Lezioni sulla Teoria della Relatività Ristretta

Prof. Nicola Semprini Cesari

Ciclo di lezioni tenute in Aprile-Maggio 2016

presso il

Liceo G. Marconi di Pesaro

nell'ambito dei

Corsi di Fisica della Fondazione G. Occhialini

Un accenno alla storia della fisica

❑ I filosofi presocratici

Oggi pensiamo di scorgere i primordi della fisica nelle speculazioni dei primi filosofi, tra il 600 e 400 a.C, i presocratici. A loro dobbiamo anche l'origine della parola *fisica*, il cui etimo risale al greco antico φυσιζ (*physis*) che potremmo tradurre con *natura,* un termine usato per indicare quei filosofi che speculavano sulla *totalità delle cose esistenti*, *la natura* appunto. Nonostante il campo di indagine, i metodi e le finalità della moderna *fisica* siano assai diversi dal quelli dell'antica *physis*, entrambe condividono una impostazione centrata sulla razionalità: *con la* ***physis****, per la prima volta,* ***l'uomo cerca una interpretazione della realtà fondata esclusivamente sulla ragione:*** *un atto rivoluzionario, una istanza di libertà, forse il passo più decisivo che l'uomo abbia mai compiuto (vedi anche Congetture e confutazioni, Ritorno ai presocratici, K. Popper, Ed. Il Mulino).*

I pensatori più noti sono: **Talete** (Mileto 624-547 a.C.), **Anassimandro** (Mileto 610-546 a.C.), **Anassimene** (Mileto 586-528 a.C.) **Pitagora** (Samo 575-495 a.C.), **Senofane**, (Colofone 570-475 a.C.) **Eraclito** (Efeso 535-475 a.C.), **Parmenide** (Elea 515-450 a.C.), **Empedocle** (Agrigento, 490–430 a.C.) e… **Leucippo (**Mileto 480-420 a.C.) e **Democrito** (Abdera 460–360 a.C.).

Questi ultimi ponevano come fondamento del tutto *l'atomo (dal greco* ατομοζ*, indivisibile)*: ente indivisibile, animato da un moto inestinguibile, capace di aggregarsi in forme sempre nuove, così che la mutevolezza delle cose risultava essere il semplice riflesso della variabilità delle possibili aggregazioni di atomi i quali – invece - erano pensati eterni ed immutabili.

L'apparente paradosso della dualità del tutto, al tempo stesso mutevole ed in continua trasformazione (Eraclito), ma che la ragione scorgeva nel profondo immutabile ed eterno (Parmenide), veniva finalmente risolto.

In questo modo, soprattutto, si apriva la via ancora oggi seguita: ***partendo dalla enorme varietà dei fenomeni osservabili, e risalendo la catena delle cause e degli effetti, si perviene ai principi eterni ed immutabili che li governano*** ("l'atomismo di Democrito… ebbe una funzione determinante … per la formazione della scienza moderna", Geymonat).

Dopo Democrito, con Socrate e Platone, la speculazione si concentrò sull'uomo (etica, estetica etc. etc.) abbandonando la *physis*, soprattutto perché, come notò Aristotele, era giunta ad un vicolo cieco ed incapace di progredire. Oggi è chiaro che **il suo limite risiedeva nel suo essere fondata esclusivamente sulla speculazione, completamente deprivata dell'apporto dell'esperienza**.

❑ La scienza ellenistica

Le conquiste di Alessandro (Pella 356 – Babilonia 323 a.C.) aprirono la cultura essenzialmente speculativa dei greci verso il gusto empirico e tecnologico delle culture mesopotamiche (lavorazione dei metalli…).

Inoltre le necessità ed i problemi posti dalla gestione di un vasto impero chiarirono il legame esistente tra *conoscenza* e *potere* favorendo quel *processo di sintesi tra le attitudini speculative della physis e quelle empiriche delle culture asiatiche*: si sviluppò ***la scienza ellenistica, il punto più alto della scienza antica, insuperato per quasi 1500 anni.***

I nomi più rilevanti a noi noti sono:

Euclide (367-283 a.C.): autore degli *Elementi*: la più importante opera di geometria dell'antichità;

Ctesibio (300-200 a.C. ?): costruì macchine basate sulla pressione dell'aria e dell'acqua (pompe, orologi idraulici, pare l'organo) ed automi e congegni di varia natura;

Aristarco (310-230 a.C.) : formulò la teoria eliocentrica, cercò di misurare dimensioni e distanze del sole e della luna;

Eratostene (276-194 a.C.): oltre a numerose e notevoli osservazioni e misurazioni astronomiche, misurò con grande precisione (errore dell'1.5% circa) le dimensioni della terra;

Ipparco (190-120 a.C.): elaborò un metodo per la previsione delle eclissi solari, scoprì a precessione degli equinozi;

Erone (10-70 d.C.): si cimentò in macchine e congegni di vario tipo ispirandosi forse a Ctesibio

e sopratutti **Archimede** (87-212 a.C.) sommo matematico (lavori sul cerchio, spirale, parabola, conoidi e sferoidi, sfera e cilindro, stima di π, applicazione magistrale del metodo di esaustione per i problemi di analisi infinitesimale…), sommo fisico (ottica, fluidi, meccanica …), sommo ingegnere (planetario, macchine belliche…) ma soprattutto … ***anticipò il modo di ragionare, il metodo ed il rigore dei moderni scienziati.***

❑ Il declino della scienza ellenistica

Lo straordinario sviluppa della scienza ellenistica tra il 300 ed 100 a.C. fu seguito da un rapido declino. Le cause, molteplici e complesse, sono assai dibattute dagli storici e dagli storici della scienza (su questo ed altri aspetti della scienza antica vedi l'ottimo *La rivoluzione dimenticata, Lucio Russo, Feltrinelli).* Con un certo grado di approssimazione potremmo citare:

i) cause di ordine politico: le lunghe guerre di conquista di Roma a danno degli stati ellenistici minarono alla base le condizioni economiche, sociali e politiche necessarie per fare prosperare le arti e le attività speculative in genere (molte biblioteche furono distrutte o sottratte dai vincitori; intellettuali deportati in qualità di bibliotecari, copisti e istitutori presso ricche famiglie romane. Paradigmatico il destino della biblioteca di Alessandria: la più grande ed importante dell'antichità. Al momento della fondazione, avvenuta intorno al 200 a.C., contava circa 500.000 rotoli di pergamena molti dei quali in copia unica. Un nutrito gruppo di filologi e grammatici, annotava, commentava e conservava le opere. Eratostene e Aristarco furono tra i capi bibliotecari e tutti i grandi uomini di scienza vi trascorrevano periodi di studio .

ii) cause di ordine culturale: le condizioni politiche sfavorevoli non avrebbero segnato il destino della scienza ellenistica se i conquistatori, i romani, fossero stati capaci di impadronirsi anche dei suoi straordinari risultati. Lo impedirono in parte il diffondersi, in Roma, di dottrine filosofiche quali lo stoicismo e lo scetticismo (questa motivazione è poco convincente poiché queste si svilupparono in seno alla cultura ellenistica e li non impedirono lo sviluppo della scienza, come deve essere in una cultura aperta e dinamica) ma soprattutto la fondamentale natura *prescientifica* della cultura romana: anche i migliori trattatisti romani semplicemente non erano in grado di comprendere gli scritti dei maestri ellenistici (ad esempio Plinio non comprendeva le argomentazioni di Eratostene ne Vitruvio quelle di Archimede). Determinante fu poi la involuzione culturale determinata dalle prime fasi della affermazione e diffusione del cristianesimo, processo che capovolse i valori della cultura classica: *'et ecce sunt novissimi qui erunt primi, et sunt primi qui erunt novissimi (Luca)'* significò privilegiare la lingua volgare a danno di quella colta (ne derivò la fine del latino classico), le arti volgari a danno di quelle colte, il sapere volgare a danno del grande sapere accumulato nei secoli dai migliori pensatori, e *'Non oratorem, non senatorem sed piscatorem (Agostino)'* significò un sapere orientato ai più umili. Tali istanze, che forse valutate su altri piani rappresentano un messaggio di speranza, più che pregiudicarne l'esistenza, distruggevano alla base la sopravvivenza stessa delle conquiste della scienza antica.

❑ I rinascimenti della scienza ellenistica

Durante il lunghissimo periodo che seguì il declino della scienza ellenistica, in diversi momenti, per opera perlopiù di ristretti gruppi di studiosi, ci fu una ripresa dell'interesse verso di essa che però non si concretò in nuove scoperte e spesso nemmeno in una reale comprensione dei suoi risultati. Questi **rinascimenti**, così spesso si chiamano, si realizzarono ad esempio **in epoca imperiale nel corso del I secolo** con Plinio, Seneca e Vitruvio. **Dopo la caduta dell'impero, tra la fine del 400 ed il 550**, con Antemio di Tralle ed Isidoro di Mileto (architetti della basilica di S. Sofia a Costantinopoli), Simplicio, Giovanni Filopono ed Eutocio. Di grande rilevanza fu **il rinascimento islamico** che sul finire del 900 con Ibn Sahl e Ibn al-Haytham recupera molti risultati dell'ottica ellenistica; con Ibn Sina (Avicenna), depositario di un vastissimo sapere, ne conserva e diffonde le scoperte. Poi **in europa nel XII e XIII secolo:** in Sicilia, nella penisola iberica, a Parigi, a Oxford uomini come Ruggero Bacone traducono dall'arabo e dal greco e diffondono le opere degli antichi maestri.

