica della energia cinetica, come si fa? Per capirlo conviene richiamare il

procedimento seguito nella meccanica classica : si deve calcolare il lavoro eseguito nell'unità di tempo dalla forza applicata al corpo materiale, ovvero la quantità

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z$$

calcolando, ad esempio, il primo termine troviamo

$$F_x\, v_x = ma_x\, v_x = m\frac{dv_x}{dt}v_x = m\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_x^2) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2)$$

sommando, poi, tutti termini otteniamo

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

da cui si ricava che il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una quantità detta **energia cinetica**

$$W = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) \qquad\qquad T = \frac{1}{2}mv^2$$

Per trovare l'espressione relativistica opereremo nello stesso modo tenendo conto, ovviamente, della espressione relativistica del secondo principio della dinamica.

Abbiamo allora

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z \qquad (1)$$

dove la componente x della forza può essere ottenuta dalla espressione relativistica del secondo principio della dinamica

$$\vec{F}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad F_x\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad F_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Calcoliamo allora il primo termine della (1), otteniamo

$$v_x F_x = v_x \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x\right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x^2\right)$$

dato che il secondo ed il terzo termine della (1) possono essere ottenuti sostituendo il pedice x con y e z rispettivamente, possiamo scrivere la seguente espressione della potenza della forza

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z =$$

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x^2\right) + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_y\frac{dv_y}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_y^2\right) + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_z\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_z^2\right) =$$

$$= \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left((v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}) + \frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v\frac{dv}{dt} + \frac{\frac{v^3}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right) = \frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{(1-v^2/c^2)}\right) =$$

$$= \frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2}$$

Riscriviamo il risultato appena ottenuto

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z = \frac{m_0 v \dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2} \qquad (1)$$

ed osserviamo che vale la seguente espressione

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = (-\frac{1}{2})\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}(-2\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}) = \frac{\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

che permette di riscrivere la (1) nel modo seguente

$$W = \frac{m_0 v \dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v\dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene finalmente che **il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una grandezza fisica E_{rel}** che provvisoriamente chiameremo *energia relativistica*

$$\boxed{W = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}})} \qquad E_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (2)$$

Notiamo subito che tale energia relativistica ha lo stesso ruolo della energia cinetica classica (nel senso che la sua derivata fornisce la potenza della forza) ma non coincide con essa. Infatti, **a differenza della energia cinetica classica, assume un valore non nullo anche quando il corpo materiale è fermo.**

Come possiamo interpretare questa energia relativistica? Ricordando che la meccanica relativistica deve ridursi alla meccanica classica alle basse velocità, possiamo pensare di avere un qualche suggerimento considerando il significato assunto da tale energia relativistica nel caso in cui ***v<<c.*** Abbiamo allora

$$E_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \frac{m_0 c^2}{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad (3)$$

Dunque, alle basse velocità $\boldsymbol{E_{rel}}$ è dato dalla somma della energia cinetica classica e del termine $\boldsymbol{m_0c^2}$. Ora si noti che $\boldsymbol{m_0c^2}$ è proprio il valore che assume $\boldsymbol{E_{rel}}$ nel caso in cui il corpo materiale sia fermo per cui tale termine può essere chiamato **energia a riposo** $\boldsymbol{E_0}$

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2} \qquad (4)$$

Con questa definizione dalla (3) otteniamo

$$E_{rel} \simeq E_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

una espressione che mostra che, **alle basse velocità, l'energia relativistica è la somma della energia a riposo e della energia cinetica classica.** Tale fatto suggerisce di definire **energia totale** $\boldsymbol{E_T}$ l'energia relativistica E_{rel} in quanto somma della energia a riposo e della energia cinetica classica

$$\boxed{E_T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad (5)$$

Inoltre suggerisce anche di estendere tale concetto al caso generale di velocità qualunque, ovvero di pensare sempre l'energia totale come somma della energia a riposo e della energia cinetica. Si ottiene così la seguente relazione che definisce l'**energia cinetica relativistica**

$$\boxed{E_T = E_0 + E_c} \qquad (6)$$

da cui si può ricavare l'espressione

$$\boxed{E_c = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2\right)} \qquad (7)$$

NOTA: nel caso v<<c tale espressione conduce alla energia cinetica classica

❑L’inerzia della energia

Prima di commentare alcune delle conseguenze fisiche contenute nelle formule ottenute nei precedenti paragrafi riassumiamole. Una prima rilevante novità della meccanica relativistica riguarda l’espressione della **quantità di moto**

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

alla quale dobbiamo aggiungere l’introduzione di due concetti che non hanno riferimento nella meccanica classica ovvero **l’energia totale** e **l’energia a riposo**

$$E_T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m_0 c^2 + \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - m_0 c^2\right) = E_0 + E_c$$

Consideriamo i seguenti passaggi

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1}{c^2} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \vec{v}$$

da cui otteniamo la **quantità di moto relativistica in funzione della energia totale**