La **svolta decisiva** di questo processo di recupero della scienza ellenistica, **ha inizio nella seconda metà del trecento** dove il rifiorire dell'interesse, che condurrà al **nostro rinascimento,** è dimostrato dall'intenso traffico di manoscritti greci da Costantinopoli verso l'Italia (ad esempio Giovanni Aurispa, un mercante, nel solo 1423 importa 238 manoscritti riguardanti l'idraulica, la prospettiva e ritrattistica pittorica, la

fusione di grandi opere in bronzo, la costruzione di strumenti musicali, ingranaggi, macchine pneumatiche, macchine belliche, automi, etc. etc.). Molti di questi lavori furono spesso semplicemente collezionati, nel migliore dei casi letti, quasi mai compresi davvero.

Tuttavia, interpretati dal genio di Leonardo (che tentò senza successo di studiare Archimede e che fu assai attratto da Erone come lui interessato a macchine e congegni) e dei numerosi architetti e uomini di scienza che operarono nel nostro rinascimento (tra i più eminenti Francesco di Giorgio Martini, di interessi simili a quelli di Leonardo), questi antichi manoscritti furono capaci di richiamare un interesse costante e duraturo verso la scienza antica.

Chiaro è il debito di **Copernico** verso Aristarco nella formulazione della teoria eliocentrica (pubblicato postumo nel 1543). Altrettanto chiaro quello di **Galileo (1564-1642),** che ebbe l'obiettivo esplicito di recuperare e far rivivere la scienza ellenistica. Si trovò a mal partito con le raffinate tecniche del calcolo infinitesimale di Archimede ma colse in profondità il significato del metodo dimostrativo e sperimentale degli antichi che applicò con successo. Poi **Keplero (1572-1630),** che appoggiandosi al genio osservativo di Tycho Brahe (1546-1601), e con argomentazioni non sempre lineari che riflettevano la sua vasta ed eclettica conoscenza degli antichi, comprese le leggi del moto planetario. Fino a giungere a **Newton (1643-1727)** la cui meccanica affonda le radici non solo nella antica scienza ellenistica (Archimede ed Apollonio) ma anche nel pensiero di Aristotele e che tuttavia seppe distaccarsene creando la prima moderna teoria fisica capace di fare previsioni e di superare per la prima volta i traguardi dei maestri antichi.

❑ La Fisica Classica

Il primo punto fermo della fisica contemporanea fu raggiunto da I. Newton con la creazione della **Meccanica** dove codificò **le leggi generali che governano il moto dei corpi materiali** (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687*).

All'interno della meccanica, Newton, per primo, riconobbe anche l'esistenza di una delle forze naturali (forze che si esercitano tra corpi materiali separati nello spazio), **la forza di gravitazione universale**, che descrisse con la ben nota formula.

Sia le leggi meccaniche che la teoria della gravitazione universale sono inserite nel quadro di una concezione dello **spazio e del tempo assoluti**, ampiamente discussi da Newton, la quale sorreggerà tutta la fisica fino alla creazione della teoria della relatività ristretta agli inizi '900.

Gli sviluppi successivi seguirono due differenti direttrici. Da un lato J.L. Lagrange (1788) e W.R. Hamilton (1833) svilupparono nuove formulazioni della meccanica (**meccanica analitica**) più adatte alla trattazione di problemi complessi quali, ad esempio, lo studio dettagliato del moto planetario che raggiunse, nell'800, un alto grado di raffinatezza.

Dall'altro, C.A. Coulomb (1736-1806), H.C. Ørsted (1777-1851), A.M. Ampère (1775–1836), M. Faraday (1791-1867) studiarono a fondo **le proprietà delle forze elettriche e magnetiche** riconoscendone il profondo legame e ponendo le basi per la grande sintesi operata dalla teoria dell'**Elettromagnetismo** di J.C. Maxwell (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873).

La teoria maxwelliana era fondata sul **concetto di campo**, l'unico modello delle forze natura di cui, ancor oggi, disponiamo. Un suo grande successo fu quello di riconoscere nella luce un fenomeno elettromagnetico riducendo **l'ottica**, una parte della fisica fino ad allora autonoma, ad un capitolo dell'elettromagnetismo.

Una terza linea di indagine riguardò lo studio delle proprietà termiche dei corpi materiali. Passi fondamentali in questo senso furono compiuti da S. Carnot (*Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, 1824), J.R. von Mayer (1814–1878), J.P. Joule (1818–1889); W. Thompson Baron Kelvin (1824–1907) e R.J. Clausius (1822–1888). Si giunse in questo modo a fondare la **Termodinamica** capace di descrivere gli scambi di calore tra i corpi materiali.

La meccanica con le sue leggi del moto dei corpi; la teoria della gravitazione universale per la descrizione della forza di gravitazione; dell'elettromagnetismo per la descrizione delle forze elettriche e magnetiche; la termodinamica per la descrizione degli scambi di calore tra corpi materiali; tutte queste costituivano il nucleo della cosiddetta **fisica classica** un formidabile **corpo di teorie capace di spiegare tutti i fenomeni macroscopici noti**.

Sul finire dell'800 questo insieme di teorie entrò gradualmente in crisi, su problemi apparentemente marginali ma che invece furono risolti solo al prezzo di revisioni radicali dei concetti portanti della fisica classica. Le nuove teorie, elaborate nel corso dei primi 50 anni del '900, segnarono una linea di frattura e condussero ad una nuova fase della storia della fisica solitamente indicata con fisica moderna.

❑ Fisica Classica e Fisica Moderna

Spesso si divide il complesso delle attuali conoscenze in fisica in due grandi aree indicate con le espressioni di ***fisica classica*** e ***fisica moderna***. Per quanto approssimata, tale suddivisione risulta legittima da diversi punti di vista.

In primo luogo riflette la tradizionale ripartizione degli studi: i fondamenti della ***Fisica Classica*** – organizzati nelle teorie della ***Meccanica*** (newtoniana e analitica o razionale), ***Elettromagnetismo*** e ***Termodinamica*** – corrispondono grosso modo alle conoscenze di base acquisite dagli studenti nel biennio dei corsi di laurea in fisica, ingegneria, matematica, chimica etc. etc., mentre i fondamenti della ***Fisica Moderna*** – che comprendono anche le teorie della ***Meccanica statistica***, ***Relatività ristretta*** e ***Meccanica quantistica*** - vengono acquisiti successivamente a completamento delle conoscenze di base.

Ma la sua più profonda motivazione risiede nel fatto **che la fisica classica e la fisica moderna, sotto certi profili, si differenziano in modo irriducibile**.

Cominciamo dagli aspetti comuni. Sia la fisica classica che quella moderna condividono la seguente impostazione generale:

- gli **eventi fisici** si collocano in un 'teatro naturale' che siamo soliti chiamare **spazio** e **tempo;**
- gli **eventi fisici** sono in ultima analisi riducibili alla esistenza di un certo numero di **particelle fondamentali** ed indivisibili capaci di influenzarsi reciprocamente attraverso l'azione di un certo numero di **forze** (il modello per queste forze tra particelle distanti nello spazio è quello del **campo** introdotto nell'elettromagnetismo maxwelliano);

- le **particelle elementari** e le forze obbediscono a **leggi dinamiche** attraverso le quali, una volta note le loro posizioni iniziali, almeno in linea di principio è possibile **prevedere la posizione al passare del tempo di tutte le particelle del sistema**;
- nota l'evoluzione temporale delle particelle microscopiche costituenti il sistema risulta allora definita anche l'evoluzione del sistema macroscopico (si tratta **ipotesi di riduzione** ovvero che le proprietà di un sistema complesso siano sempre deducibili dalla 'somma' delle proprietà dei sistemi elementari componenti).

Questa impostazione - che spesso con accento negativo viene qualificata come **riduzionista** – ha dominato la fisica classica conducendola ai grandi successi che conosciamo e continua dominare anche la fisica moderna nonostante questa, assai spesso, ne abbia messo in luce soprattutto i limiti.

E' all'interno di questo quadro concettuale, sostanzialmente condiviso, che risulta possibile tracciare una chiara linea di demarcazione tra fisica classica e moderna, che si gioca non nei concetti portanti ma nella loro interpretazione, dunque nella concezione di **spazio**, **tempo**, **particella** e **forza**.