(1)
$$\vec{p} = \frac{E_T}{c^2} \vec{v}$$

Ora possiamo tenere conto che l’energia totale può essere espressa attraverso l’energia cinetica e a riposo

$$\vec{p} = \left(\frac{E_C}{c^2} + m_0\right) \vec{v}$$

L'espressione

$$\vec{p} = (\frac{E_c}{c^2} + m_0)\vec{v}$$

mostra che la differenza tra l'espressione relativistica della quantità di moto e quella classica $\boldsymbol{m_0 v}$ risiede nel termine **E_c/c^2** che si aggiunge alla massa a riposo (e che coincide con la massa inerziale classica). In altre parole **si potrebbe pensare di ottenere l'espressione relativistica della quantità di moto semplicemente aggiungendo alla massa inerziale del corpo materiale una massa inerziale addizionale dovuta alla sua energia cinetica E_c** secondo la relazione

(1)
$$M = E_c / c^2$$

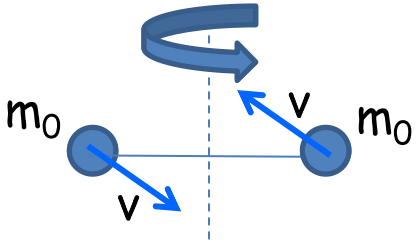
Detto in parole ancora diverse **secondo la teoria della relatività ristretta l'energia cinetica di un corpo materiale contribuisce alla sua massa inerziale** con un termine dato dal quoziente tra l'energia cinetica ed il quadrato della velocità della luce.

Questo fatto può essere ulteriormente chiarito dal seguente esempio. Immaginiamo di avere due corpi materiali di massa a riposo m_0 uniti da una sottile asticella di massa trascurabile. Nel caso in cui il dispositivo è fermo la massa vale semplicemente

$$m = 2m_0$$

Se ora poniamo in rotazione il dispositivo attorno all'asse, le due masse si muoveranno con velocità v dipendente dalla rapidità della rotazione. Ognuna acquisisce anche una energia cinetica Ec e con essa una massa addizionale. Si ha allora che la massa complessiva del dispositivo in moto vale

$$m = 2m_0 + 2\frac{E_c}{c^2}$$



Qualora mettessimo il dispositivo sulla bilancia dovremmo constatare un aumento di massa e dunque **la rivoluzionaria conclusione che l'energia, ovvero il movimento, ha un peso**! Da un punto di vista generale, il processo fisico che mette in movimento il dispositivo è un processo che richiede energia e che ne determina un aumento della massa per cui si configura come una **conversione di energia cinetica in massa inerziale** mentre il processo contrario che portasse il dispositivo nuovamente in quiete si configurerebbe come una **conversione di massa inerziale in energia cinetica**. Dunque **<u>è possibile convertire energia cinetica in massa e massa in energia cinetica</u>** secondo la formula (1).

Ci si può domandare se tale interconvertibilità possa essere estesa ad ogni forma di energia. Accenniamo allora la fatto che qualora il corpo materiale fosse soggetto a forze conservative otterremo una espressione della energia totale data da

$$E_T = E_0 + T_{rel} + V$$

che sostituita nella (1) fornisce

$$\vec{p} = \frac{E_T}{c^2}\vec{v} = \frac{(E_0 + E_c + V)}{c^2}\vec{v} = (\frac{E_c}{c^2} + \frac{V}{c^2} + m_0)\vec{v}$$

Anche in questo caso la differenza tra l'espressione relativistica della quantità di moto e quella classica $\boldsymbol{m_0 v}$ risiede nei termini $\mathbf{E_c/c^2}$ e $\mathbf{V/c^2}$ che si aggiungono alla massa a riposo (e che coincide con la massa inerziale classica) per cui possiamo concludere che secondo la teoria della relatività ristretta non solo l'energia cinetica ma **anche l'energia potenziale di un corpo materiale contribuisce alla sua massa inerziale**. Si tratta di un risultato che può essere dimostrato in modo del tutto generale per concludiamo che **qualunque forma di energia contribuisce alla massa** con un contributo pari a

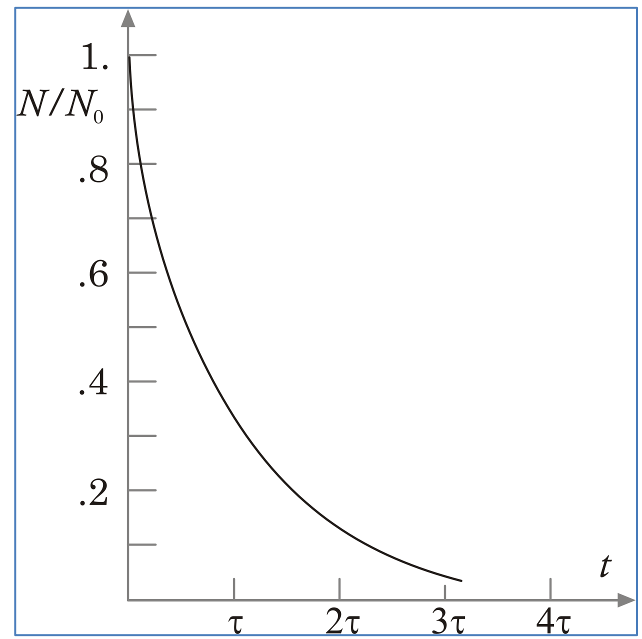
$$M = E / c^2$$

Vale la pena sottolineare che la lettura in senso inverso di questa relazione, ovvero la conversione di massa in energia, non è in alcun modo precisata dalla teoria della relatività ristretta. La frazione di massa che può essere convertita in energia dipende in generale dalle proprietà del sistema. Ad esempio la massa a riposo di una particella fondamentale (cioè non composta di altre particelle) e stabile (posto che esistano) non può essere convertita in energia. Nel caso invece di un sistema composto di particelle è presumibile che la quota di massa derivante dalla energia dei suoi costituenti possa essere più o meno facilmente trasformata in energia attraverso una qualche reazione. La successiva trasformazione in energia delle masse dei costituenti dipende dalla loro stabilità e non è detto che sia possibile.

Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con particelle elementari
il flusso di muoni a terra

Legge del decadimento (τ è la 'vita media' della particella)

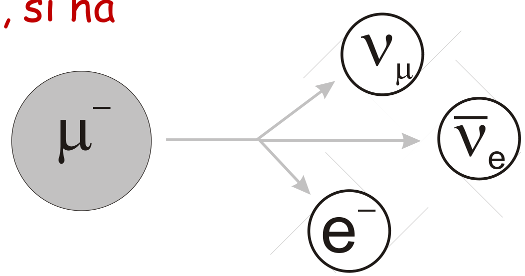
$$N(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Si noti che dopo *τ* si ha N(t) = $N_0/2.72$
dopo *2τ* si ha N(t)=$N_0/2,72^2=N_0/7,4$... etc. etc.

Nel caso dei muoni, prodotti nella interazione fra raggi cosmici e atmosfera, si ha

$$\tau \approx 2,2\mu s$$



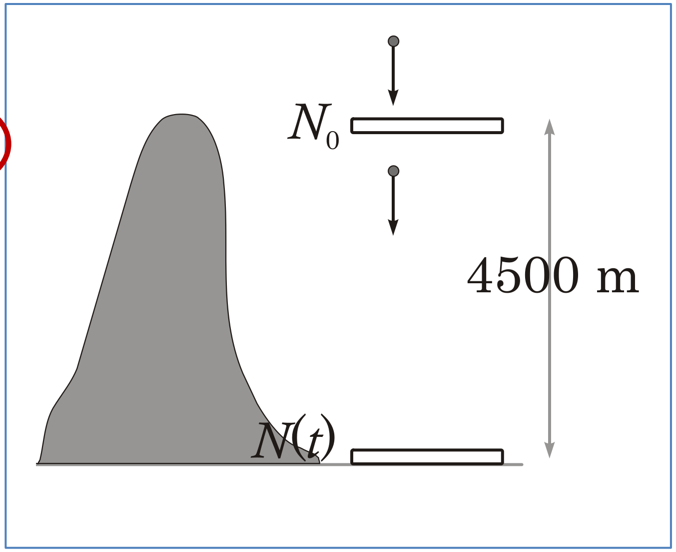
Supponiamo di avere nell'alta atmosfera a *4500 m* di quota, un flusso *1000* muoni all'ora. Il tempo necessario per arrivare a terra vale allora

$$\Delta t = \frac{4500}{0,995 \cdot c} \cong 15\mu s$$

Assumendo la **fisica classica,** il flusso di muoni a terra dovrebbe valere

$$N_{class}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{2,2}} \approx 10^3 \times 10^{-3} \approx 1$$

ogni ora.



Assumendo invece la **fisica relativistica,** si deve tenere conto del fenomeno della *dilatazione dei tempi* che allunga la vita dei muoni per l'osservatore a terra

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.2}{\sqrt{1-(\frac{0,995c}{c})^2}} \approx 2.2 \times 10 = 22\ \mu s$$

si ha allora per il flusso osservato a terra

$$N_{rel}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau'}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{22}} \approx 10^3 \times 0.5 \approx 500$$

ogni ora.

I risultati sperimentali confermano in pieno la seconda previsione.

Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con particelle elementari
il flusso di muoni in un acceleratore

Nature **268**, 301-305 (28 July 1977)

Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit

J. Bailey[1], K. Borer[2], F. Combley[3], H. Drumm[4], F. Krienen[5], F. Lange[6], E. Picasso[7], W. von Ruden[8], F. J. M. Farley[9], J. H. Field[10], W. Flegel[11] & P. M. Hattersley[12]

1. [1]Daresbury Laboratory, Warrington, Lancashire, UK
2. [2]Physikalisches Institut, Universität Beon, Bern, Switzerland
3. [3]Department of Physics, University of Sheffield, Sheffield, UK
4. [4]European Organization for Nuclear Research, Geneva
5. [5]European Organization for Nuclear Research, Geneva
6. [6]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
7. [7]European Organization for Nuclear Research, Geneva
8. [8]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
9. [9]Royal Military College of Science, Shrivenham, Wiltshire, UK
10. [10]European Organization for Nuclear Research, Geneva
11. [11]European Organization for Nuclear Research, Geneva
12. [12]Department of Physics, University of Birmingham, Birmingham, UK

The lifetimes of both positive and negative relativistic (γ = 29.33) muons have been measured in the CERN Muon Storage Ring with the results τ^+ = 64.419 (58) μs, τ^- = 64.368 (29) μs The value for positive muons is in accordance with special relativity and the measured lifetime at rest: the Einstein time dilation factor agrees with experiment with a fractional error of 2×10^{-3} at 95% confidence. Assuming special relativity, the mean proper lifetime for μ^- is found to be τ_0^- = 2.1948(10) μs the most accurate value reported to date. The agreement of this value with previously measured values of τ_0^+ confirms CPT invariance for the weak interaction in muon decay.