Spazio e tempo

E' superfluo ricordare che spazio e tempo sono gli enti fisici su cui si fonda la costruzione di una qualunque teoria fisica. Qualunque essa sia, una teoria viene costruita attraverso grandezze dipendenti dallo spazio e dal tempo oppure risultanti dalla combinazione di spazio e tempo (fa eccezione la Termodinamica della quale parleremo più avanti). In un certo senso spazio e tempo sono i 'contenitori' della nostra rappresentazione fisica e fino ad ora nessuno è riuscito ad immaginare qualcosa di diverso.

Date queste premesse si capisce quanto sia rilevante il fatto che la concezione dello spazio e del tempo su cui si fonda la fisica classica sia radicalmente diversa da quella su cui si fonda la fisica moderna.

La **fisica classica** è fondata sui concetti di **spazio e tempo assoluti,** codificati con estrema chiarezza dallo stesso **I. Newton** nei sui **Principia (1687),** ed assai vicini alla nostra intuizione: *lo spazio è un contenitore passivo con proprietà autonome ed indipendenti dagli eventi fisici che hanno luogo al suo interno, così il tempo scorre ovunque con un proprio ritmo regolare ed indipendente da qualunque circostanza fisica. Come conseguenza due osservatori in moto relativo misurano ognuno gli stessi valori degli intervalli spaziali e temporali di due eventi fisici.*

La **fisica moderna**, invece, ha scoperto che quando sono in gioco **velocità prossime alla velocità della luce c**, i concetti di spazio e tempo newtoniani non sono più adeguati e devono essere sostituiti dai concetti di **spazio e tempo relativi** codificati da **A. Einstein** nella **Teoria della relatività ristretta (1905).** Da questa derivano proprietà e fenomeni assai lontani dalla nostra esperienza e dalla nostra intuizione: *lo spazio ed il tempo non possiedono proprietà autonome e due osservatori, posti in moto relativo con velocità prossime a quella della luce c, misurano ognuno diversi valori degli intervalli spaziali e temporali di due eventi fisici.*

In sintesi, mentre la **fisica classica** assume che i concetti di spazio e tempo siano gli stessi a qualunque scala delle velocità, la **fisica moderna** distingue tra basse velocità **(v<<c),** dove valgono approssimativamente i concetti

newtoniani di spazio e tempo, ed alte velocità **(v~c),** dove questi devono essere sostituiti dai concetti della teoria della relatività ristretta.

Particella

La **fisica classica** pensa la **materia** come una sostanza o fluido continuo ed indefinitamente divisibile ed interpreta le **particelle** o punti materiali **come porzioni più o meno piccole di tale fluido**. Inoltre, il moto di tali particelle può essere descritto attraverso i concetti di **posizione e velocità e accelerazione** che obbediscono le **leggi della meccanica newtoniana**.

La **fisica moderna,** invece, ha scoperto che **la materia ha una struttura discontinua o granulare** formata da atomi dell'ordine di 10^{-8}**cm** (che a loro volta hanno una struttura discontinua formata da elettroni e nucleo, il quale ha una struttura discontinua formata da protoni e neutroni, i quali hanno una struttura discontinua formata da quark. Quark ed elettroni si ritiene, invece, che siano puntiformi e non ulteriormente riducibili). Inoltre, ha scoperto che il moto di tutte le particelle più piccole dell'atomo non può più essere descritto per mezzo delle leggi e dei concetti classici. In particolare risulta necessario introdurre un **nuovo concetto di particella**, non più descritto da posizione velocità ed accelerazione ma da un nuovo ente, la **funzione d'onda**, che obbedisce ad una nuova equazione del moto, l'equazione di Schroedinger della Meccanica Quantistica, e che ha una sua peculiare interpretazione probabilistica (L. De Broglie, W. Heisenberg, E. Scroedinger , M. Born, P.A.M. Dirac, 1924-1926).

Dunque mentre la **fisica classica** assume che le proprietà delle porzioni di sostanza (punti materiali) siano le stesse a qualunque scala spaziale, la **fisica moderna** distingue tra scala macroscopica **(d>10^{-8}cm),** dove vale il concetto classico di punto materiale, e scala microscopica **(d<10^{-8}cm)** dove questo deve essere sostituito da quello della meccanica quantistica**.**

Forza

In **fisica classica** la nozione di forza è piuttosto articolata. In primo luogo occorre distinguere tra **forze meccaniche** che si esercitano per mezzo di un corpo materiale interposto (ad esempio due punti materiali collegati da un filo) e **forze naturali** che si esercitano attraverso lo spazio vuoto (ad esempio tra terra e sole).

Le forze naturali note alla fisica classica sono la **forza gravitazionale** e la **forza elettrica-magnetica** descritte nel contesto di quadri concettuali assai diversi.

La prima, scoperta e descritta da I. Newton nella **teoria della gravitazione,** esposta nei *Principia* assieme alla meccanica, assume il concetto di **azione a distanza**: *i corpi materiali distanti nello spazio agiscono istantaneamente gli uni sugli altri* attraverso un meccanismo che non viene spiegato.

La seconda, descritta dalla **teoria elettromagnetica** di Maxwell (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, 1864),* assume il **concetto di campo**: *i corpi carichi distanti nello spazio agiscono con forze elettriche e magnetiche attraverso un ente fisico interposto che, a seconda dei casi, viene detto campo elettrico, campo magnetico o campo elettromagnetico. L'azione di un corpo sull'altro non è istantanea ma ritardata a causa del tempo impiegato dal campo a trasportare l'azione della carica.*

All'interno della fisica classica, questa **asimmetria nella interpretazione delle forze naturali permane irrisolta** nonostante gli sforzi - infruttuosi - di J.C. Maxwell di riformulare la forza gravitazionale nel contesto di una teoria di campo sulla falsariga dell'elettromagnetismo. Nonostante questo, era ben chiaro che **il modello delle forze naturali dovesse essere quello delle forze elettriche e magnetiche** così riassumibile

- una frazione di materia (punto materiale), attraverso una carica interna (elettrica o gravitazionale), esercita sul campo in cui è immersa una azione che lo modifica localmente;
- la modifica si propaga nel campo e quindi nello spazio su cui si estende fino a raggiungere altre frazioni di materia;
- tali frazioni di materia, per effetto della loro carica interna, subiscono una azione da parte del campo modificato nel quale sono immerse.

Il dualismo materia-campo

Nonostante l'interrelazione esistente tra materia e campo, **nella fisica classica i due enti sono pensati come intrinsecamente diversi ed irriducibili:**

- la materia è frazionabile in porzioni localizzate nello spazio (particelle) il campo si estende su tutto lo spazio e non è frazionabile;
- la materia si muove in accordo con leggi della Meccanica newtoniana, il campo (elettromagnetico) si muove in accordo con le equazioni dell'Elettromagnetismo di Maxwell (ad esempio i campi danno luogo ai fenomeni di interferenza e diffrazione le particelle materiali no);
- etc. etc.

Possiamo allora affermare che **la fisica classica perviene ad una interpretazione della realtà fondata su due enti fisicamente distinti, la materia ed il campo**.

Nella **fisica moderna** il dualismo materia-campo descrive efficacemente i fatti sperimentali fintanto che si ha a che fare con fenomeni *solo relativistici* ($v \sim c$ e $d > 10^{-8} cm$) o *solo quantistici* ($v < c$ e $d < 10^{-8} cm$) . Ma quando si incrociano le due condizioni $v \sim c$ e $d < 10^{-8} cm$, ovvero nel *dominio dei fenomeni al tempo stesso relativistici e quantistici* (proprio qui si collocano i fenomeni della fisica delle particelle), i concetti di materia e campo devono essere ulteriormente modificati per rendere conto dei fatti sperimentali.

Si approda allora ad un nuovo ente fondamentale, **il campo quantizzato**, esteso nello spazio come un **campo** ma frazionabile in porzioni o **quanti** come la materia, capace di descrivere - in virtù di questa sua natura ibrida - sia le particelle materiali che le forze in un quadro concettuale unitario che **supera definitivamente il dualismo materia campo della fisica classica.**

E' questa la ***Teoria Quantistica dei Campi***, la teoria delle particelle e delle forze davvero fondamentale (almeno fino ad oggi), risultato della 'fusione' della teoria della relatività ristretta e della meccanica quantistica, necessaria per la descrizione dei fenomeni nel dominio estremo in cui vale sia il regime relativistico che quantistico.

Microscopico-macroscopico

Come accennato, nella fisica classica la materia è pensata come una sostanza continua, omogenea, priva di struttura, frazionabile in porzioni al limite puntiformi dette punti materiali che però non svolgono mai il ruolo di costituenti.

Questa concezione della materia riesce a rendere conto solo di alcune proprietà macroscopiche dei corpi materiali quali l'elasticità ad esempio, mentre **non riesce in alcun modo utile per interpretarne gli scambi di calore e le proprietà termiche** (che per essere comprese richiedevano infatti l'introduzione di una apposita sostanza, il calorico. Fu proprio questa circostanza che, storicamente, fece si che la Termodinamica si sviluppasse, all'interno della fisica classica, come una disciplina autonoma e senza alcuna relazione con la Meccanica).