▲ Top

In questo lavoro il fenomeno della dilatazione dei tempi è stato utilizzato per ricavare la vita media del muone

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{64.368}{29.33} \approx 2.1948\ \mu s$$

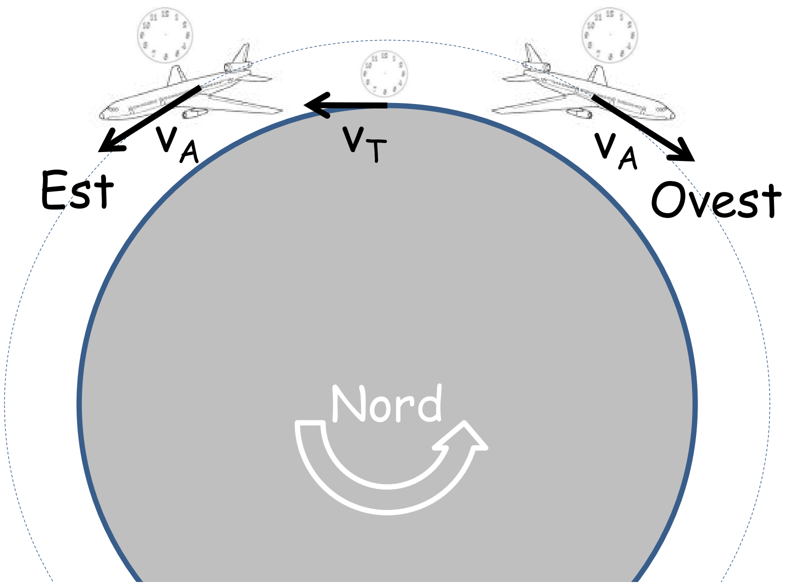
Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con orologi macroscopici

Nel 1971 J. Hafele e R. Keating eseguirono un esperimento per la verifica del fenomeno della dilatazione del tempo con *orologi macroscopici.*
Nel fenomeno misurato concorrono sia la *dilatazione del tempo di origine cinematica* della teoria della relatività ristretta che quella *di origine gravitazionale* della teoria della relatività generale. Esso è pertanto un *test* della fenomeno della dilatazione del tempo nella sua forma più generale.

Orologio a terra :
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T

Orologio Est:
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T+V_A

Orologio Ovest:
•dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
•dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T-V_A



	nanoseconds gained			
	predicted			measured
	gravitational (general relativity)	kinematic (special relativity)	total	
eastward	144±14	−184 ± 18	−40 ± 23	−59 ± 10
westward	179±18	96±10	275±21	273±7

Dalla Teoria della Relatività Ristretta alla Teoria della Relatività Generale

Con la formulazione della teoria della relatività ristretta si chiarisce a fondo l'interpretazione dell'elettromagnetismo. Prima di tutto l'assenza di un mezzo fisico ove si propagano le azioni elettriche e magnetiche ed il fatto cruciale che *la velocità della luce assume lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali*. Come nella meccanica, *vale il principio di relatività* e l'apparente contraddizione tra i due principi può essere risolta attraverso una profonda revisione dei concetti di spazio e tempo che comporta a sua volta una riformulazione delle leggi meccaniche e la previsione di nuovi inattesi fenomeni quali la equivalenza tra energia e massa inerziale. Sia pure al prezzo di una profonda rivoluzione possiamo comunque affermare che *dopo la formulazione della TRR meccanica ed elettromagnetismo venivano completamente riconciliate*.

Rimaneva allora, nella fisica, un ***grave problema irrisolto*** riguardante la *forza di gravitazione*, una delle forze fondamentali della natura, la cui teoria di riferimento risaliva a Newton (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, I. Newton 1687*). Per capire la natura del problema richiamiamo le principali conclusioni cui era pervenuta, invece, la teoria delle forze elettriche e magnetiche la cui formulazione definitiva fu fornita da Maxwell (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873).

Secondo la teoria di Maxwell, l'azione di una carica elettrica q_1 su di una carica elettrica q_2 distante nello spazio, non avviene direttamente ma, diciamo così, in due fasi differenti. La carica q_1 modifica lo spazio circostante creando un campo elettrico, ed è solo quando la carica q_2 viene immersa in questo campo che subisce l'azione elettrica. Non avviene dunque una azione a distanza tra le cariche ma una azione mediata dal campo. Lo stesso dicasi per le azioni magnetiche, che la teoria maxwelliana riconduceva al movimento delle cariche elettriche, e che si propaga nello spazio per mezzo del campo magnetico. Le equazioni di Maxwell precisavano, poi, tutti i dettagli di questi campi compreso ovviamente il ritardo dell'azione su q_2 da parte di q_1 dovuto al tempo necessario all'azione per propagarsi.