Solo nella seconda metà dell'800, oramai prossimi alla grande crisi della fisica classica, ci si rese conto che immaginando la materia composta di costituenti elementari o atomi si potevano interpretare in modo molto naturale le proprietà termiche della materia. Fondandosi su di un concetto di atomo assai rudimentale, approssimato con una sferetta rigida di raggio arbitrario, Clausius e J.C. Maxwell riuscirono a spiegare molte proprietà dei sistemi termodinamici riconducendole al movimento e all'urto di tali atomi realizzando la 'riduzione' della termodinamica alla meccanica (***Teoria Cinetica dei gas).*** Poco dopo, con i lavori L. Boltzmann e W. Gibbs, tale 'riduzione' viene completata attraverso la creazione della ***Meccanica Statistica***, uno schema di calcolo molto generale capace di connettere in modo sistematico le proprietà del mondo microscopico (gli atomi) con quelle del mondo macroscopico (porzioni finite di materia).

Questa teoria occupa nella fisica una posizione singolare: **nata nell'ultima fase della fisica classica mantiene sostanzialmente immutata la sua validità anche nella fisica moderna** dove occupa una posizione di grande rilievo.

I quattro domini della fisica moderna

Prof. Nicola Semprini Cesari

$R < 10^{-8}$ cm	ST	spazio e tempo assoluti			ST	spazio e tempo della teoria della relatività ristretta	
	P	particella quantistica			P	particella quantistica	
	LM	Meccanica quantistica			LM	Meccanica quantistica relativistica o Teoria dei campi quantizzati	
	F	Gr	Gravit Universale Newton		F	Gr	? Teoria delle stringhe ?
		EM	Elettromagnetismo Maxwell			EM	Teoria Elettrodebole
		Fr	Teorie fenomenologiche			Fr	
		Db	Teorie fenomenologiche			Db	Cromodinamica quantistica
$R > 10^{-8}$ cm	ST	spazio e tempo assoluti			ST	spazio e tempo della teoria della relatività ristretta	
	P	particella classica			P	particella classica	
	LM	Meccanica newtoniana			LM	Meccanica relativistica	
	F	Gr	Gravit Universale Newton		F	Gr	Relatività Generale Einstein
		EM	Elettromagnetismo Maxwell			EM	Elettromagnetismo Maxwell
		Ft	non osservata			Fr	non osservata
		Db	non osservata			Db	non osservata
	$v << c$				$v \sim c$		

ST= Spazio e Tempo; P= Particella; LM= Legge del moto; F= Forza naturale

❑ L'evoluzione della fisica moderna

Premesso che dettagli sul percorso storico saranno dati soprattutto nel seguito qui vogliamo sottolineare ulteriormente che la distinzione tra ***fisica classica*** e ***fisica moderna*** è qualcosa di più di divisione di comodo di una disciplina troppo vasta. Essa nasce da una vera e propria ***rivoluzione concettuale*** che si annunciò e realizzò nella fisica tra il 1890 ed il 1925 lungo due diverse direttrici:

1) problemi nella interpretazione della teoria elettromagnetica e del suo rapporto con la meccanica newtoniana. Dopo vari tentativi di sanare le 'sottili contradizioni' di cui diremo tra non molto, si comprese che era necessaria la radicale revisione dei concetti di spazio e tempo della ***Teoria della Relatività Ristretta*** (*A. Einstein, 'Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento', Zeitschrift für Physik 1905*);

2) problemi nella applicazione della fisica classica ai fenomeni riguardanti l'atomo ed i suoi costituenti. Nel corso della seconda metà dell'800 si affermò gradualmente il concetto di atomo e la termodinamica fu riformulata in termini atomici e molecolari conducendo alla ***teoria cinetica dei gas*** e poi alle tecniche generali della ***meccanica statistica***. Questa spiegò con successo molti fatti sperimentali tuttavia si registravano persistenti ***discrepanze*** nella previsione dei ***calori specifici dei solidi*** e della ***radiazione del corpo nero***.

- Per risolvere quest'ultimo problema Plank introdusse nel 1900 l'ipotesi rivoluzionaria della ***quantizzazione della energia del campo elettromagnetico*** (*M. Plank, On the law of distribution of energy in the normal spectrum, Annalen der Physik, 1901*).
- Nel 1905 Einstein mostrò che l'idea della quantizzazione della energia del campo elettromagnetico poteva spiegare facilmente un altro problema irrisolto, ***l'effetto fotoelettrico*** (*A.Einstein, Sull'emissione e la trasformazione della luce da un punto di vista euristico Annalen der Physik, 1905*. Fu per questo lavoro che ricevette il premio Nobel nel 1921).
- Nel 1907 A.Einstein, ricorrendo alla stessa idea, risolse brillantemente anche il problema dei ***calori specifici dei solidi*** (*A. Einstein, La teoria planckiana della radiazione e la teoria dei calori specifici, Annalen der Physik, 1907*).
- Nel frattempo soprattutto E. Rutherford sviluppò tecniche sperimentali semplici e geniali che lo condussero, nel 1911, a scoprire ***la struttura dell'atomo***: un nucleo carico positivamente al centro, elettroni carichi negativamente in orbita attorno al nucleo. Una sorta di piccolo sistema solare retto dalla forza elettromagnetica.
- Fu subito chiara l'incapacità della fisica classica di spiegare l'atomo: secondo l'elettromagnetismo l'elettrone, in moto accelerato e quindi assimilabile ad una antenna, avrebbe rapidamente irraggiato la sua energia cadendo sul nucleo per cui, secondo la fisica classica, l'atomo di Rutherford semplicemente non poteva esistere!

- Nel 1913 N. Bohr fece la prima grande sintesi comprendendo che la quantizzazione della radiazione postulata da Plank e l'incapacità della fisica classica di spiegare l'atomo avevano un denominatore comune e richiedevano una ***radicale revisione del concetto di particella e delle sue proprietà***. Con il ***modello atomico*** di Bohr nasceva ***la prima versione della meccanica quantistica*** (*N. Bohr, 'Sulla costituzione degli atomi e delle molecole' , Philosophical Magazine, 1913*).
- Nel 1924 L. De Broglie formula l'ipotesi delle **onde materiali** che condurranno nel 1925, M. Born e W. Heisenberg da un lato e E. Schroedinger dall'altro, alla formulazione di ***due differenti versioni della meccanica quantistica***. Nel 1927 P.M.A. Dirac dimostra ***l'assoluta identità delle due formulazioni***: ***la creazione della Meccanica Quantistica è compiuta***!

Contemporaneamente a questi fatti A. Einstein lavorava, all'inizio da solo e poi in competizione con il matematico D. Hilbert, alla soluzione di un problema irrisolto della fisica classica, attaccato, senza risultati, già da J.C. Maxwell: ***la formulazione della forza di gravitazione di Newton nella forma di una teoria di campo***. Einstein, a differenza di Maxwell, risolse il problema perché lo affrontò da una angolazione molto diversa da quella dell'elettromagnetismo creando una teoria fisica di grande bellezza: la ***Teoria della Relatività Generale*** (*I fondamenti della teoria della relatività generale, Annalen der Physik, 1916*). In questa teoria il rinnovamento del concetto di spazio e tempo raggiunge il limite estremo: la geometria dello spazio non è un dato immutabile ma dipende dagli eventi fisici che hanno luogo al suo interno.

La gran parte dell'attenzione dei fisici era però richiamata dalla meccanica quantistica (MQ) e dalle sue applicazioni alla struttura dell'atomo e soprattutto alle ***nuove particelle ed alle nuove forze***.

Per quanto riguarda queste ultime, sin dagli inizi era chiaro che, nel nucleo atomico, ed anche tra le nuove particelle scoperte, esistevano nuove forze delle quali non c'era traccia a livello macroscopico e che quindi la fisica classica non aveva scoperto.

Già Rutherford intuì che protoni della stessa carica potevano formare il nucleo solo se si immaginava l'esistenza di una forza molto intensa capace di vincere la repulsione elettrostatica. Tale forza venne detta ***forza forte*** ed una prima modellizzazione fu proposta da H. Yukava nel 1937.

Poi vi era il misterioso fenomeno della instabilità nucleare che dava luogo alla radioattività. E. Fermi intuì che doveva trattarsi di una nuova forza della natura, ***la forza debole***, e ne propose anche una prima e molto completa trattazione nel 1933.

Per quanto riguarda le particelle invece, chiarita la struttura dell'atomo - formato da elettrone, protone e neutrone - sembrava naturale pensare che non esistessero in natura altre particelle. Invece a partire dagli anni '30 si cominciò a scoprire, soprattutto nei ***raggi cosmici***, *positroni, muoni, pioni, kaoni* etc. etc. particelle che non avevano alcun ruolo nella architettura atomica e delle quali non si capiva la funzione. Con la costruzione dei primi grandi acceleratori, soprattutto da parte di E. Lawrence, nel dopoguerra il fenomeno assunse proporzioni inquietanti: le nuove particelle piovvero a decine fino a superare il centinaio. Un quadro soddisfacente di questa complessa situazione fu raggiunto solo a partire dagli anni '60 con l'introduzione del ***modello a quark*** da parte di M. Gell-Mann e G. Zweig che riconduceva le 100 particelle alla combinazione di 3 quark fondamentali (oggi 6 quark fondamentali).