Nulla di tutto questo è presente nella teoria newtoniana. Miracolosa quando fu formulata alla fine del '600, la teoria non teneva conto delle recenti conquiste maxwelliane , *fondata com'era sul concetto di un'azione istantanea tra le masse distanti, andava riformulata*. Già Maxwell tentò di affrontare il problema formulando una teoria della gravitazione sulla falsariga di quella elettromagnetica ma sottili difficoltà gli impedirono di avere successo.

Teoria della relatività generale:
il principio di equivalenza

Einstein affrontò il problema da una prospettiva completamente nuova, assai distante dall'esempio dell'elettromagnetismo. Un primo passo cruciale fu quello di porre l'attenzione su un fatto noto già a Galileo, ovvero che *i corpi materiali in seguito all'azione gravitazionale acquisiscono tutti la stessa accelerazione*. Questo fatto, la cui origine risiede nella *rigorosa proporzionalità tra massa inerziale e massa gravitazionale,* che la teoria newtoniana assume senza spiegare, ha una conseguenza molto rilevante.

Per capirla immaginiamo che un osservatore ed un certo numero di corpi materiali si trovino in quiete relativa all'interno di una cabina nello spazio lontano da tutto e da tutti. Ad un certo istante si accendono i motori e la cabina comincia ad accelerare verso l'alto (rispetto al foglio) con una accelerazione ***a=g***. Dato che il moto accelerato è impresso alla cabina e non ai corpi questi rimangono in quiete anche se, rispetto alla cabina accelerano verso il basso con accelerazione ***a=-g***. Anche l'osservatore accelera verso il basso e quando arriva a toccare il pavimento della cabina ci si appoggia sostenendosi con le gambe mentre i corpi materiali accelerano verso il pavimento cadendovi sopra. *Per l'osservatore dentro la cabina tutto avviene come se, sotto il pavimento, invece dei motori ci fosse il pianeta terra che attrae gravitazionalmente tutti gli oggetti sopra di essa.* Questa identità tra le due situazioni è solo una curiosità priva di contenuto fisico o al contrario nasconde un profondo significato?
Come ricordato sopra *l'identità tra le due situazioni appoggia sulla proporzionalità rigorosa tra massa inerziale e gravitazionale.* Ora proprio in quegli anni, nel 1909, *L. Eotvos dimostrò con un esperimento di stupefacente precisione che massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali con una precisione di 1 su 100.000.000!* Un fatto simile non può essere casuale ed infatti Einstein pensò che non solo l'osservatore dentro la cabina ma ***<u>nessun esperimento può distinguere tra un moto accelerato della cabina rispetto alle stelle fisse o uno stato di quiete della stessa in un campo di gravità.</u>*** Questo fatto, che Einsten elevò a rango di principio, prende il nome di ***<u>principio di equivalenza</u>*** e rappresenta uno dei pilastri della futura teoria della gravitazione di Einstein

cabina accelerata rispetto alle stelle fisse

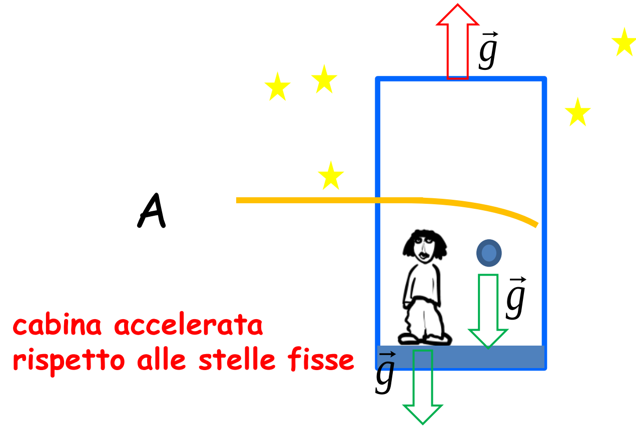
cabina in quiete in un campo gravitazionale

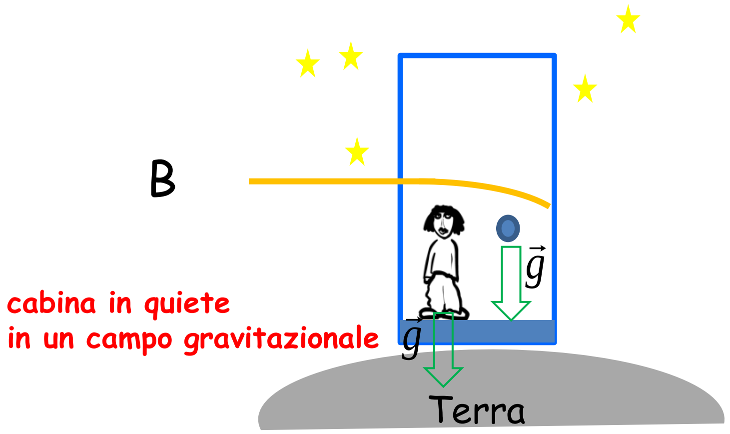
Un secondo passo altrettanto importante consiste nel riconoscere che la teoria della relatività ristretta permette di trasformare le misure eseguite in un riferimento inerziale O in quelle di un riferimento inerziale O' in moto relativo con velocità v, ma che se tale velocità invece che essere costante diventa variabile, si ottiene di fatto il passaggio da un riferimento inerziale O ad uno accelerato O'. Poiché quest'ultimo, sulla base del principio di equivalenza, è fisicamente identico ad un campo di gravità, si deduce che le trasformazioni di Lorentz con una velocità di traslazione variabile per mettono di calcolare gli effetti prodotti dai campi gravitazionali.

Per comprendere il valore preditivo del principio di equivalenza consideriamo i seguenti esempi.

Un osservatore si trova in una cabina accelerata rispetto alle stelle fisse. Ad un certo punto un raggio luminoso diretto parallelamente al pavimento entra nella cabina da un foro laterale attraversandola. Dato che la cabina accelera il raggio colpirà la parete di fronte in un punto più basso spostato vero il pavimento per cui, rispetto alla cabina, il raggio ha subito una deflessione verso il basso (A).
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, le cose andrebbero nello stesso modo se la cabina fosse ferma in campo di gravità. Dobbiamo allora concludere che ***la gravità può curvare la traiettoria della luce*** (B).

Questo effetto fu misurato per la prima volta nel 1919 da A. Eddington che osservò *la deflessione dei raggi stellari radenti la superficie del sole*. L'esperimento fu in seguito criticato ma l'effetto ebbe una conferma definitiva nel 1979 con la scoperta della prima *lente gravitazionale*.





Si consideri ora una piattaforma rotante con velocità angolare ω. Fissato in un certo punto della piattaforma si trova un osservatore O' con un orologio. Per l'osservatore fisso O, posto al centro della piattaforma, l'orologio si muove di moto circolare uniforme e dunque con una *velocità tangenziale* ***v=ωR*** ed una *accelerazione cen*tripeta **a=v²/R=ω²R**. L'osservatore solidale con l'orologio O' invece, rispetto al proprio riferimento, registrerà solo una *accelerazione centrifuga* con lo stesso valore **a=v²/R=ω²R** (A).

In questa situazione, la teoria della relatività ristretta ci informa che per l'osservatore fisso O, l'orologio di O' deve rallentare il suo ritmo poiché in movimento. In particolare deve essere

$$\Delta t_O = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}}$$

Ora sulla base del principio di equivalenza, l'osservatore O' è equivalente ad un osservatore fermo in un campo di gravità con accelerazione radiale uscente (centriguga) ***a=ω²R*** ovvero con una forza peso effettiva ***F=ma=mω²R*** (B).

Dato che spesso il campo gravitazionale viene caratterizzato dal suo potenziale definito come

$$\phi = -\int_a^b \frac{F}{m}ds + C = -\int_0^R \frac{m\omega^2 r}{m}dr = -\int_0^R \omega^2 r\, dr = -\frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

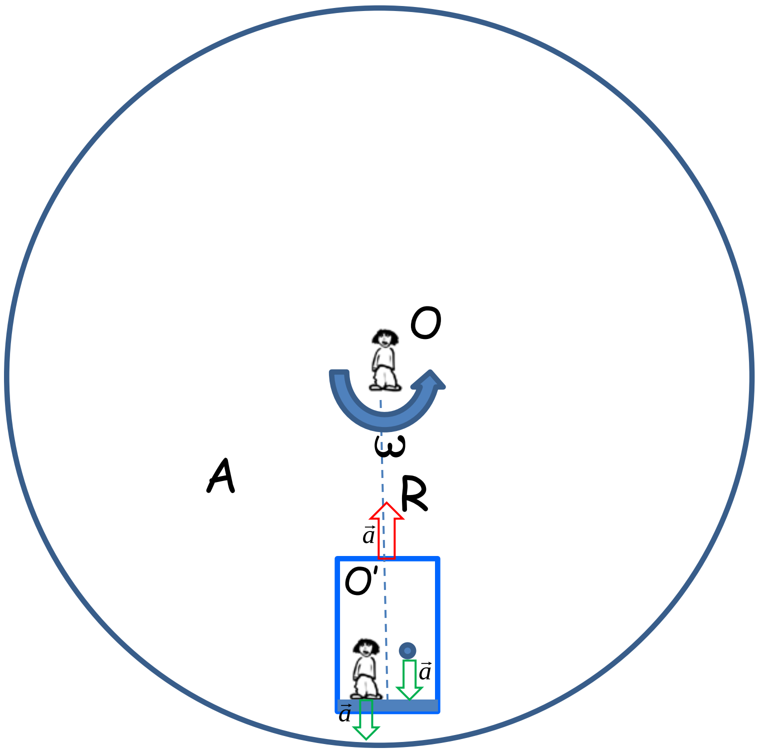
si ha anche

$$\omega^2 R^2 = -2\phi$$

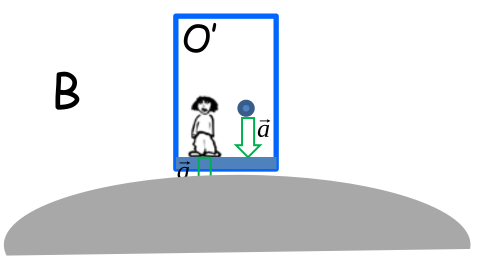
che sostituita fornisce la formula

$$\Delta t_O = \frac{\Delta\tau_{O'}}{\sqrt{1+2\phi/c^2}}$$

La quale afferma che ***la gravitazione dilata il tempo con un effetto tanto più intenso quanto maggiore risulta essere l'intensità del campo*** (ovvero quanto più negativo risulta essere il potenziale gravitazionale). Una conseguenza molto importante è che rallentando il tempo rallenta anche la frequenza di oscillazione della luce dunque il precedente effetto porta a concludere che ***la luce uscente da un campo di gravità sposta la sua frequenza verso valori più bassi*** (spostamento verso il rosso).