Con il modello a quark sembrò che ancora una volta l'idea che in natura esistessero solo poche particelle e forze fondamentali potesse essere quella giusta.

Per dare corpo a questa idea era però necessaria una meccanica quantistica perfezionata e senza limiti di applicabilità.

Un punto che rimaneva irrisolto era l'applicazione delle leggi della MQ ai campi di forza (ad esempio ai campi elettrici e magnetici) e alle particelle con velocità prossima a quella della luce (la MQ trattava solo particelle con ***v<<c***): infatti era proprio in questo dominio che si collocavano le forze e le nuove particelle.

Era chiaro che per affrontare questo problema era necessario operare una specie di fusione tra Teoria della Relatività Ristretta e Meccanica Quantistica ma l'obiettivo si rivelo molto più difficile del previsto. M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan nel 1925 e P.A.M. Dirac nel 1927, affrontarono il problema della ***quantizzazione del campo elettromagnetico*** ma si imbatterono nel difficile problema di calcoli dal risultato infinito (***problema degli infiniti***) che fecero sospettare che la teoria fosse completamente sbagliata.

Ci vollero quasi 20 anni per risolvere il problema: tra il 1945 ed il 1950 H. Bethe, S.I. Tomonaga, J. Schwinger, R. Feynmann e F. Dyson introdussero le tecniche della ***rinormalizzazione*** che eliminavano gli infiniti dai calcoli e resero possibile la ***quantizzazione del campo elettromagnetico***: era nata la ***elettrodinamica quantistica*** una teoria di una precisione spettacolare.

Soprattutto era nato un schema teorico generale per la trattazione delle forze e delle particelle valida in tutti regimi, anche in quelli non coperti dalla ordinaria meccanica quantistica. Tale nuova teoria, detta ***Teoria Quantistica dei Campi***, deve essere considerata, almeno fino ad oggi, la teoria definitiva delle particelle e delle forze che sostituisce la meccanica newtoniana e la meccanica quantistica nei regimi estremi dove queste non funzionano più.

Dal 1950 al 1970 la QFT si arricchì di nuove essenziale idee attraverso i lavori di C. Yang, R. Mills (***Teorie Quantistiche dei Campi di Gauge***).

Infatti nel corso degli anni '60 e primi anni '70 S. Glashow, S. Weinberg, A. Salam, M. Veltman, G. t'Hooft formulano una teoria di gauge di campo quantizzato delle interazioni deboli oltretutto unificata con quella elettromagnetica detta ***Teoria Elettrodebole***.

A cavallo degli anni '70 F. Wickzec, D. Gross, D. Politzer formulano una teoria di gauge di campo quantizzato delle interazioni forti: la ***Cromodinamica Quantistica***.

L'insieme formato dal Modello a quark di Gell-Mann (aggiornato a dovere) dalle teoria elettrodebole e dalla cromodinamica quantistica costituisce nella sostanza il ***Modello Standard delle Particelle*** che racchiude, formulate nel linguaggio della teoria quantistica dei campi, tutte le nostre conoscenze sulle particelle e forze fondamentali esistenti in natura (vedi figura pag. seguente) realizzando, almeno in parte, il grande disegno inziale.

Almeno in parte perché, come qualcuno avrà notato, in questo schema entrano solo tre forze (debole, elettromagnetica, forte) mentre manca quella di gravitazione formulata come teoria di campo classico da A. Einstein nella Teoria della relatività Generale. Il fatto che fino ad ora nessuno sia riuscito a quantizzare il campo di gravitazione ovvero a formulare una ***Teoria Quantistica dei Campi della Gravitazione*** deve essere considerata la principale lacuna della fisica fondamentale contemporanea (la Teoria delle Stringhe e la Gravità a Loop sono due teorie tuttora in fase di sviluppo che hanno questa precisa finalità).

❑ Uno sguardo al Modello Standard

Il modello standard (MS) rappresenta una sintesi delle conoscenze accumulate fino ad oggi nel campo della fisica delle particelle elementari. Esso descrive le proprietà fisiche delle **particelle materiali fondamentali** e delle **interazioni** cui danno luogo (ad esclusione della interazione gravitazionale di cui non esiste a tutt'oggi una teoria in accordo con la meccanica quantistica).

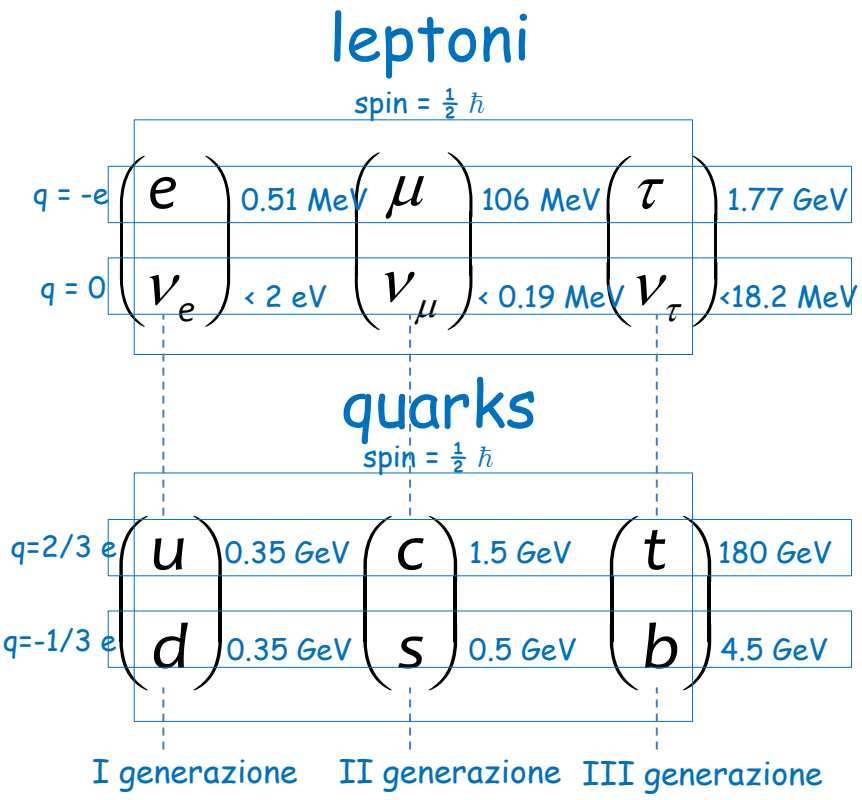
Particelle materiali fondamentali

Sono assunte **puntiformi o elementari** e sono costituite da una ***famiglia di 12 particelle materiali di spin s=1/2 ħ (fermioni)*** suddivisa in due sottofamiglie di 6 particelle ciascuno dette

- **leptoni,** più leggeri (leptos=leggero) e soggetti alle sole interazioni deboli ed elettromagnetiche (dotati di cariche elettriche nulle o intere);
- **quarks,** più pesanti (nome di fantasia proposto da M.Gell-Mann e tratto da Joyce) e soggetti alle interazioni deboli, elettromagnetiche (dotati di cariche elettriche frazionarie) e forti.

L'elettrone, i quark up e down e i neutrini sono stabili mentre **instabili risultano essere il muone** ($\tau=2.2\times10^{-6}$s), **il tau** ($\tau=2.9\times10^{-13}$s) **ed i quark strange, charm, bottom e top.**

Come previsto dalla **teoria dei campi** ad ogni particella deve corrispondere un'antiparticella per cui devono esistere **12 antiparticelle di uguale massa, spin e numeri quantici interni opposti.** Inoltre la **teoria delle interazioni forti** richiede che i quark esistano in tre diverse varietà di carica forte (detta carica di colore). Tenuto conto di queste precisazioni ***il numero complessivo di particelle materiali fondamentali previste dal modello standard vale 48!***



$$6(leptoni)\times2 + [6(quark)\times2]\times3 = 48$$

Particelle associate ai campi di forza

Si tratta di ***16 particelle*** o ***quanti*** di spin s=0 e 1$\hbar$ (bosoni) sia carichi che neutri, sia massivi che non, ***associati essenzialmente ai campi di forza delle tre interazioni naturali note: le interazioni debole, elettromagnetica e forte*** (l'interazione gravitazionale, pure associata ad un bosone di spin s=2$\hbar$, non fa parte di ciò che solitamente viene inteso come MS).

gravitone spin = 2 $\hbar$

Forza Gravitazionale	(G)	q = 0 m = 0

bosoni di gauge spin = 1 $\hbar$

Forza Elettrodebole	$W^+W^-Z^0$	q = +e, -e, 0 m= 80-90 GeV
	γ	q = 0 m = 0
Forza Forte	$g_1 \cdots g_8$	q = 0 m = 0

bosoni di higgs spin = 0

	$H^+H^0H^-\overline{H}^0$	q = +e, -e, 0 m> 79-114 GeV

- **I. Gravitazionale.** La teoria macroscopica è la ***relatività generale***. Nell'ambito delle QFT, la teoria quantistica della gravitazione risulta ***non rinormalizzabile***. I quanti del campo avrebbero spin *s=2*$\hbar$, *m=0* in accordo con il raggio d'interazione *r=∞* ma non sono mai stati osservati. Diversamente dalle altre interazione definisce lo sfondo dei fenomeni fisici.
- **I. Elettrodebole.** Esiste una teoria quantistica unificata della interazione debole ed elettromagnetica, la ***Teoria Elettrodebole*** sviluppata nel corso degli anni '60 da S. Glashow, S. Weinberg e A. Salam.