B



Red-shift gravitazionale : R. Pound e G. Rebka 1959 più numerosissime prove astronomiche.
Dilatazione del tempo gravitazionale: J. Hafele e R. keating 1971 più numerosissime prove dal sistema GPS.

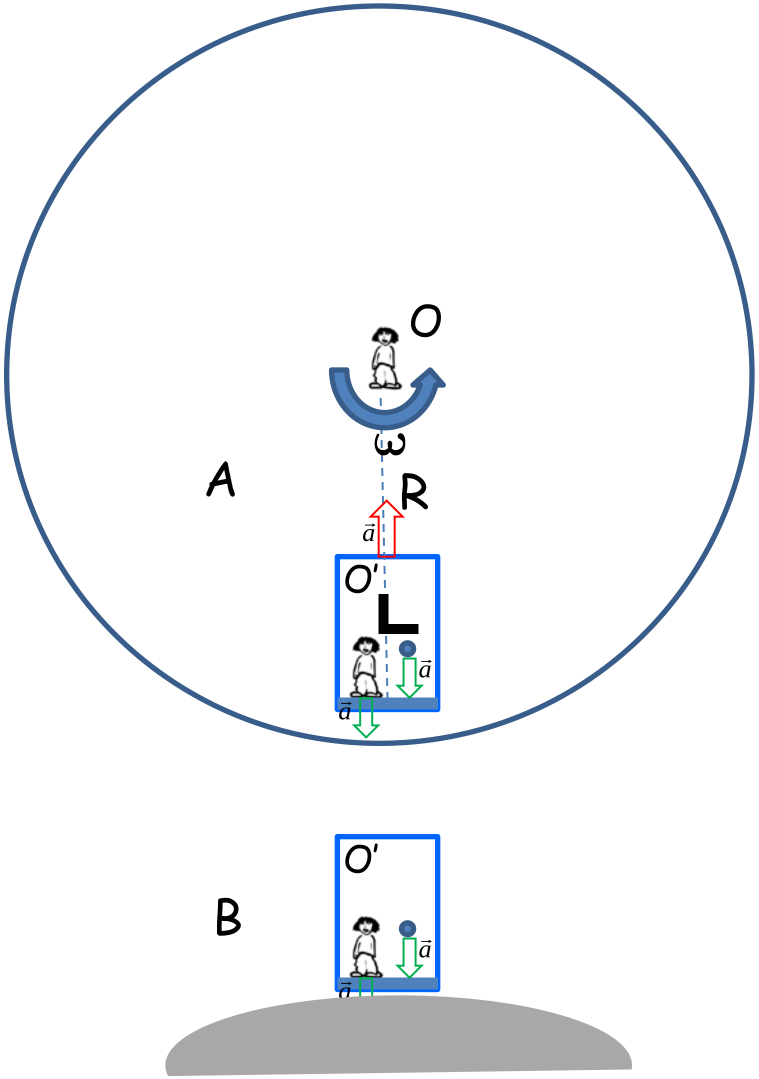
Dall'esempio precedente si può intuire un altro importante aspetto della teoria.
Immaginiamo che l'osservatore O' disponga due regoli di lunghezza L lungo le direzioni tangenti e radiali al moto che chiameremo L_T ed L_R rispettivamente.
L'osservatore fisso O giudicherà allora L_T disposto lungo la direzione del moto con velocità ***v=ωR*** e pertanto *soggetto al fenomeno della contrazione delle lunghezza* mentre giudicherà L_R perpendicolare alla direzione del moto e pertanto di *lunghezza inalterata.*
Accostando regoli rigidi tangenzialmente e radialmente, l'osservatore fisso O, può pensare allora di eseguire una misura della circonferenza e del raggio della traiettoria circolare di O'.
Per quanto riguarda il raggio, le precedenti considerazioni dicono che troverà il valore R che troverebbe in assenza di rotazione della piattaforma, mentre per quanto riguarda la circonferenza troverà il valore contratto dalla rotazione della piattaforma

$$C = 2\pi R\sqrt{1-v^2/c^2} = 2\pi R\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}$$

Dunque il rapporto circonferenza raggio misurato da O vale

$$\frac{C}{R} = 2\pi\sqrt{1-v^2/c^2} = 2\pi\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}$$

più piccolo di quello di un cerchio ordinario. Questo può accadere se il cerchio anziché essere tracciato su di un piano lo pensiamo tracciato su di superficie sferica. Li può infatti accade che il rapporto circonferenza raggio sia più piccolo di quello del piano. Dunque il moto della piattaforma ha in un certo senso curvato la geometria.
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza si avrebbe lo stesso effetto a piattaforma ferma ma con un campo di gravità. Concludiamo allora ***che la gravità determina una trasformazione della ordinaria geometria euclidea in una geometria dello spazio curvo (non euclidea).***