  La forza, dovuta alla carica elettrica ordinaria ed alla carica isotopica debole, consta di 4 campi differenti di spin s=1$\hbar$, due carichi e due neutri. Il campo di Higgs (i cui quanti sono le particelle di Higgs ancora non trovate) rende massivi tre dei quattro campi detti W+,W- e Z0 (80-90 GeV). Viene allora soppressa l'intensità della interazione che acquisisce un raggio d'azione finito **r~10^{-18}m**. Il quarto campo, neutro (γ), rimane non massivo e raggio d'azione r=∞. Si originano così *interazioni deboli ed elettromagnetiche* apparentemente assai diverse.
- **I. Forte**. Esiste una teoria quantistica della interazione forte, la **Cromodinamica Quantistica** sviluppata nel corso degli anni '60-'70 da M.Gell-Mann, D.Gross, F. Wilczek.

  La forza è dovuta alla carica di colore, che ha 3 differenti specie, e che da origine a campi i cui quanti sono detti gluoni di spin *s=1*$\hbar$, massa *m=0* e possiedono 8 diverse cariche di colore. Non esistono prove analitiche ma si ritiene che la carica di colore dei gluoni sia responsabile del fenomeno sperimentalmente osservato del ***confinamento dei quark*** e della formazione di adroni virtuali massivi che rendono l'interazione a raggio d'azione finito con ***r~10^{-15}m***.

❑ Fisica Fondamentale e Applicata

La storia che abbiamo tracciato è in sostanza la storia della ***fisica fondamentale*** ovvero di quelle teorie fisiche che contengono i concetti e le leggi fondamentali a partire dai quali si ritiene di potere ricostruire tutta la realtà fisica. In questo senso sono teorie fondamentali nella ***Fisica Classica*** la

Meccanica
Elettromagnetismo
Termodinamica

e nella ***Fisica Moderna*** la

Teoria Quantistica dei Campi
Teoria Elettrodebole
Cromodinamica Quantistica
Gravità Quantistica (quando ci sarà!)

Volendo seguire questa impostazione si sarebbe tentati di qualificare come ***fisica non fondamentale o applicata*** l'applicazione delle teorie fondamentali alle diverse classi di problemi specifici. Questa distinzione, in linea di principio possibile, soprattutto nella fisica moderna perde completamente senso.

Nella Fisica Classica l'applicazione della meccanica ai solidi e ai fluidi ad esempio (Meccanica dei Continui, Meccanica dei Solidi, Meccanica dei Fluidi) può essere fatta senza ricorrere a principi fisici nuovi semplicemente con l'introduzione di opportuni parametri per rappresentare l'elasticità, la viscosità etc. etc. Lo stesso dicasi per le proprietà termiche a partire dalla termodinamica. In questi casi, in effetti, la separazione tra fisica fondamentale ed applicata è piuttosto netta e trova una sua ragion d'essere.

Nella Fisica Moderna le cose si sono complicate. La Meccanica statistica ha chiarito che in un sistema complesso cominciano ad affiorare proprietà e concetti assenti al livello fondamentale: l'entropia è uno tra i tanti possibili esempi.

La termodinamica dei processi irreversibili, sviluppatasi nel corso del '900, chiarisce che lontani dall'equilibrio termodinamico i sistemi complessi, in accordo con la legge dell'aumento dell'entropia, possono sviluppare strutture ordinate. A parte l'enorme interesse di questo fatto, che apre la via alla comprensione della origine della vita sulla base di leggi naturali senza interventi dall'esterno, si tratta di ulteriori indicazioni che nel passaggio dai costituenti fondamentali al sistema finale emergono proprietà nuove che vanno descritte con nuovi concetti e nuove leggi.

Si tratta di un evidente ridimensionamento del sogno riduzionista che la fisica classica e moderna hanno sfruttato a fondo e che ora, forse, devono abbandonare.

Sul ***piano metodologico*** quindi, sempre ***più la realtà fisica dovrà essere pensata a strati successivi di complessità crescente ciascuno con concetti e leggi caratteristiche in parte indipendenti da quelle degli strati adiacenti***. Da questo punto di vista , evidentemente, la distinzione tra fisica fondamentale ed applicata perde senso: ogni strato della realtà richiede in qualche modo teorie specifiche che nel loro ambito sono fondamentali. ***Questo cambio di prospettiva è certamente una delle lezioni più importanti della fisica moderna***.

Anche sul ***piano empirico*** la fisica moderna contiene importanti novità. A parte le capacità tecniche e sperimentali che continuano a progredire a ritmo vertiginoso ***l'uso del calcolatore è la vera novità della fisica e della scienza moderna***. Il calcolatore apre una seconda via, alternativa all'esperimento, dove i costituenti elementari e le loro leggi possono essere fissati arbitrariamente per giungere, attraverso la ripetizione di calcoli (che presuppongono potenze di calcolo sempre crescenti), alla costruzione delle proprietà macroscopiche che discendono da quelle leggi. Vengono così costruiti *sistemi macroscopici virtuali* che possono essere confrontati con comodo con quelli reali in modo da trarre indicazioni sulle leggi elementari sottostanti che rimangono, forse per un nostro limite insuperabile più che per semplice pregiudizio, il vero riferimento della conoscenza.

Perché fu formulata la Teoria Relatività Ristretta ?

Assumiamo il punto di vista di un fisico della fine dell'800 che ancora non conosceva la fisica microscopica ($d < 10^{-8}$ *cm*, la meccanica quantistica, le forze deboli e forti che dominano il mondo subatomico saranno scoperte e chiarite nel corso del '900 attraverso un lungo percorso non ancora concluso) e per il quale l'intera fisica si riassumeva nella

fisica macroscopica ($d > 10^{-8}$ *cm*):

- **leggi del moto dei corpi materiali**. Scoperte e codificate nella meccanica newtoniana (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, I. Newton 1687*);
- **legge per la descrizione della forza gravitazionale**. Scoperta e codificata nella meccanica newtoniana anche se la teoria era considerata insoddisfacente poiché non spiegava il meccanismo di propagazione della forza nello spazio (assumeva la validità della azione a distanza);
- **leggi per la descrizione delle forze elettriche e magnetiche.** Scoperte e codificate nella teoria dell'elettromagnetismo (*ATreatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873). Tale formulazione era considerata esente da difetti ed in particolare spiegava in modo dettagliato il meccanismo di propagazione della forza elettrica e magnetica nello spazio (campi elettrici e magnetici, onde elettromagnetiche, unificazione di elettricità magnetismo ed ottica e previsione di nuovi fenomeni).

La meccanica e l'elettromagnetismo, nei loro ambiti, spiegavano perfettamente tutti i fatti sperimentali allora noti (ad eccezione di alcuni piccoli effetti allora ritenuti marginali) e potevano essere considerate corrette ed esenti da difetti.

In accordo con il punto di vista di allora, sia la meccanica che l'elettromagnetismo venivano interpretate nel contesto dei **concetti di spazio e tempo assoluti**, consistente con l'idea che esistesse un mezzo – detto **etere** – capace di propagare le onde elettromagnetiche. Secondo tale impostazione la meccanica avrebbe dovuto soddisfare il principio di relatività galileiano ma non l'elettromagnetismo che invece richiedeva l'esistenza del riferimento privilegiato in quiete nell'etere.

Questo quadro, in se coerente e assolutamente plausibile, andò in frantumi quando fu chiaro che l'etere non esisteva (o, seguendo la via di Einstein, quando fu chiaro che il principio di relatività galileiano era un principio generale che non poteva essere violato) .

Iniziò un periodo di profonda crisi della fisica che si risolse con la formulazione della **Teoria della Relatività Ristretta** la quale **rivoluzionò in modo radicale i concetti di spazio e tempo ovvero i fondamenti della fisica** dando inizio (assieme all'altra grande rivoluzione legata alla scoperta della natura discreta degli scambi di energia nel modo microscopico che portò al concetto di quanto) a quel profondo rinnovamento che condusse a ciò che oggi chiamiamo fisica moderna.

Le leggi della meccanica newtoniana

La **meccanica** si pone l'obiettivo di studiare **il moto dei corpi materiali**. Essa, pertanto, deve dapprima individuare le **grandezze fisiche** rilevanti con le quali costruire, sulla base di **esperimenti**, relazioni capaci di descrivere i fenomeni osservati ovvero le **leggi del moto** (**metodo sperimentale**).