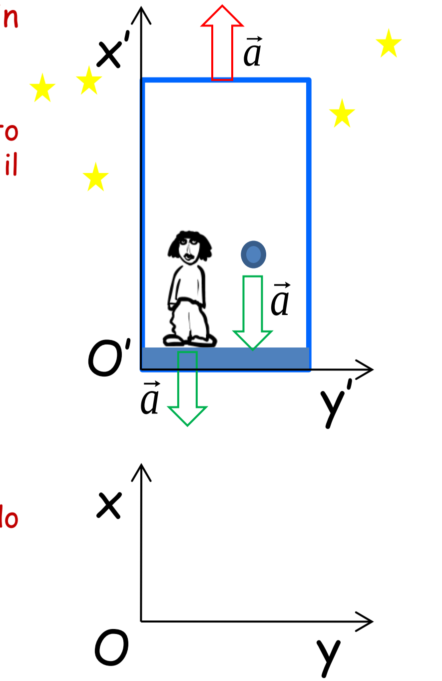


Teoria della relatività generale:
le equazioni del campo

L'intuizione che la gravità potesse modificare la geometria fu sviluppata da A. Einstein nel modo seguente.

Immaginiamo che l'osservatore mobile O' si muova non di moto a velocità costante v ma di moto accelerato uniforme a (vedi figura). Assumendo le trasformazioni di Galileo per semplicità il passaggio dalle variabili di O' a quelle di O è dato dalle formule

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} a t'^2 \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x = \Delta x' - a' \Delta t' \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x^2 = \Delta x'^2 + a'^2 \Delta t'^2 - 2a' \Delta x' \Delta t' \\ \Delta y^2 = \Delta y'^2 \\ \Delta z^2 = \Delta z'^2 \\ \Delta t^2 = \Delta t'^2 \end{cases}$$



Con queste possiamo costruire la distanza spaziotemporale tra due eventi secondo l'osservatore fisso O

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \\ &= \Delta x'^2 + a'^2 \Delta t'^2 - 2a' \Delta x' \Delta t' + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \\ &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a' \Delta x' \Delta t' + (a'^2 - c^2) \Delta t'^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene nelle variabili dell'osservatore accelerato O'

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a' \Delta x' \Delta t' + (a'^2 - c^2) \Delta t'^2$$

Se O' non fosse accelerato ma si fosse mosso con velocità costante, la TRR dice che avrebbe trovato semplicemente

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, possiamo affermare che l'osservatore O' è fisicamente equivalente ad osservatore fermo in un campo di gravità per cui possiamo affermare che la modifica della distanza spaziotemporale tra due eventi da

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

a

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2$$

è di fatto causata dalla gravità.

Giungiamo allora alla conclusione che da un punto di vista formale la gravità modifica l'espressione della distanza spaziotemporale degli eventi che acquisisce la forma generale seguente

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= g_{11}\Delta x'^2 + g_{12}\Delta x'\Delta y' + g_{13}\Delta x'\Delta z' + g_{14}\Delta x'\Delta t' + \\ &= g_{21}\Delta y'\Delta x' + g_{22}\Delta y'^2 + g_{23}\Delta y'\Delta z' + g_{24}\Delta y'\Delta t' + \\ &= g_{31}\Delta z'\Delta x' + g_{32}\Delta z'\Delta y' + g_{33}\Delta z'^2 + g_{34}\Delta z'\Delta t' + \\ &= g_{41}\Delta t'\Delta x' + g_{42}\Delta t'\Delta y' + g_{43}\Delta t'\Delta z' + g_{44}\Delta t'^2\end{aligned}$$

È evidente che in questa impostazione l'effetto della gravità è interamente descritto dai 16 coefficienti g_{jk} dipendenti in generale dalla posizione e dal tempo. Si può mostrare che non tutti sono indipendenti dato che deve essere per consistenza matematica $g_{jk}=g_{kj}$. In questo modo i coefficienti indi pendenti sono 10.

Dunque ***la gravitazione è formalmente descritta dai 10 coefficienti g_{jk} dipendenti dalla posizione e dal tempo che intervengono nella espressione della distanza spaziotemporale tra due eventi.***

Compreso questo fatto il compito principale della teoria della gravitazione sarà allora quello di definire in che modo, la causa fisica della gravitazione ovvero la massa gravitazionale, determina i coefficienti g_{jk} . Si tratta della parte più ardua della teoria poiché la massa gravitazionale, sulla base del principio di equivalenza, è indistinguibile da quella inerziale e quest'ultima, sulla base della teoria della relatività ristretta, è equivalente alla energia. Dunque la sorgente della gravita è in sostanza l'energia stessa. Einstein, in competizione con il matematico D. Hilbert, fu capace di scrivere un insieme di equazioni che fissano i coefficienti g_{jk} una volta data la distribuzione di massa-energia. Si tratta di equazioni non lineari la cui soluzione esatta è nota in un numero limitato di casi note come ***equazioni del campo di Einstein*** e che qui riportiamo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Con queste equazioni, qualora sia capaci di risolverle, può essere trattato qualunque problema di gravitazione.

Fine e…

un saluto ed un augurio a tutti voi