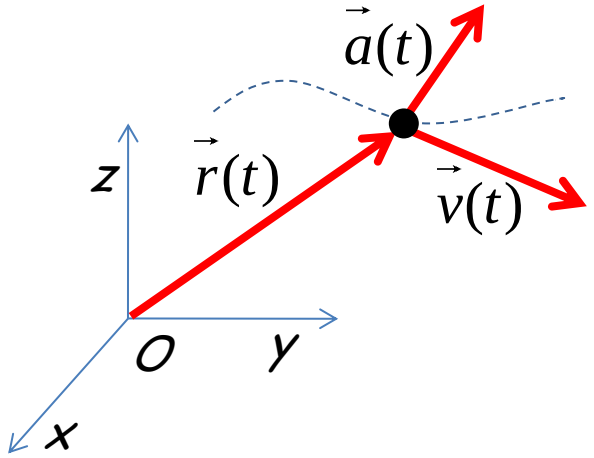
Le **grandezze fisiche** rilevanti che essa individua sono:

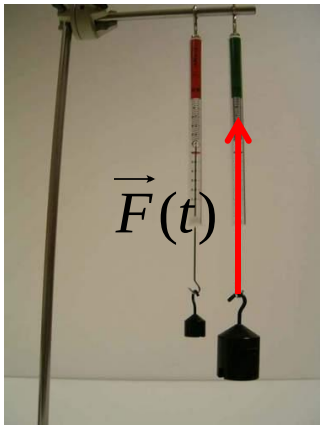
il **vettore posizione** $\vec{r}(t)$
che fornisce la posizione del punto materiale al tempo t rispetto al riferimento Oxyz (terna d'assi cartesiana ortogonale destrorsa)

il **vettore velocità** $\vec{v}(t)$
che descrive la direzione il verso e la rapidità del moto del punto materiale al tempo t rispetto al riferimento Oxyz

il **vettore accelerazione** $\vec{a}(t)$
che descrive la direzione il verso e la rapidità con cui varia la velocità del punto materiale al tempo t rispetto al riferimento Oxyz

il **vettore forza** $\vec{F}(t)$
che descrive la direzione il verso e la intensità dell'ente fisico che nelle diverse situazioni produce il moto del punto materiale (causa del moto) anch'esso espresso al tempo t e rispetto al riferimento Oxyz





Nella formulazione newtoniana queste grandezze soddisfano tre leggi di natura empirica note con il nome di

Principi della Dinamica

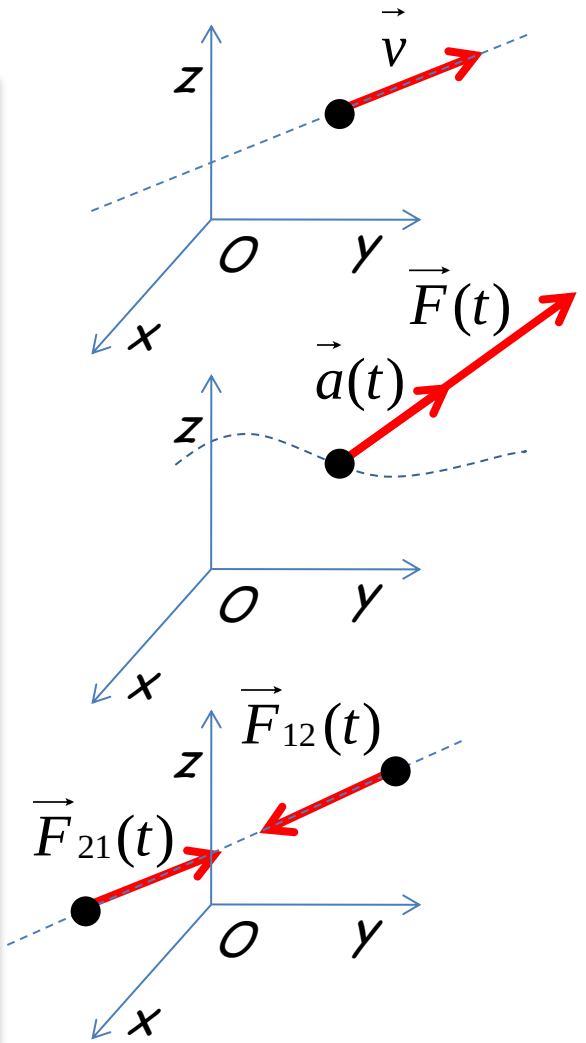
I) in un dato riferimento, un corpo materiale non soggetto ad alcuna forza o permane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme;

II) in un dato riferimento, un corpo materiale che sia soggetto ad una forza complessiva *F* si muove con una accelerazione *a* che soddisfa la relazione

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dove ***m* è una costante positiva indipendente dal luogo e dal tempo che esprime una proprietà intrinseca del corpo materiale detta *massa inerziale*;**

III) due corpi materiali in mutua interazione, indipendentemente dalla natura della interazione, applicano l'uno sull'altro forze dirette lungo la congiungente e di verso contrario.



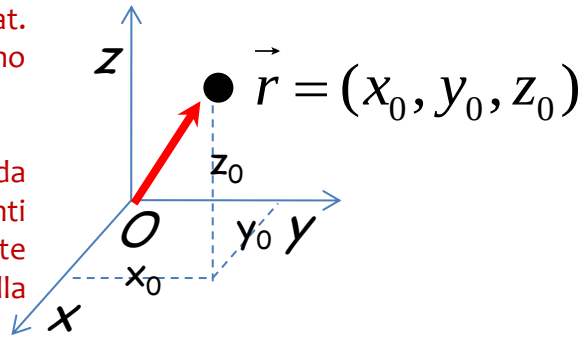
Le grandezze fisiche della meccanica sono relative

La *posizione* nello spazio di un corpo materiale può essere descritta solo riferendosi ad un altro corpo materiale assunto come *sistema di riferimento* (solitamente una terna d'assi cartesiana).
Come conseguenza anche la *velocità*, l'*accelerazione* e la *forza* possono essere descritte solo in relazione ad un sistema di riferimento.
Dunque **il sistema di riferimento è necessario per descrivere le grandezze fisiche della meccanica** per cui la domanda è…

- **Con quale criterio deve essere scelto il SdR ?**
- **I Principi della Dinamica valgono in tutti i possibili SdR ?**

NOTA: quando una grandezza fisiche assume significato solo in relazione ad un riferimento viene detta ***relativa*** (dal lat. tardo *relativus*, der. di *relatus*, p. pass. di *referre* 'riportare'). Quando invece è indipendente dal riferimento viene detta **assoluta** (dal lat. *absolutus* 'libero da qualsiasi vincolo'). Dunque posizione, velocità e accelerazione sono grandezze fisiche relative.

NOTA: In un sistema di assi cartesiano la *posizione* del corpo materiale risulta descritta da una vettore rappresentato da una *terna ordinata di numeri reali* (dette componenti cartesiane del vettore posizione). Cambiando sistema di riferimento le coordinate cartesiane del vettore posizione cambiano indicando il carattere relativo della grandezza.



Riferimenti inerziali e non inerziali

Sperimentalmente si verifica che i Principi della Dinamica (PdD) valgono in alcuni sistemi di riferimento (SdR) ma non in altri. Un esempio semplice che può chiarire questo punto è dato dal seguente esperimento.

Esperimento della piattaforma

E' data una piattaforma che a comando può ruotare attorno all'asse centrale. Sul piano della piattaforma e sul pavimento del piazzale sono tracciati due riferimenti O' ed O. Dal punto centrale della piattaforma l'osservatore O', ad essa solidale, spinge un corpo materiale verso l'esterno (radialmente). Il piano della piattaforma ed il corpo materiale sono lavorati in modo tale da eliminare gli attriti per cui, una volta lanciato, la risultante delle forze agenti sul corpo materiale è nulla (la reazione vincolare della piattaforma equilibra la forza peso).

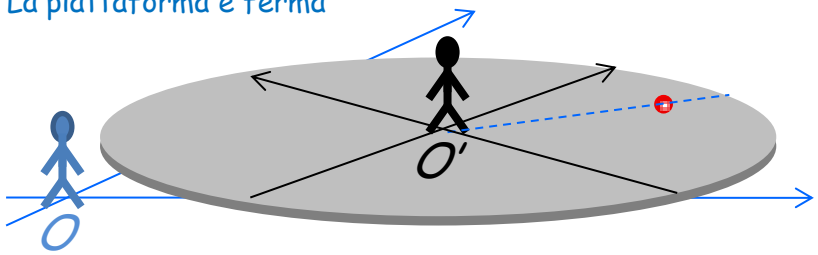
caso A

La piattaforma O' non ruota. L'osservatore O' lancia radialmente il corpo materiale che ha risultante nulla delle forze applicate.

Esito dell'esperimento:

il corpo materiale si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad entrambi i riferimenti. Dunque vale per entrambi il primo principio della dinamica per cui concludiamo che O ed O' sono riferimenti inerziali.

La piattaforma è ferma



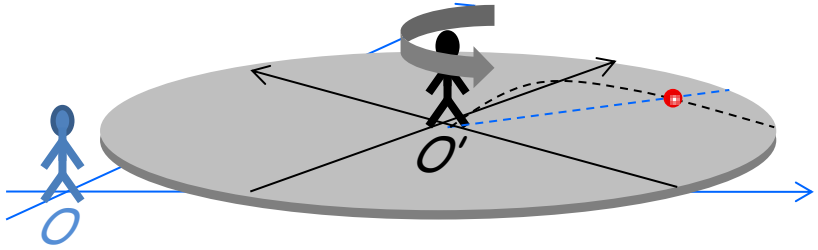
caso B

La piattaforma O' ruota. L'osservatore O' lancia radialmente il corpo materiale che ha risultante nulla delle forze applicate.

Esito dell'esperimento:

il corpo materiale si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O e di moto curvilineo rispetto ad O'. Dunque il primo principio della dinamica vale per O e non per O' per cui concludiamo che O è inerziale e O' è non inerziale.

La piattaforma ruota



Dati questi fatti è utile allora distinguere i sistemi di riferimento (SdR) in due categorie: quella dei **riferimenti inerziali** i SdR dove valgono i principi della dinamica e dei **riferimenti non inerziali** i SdR dove non valgono i principi della dinamica.
Naturalmente per stabilire se un SdR è inerziale o meno si deve saggiare in quel riferimento la validità delle leggi meccaniche (di solito si saggia la validità del solo primo principio della dinamica) per cui giungiamo al seguente

Criterio per stabilire se un riferimento è inerziale
dato un corpo materiale sul quale non siano applicate forze oppure, se applicate, abbiano risultante nulla

- se il corpo materiale permane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento allora il riferimento è inerziale
- se il corpo materiale non permane in quiete e non si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento (ovvero si muove di moto accelerato) allora il riferimento è non inerziale

NOTA: sulla base di questo criterio concludiamo che nel caso A sia O che O' sono inerziali mentre, nel caso B, O è inerziale e O' è non inerziale.

ES: Un'altra situazione è la seguente: un corpo materiale è appoggiato sul tavolino di un treno che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a terra. L'analisi delle forze mostra che la risultante delle forze applicate è nulla. Dato che il corpo materiale rimane fermo concludiamo che il riferimento è inerziale. Avvicinandosi in stazione il treno decelera rispetto a terra. Le forze applicate al corpo materiale sono sempre le stesse e dunque nulle tuttavia questo schizza in avanti. Concludiamo che il riferimento, ora, è non inerziale.

Si verifica anche: **dato un riferimento inerziale S tutti i SdR in moto rettilineo uniforme rispetto ad S sono inerziali e tutti SdR in moto accelerato rispetto ad S sono non inerziali.**

Le cause fisiche della non inerzialità

Tralasciando alcune sottili difficoltà di ordine logico, il criterio appena discusso permette senz'altro di stabilire la eventuale inerzialità di un riferimento ma, con tutta evidenza, non dice nulla sulle cause fisiche che determinano la inerzialità o meno del riferimento: nell'esempio della piattaforma, ad esempio, non viene spiegato per quale motivo O è un riferimento inerziale mentre O' non lo è (caso B). D'altra parte affermare che O' è non inerziale perché ruota rispetto ad O non ha senso poiché è chiaro che questa non può essere la causa fisica (il riferimento O non può essere causa fisica di nulla). Fatte queste osservazioni, si pone allora il

problema di individuare quali siano le cause fisiche che determinano l'inerzialità o non inerzialità di un riferimento.

Un suggerimento sulle possibili risposte a questo quesito può essere ottenuto immaginando di compiere l'esperimento della piattaforma nello spazio

Esperimento della piattaforma nello spazio

In questo caso l'esperimento potrebbe essere il seguente: ci sono due piattaforme O e O' ferme tra loro e regolate in modo tale che il corpo materiale, ora certamente senza forze applicate, si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad O e O'. Con tale regolazione i riferimenti O e O' sono inerziali. Poi si mette in rotazione O' rispetto ad O per mezzo di razzi contrapposti. Ora il corpo materiale si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O e di moto curvilineo rispetto ad O'. Dunque O rimane inerziale ma O' diventa non inerziale.

In questo caso qual'è la causa fisica della non inerzialità del riferimento O'? La rotazione di O' rispetto ad O appare ora completamente assurda poiché nello spazio ciò che si può davvero stabilire è solo il moto relativo di O rispetto ad O'.

Da un punto di vista logico, rimangono allora solo due possibilità:

i) **la rotazione del riferimento rispetto allo 'spazio' in cui la piattaforma è immersa**
ii) **la rotazione del riferimento rispetto alla 'materia' che circonda la piattaforma**

Benchè logicamente possibili, è inevitabile sottolineare che **una prova sperimentale diretta tesa a selezionare una delle due opzioni è impossibile**: potremo mai svuotare il cosmo di tutta la materia (oppure mettere in rotazione tutta la materia del cosmo) per farvi poi un esperimento del tipo di quello della piattaforma? Nonostante questo, storicamente il dibattito è stato accanito ed ha condotto ad uno di quei problemi tormentati che pur accompagnando la fisica nel corso della sua evoluzione sembrano non trovare mai una soluzione.

Newton, Mach ed Einstein

Il primo a porsi in modo chiaro questo problema fu Newton in un celebre passo:

L'esperimento della secchia rotante, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* I. Newton 1687:

Se si fa girare su se stesso un vaso appeso ad una corda, fino a che la corda a forza di essere girata non si possa quasi più piegare, e si mette poi in questo vaso dell'acqua e, dopo aver permesso all'acqua e al vaso di acquistare lo stato di riposo, si lascia che la corda si srotoli, il vaso acquisterà un moto che durerà molto a lungo; all'inizio la superficie dell'acqua contenuta nel vaso resterà piana, come era prima che la corda si srotolasse, ma in seguito, il moto del vaso comunicandosi poco a poco nell'acqua contenuta, quest'acqua comincerà a girare, a elevarsi verso i bordi ed a diventare concava, come ho esperimentato; quindi con l'aumentare del moto il livello dell'acqua crescerà sempre più fino a che, concludendosi le sue rivoluzioni, in tempi uguali ai tempi impiegati dal vaso per fare un giro completo, l'acqua sarà in riposo relativo rispetto al vaso.

Inizialmente si osserva il moto rotatorio del secchio mentre l'acqua, che tale movimento non ancora acquisito, rimane in quiete con la superficie perfettamente piana. Gradualmente il moto viene comunicato dal secchio all'acqua la quale, ruotando, comincia a salire lungo i bordi del secchio formando una superficie concava.
La forza di questo esempio sta nel fatto che, istintivamente, tendiamo ad interpretare il fenomeno assumendo il riferimento solidale con il liquido il quale, essendo rotante e quindi non inerziale, è soggetto all'azione delle forze inerziali (forza centrifuga) che tendono a fare risalire l'acqua lungo le pareti: le forze inerziali in questo esempio sono terribilmente reali e presenti!

Chiaramente **la causa di questo effetto risiede nel moto rotatorio dell'acqua ma la domanda è: moto dell'acqua rispetto a chi? A quale riferimento ?**
Notiamo subito che la causa non può essere il moto relativo dell'acqua rispetto al secchio dato che tale moto, pur esistendo all'inizio, non produce alcun effetto. **Newton si rese lucidamente conto che la causa andava ricercata nel moto relativo dell'acqua rispetto a qualcosa d'altro**. La soluzione che propose Newton fu nella direzione dello spazio e non della materia.

Per comprendere la soluzione proposta da Newton **dobbiamo immaginare di ripetere l'esperimento della secchia togliendo un poco alla volta la materia dal cosmo fino a svuotarlo completamente. Quale sarebbe in questo caso l'esito dell'esperimento? L'acqua, una volta in rotazione, salirebbe ancora lungo le pareti del recipiente?**
Come si è detto nessuno lo può sapere, tuttavia Newton immaginò che la risposta fosse affermativa per cui *dedusse che la causa del fenomeno doveva risiedere nel moto rotatorio dell'acqua, non rispetto alla materia del cosmo, ma rispetto allo spazio vuoto del cosmo!* Lo spazio vuoto dunque acquisiva proprietà fisiche indipendenti dalla materia in esso contenuta e addirittura indipendenti da tutto e da tutti:

Lo spazio Assoluto, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* I. Newton 1687:
Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso come lo spazio immobile; cosí la dimensione di uno spazio sotterraneo o aereo o celeste viene determinata dalla sua posizione rispetto alla terra. Lo spazio assoluto e lo spazio relativo sono identici per grandezza e specie, ma non sempre permangono identici quanto al numero. Infatti se la Terra, per esempio, si muove, lo spazio della nostra aria, che relativamente alla Terra rimane sempre identico, sarà ora una parte dello spazio assoluto attraverso cui l'aria passa, ora un'altra parte di esso; e cosí muterà assolutamente in perpetuo.

In sostanza la posizione newtoniana si può riassumere dicendo che egli vedeva nelle forze inerziali la prova della esistenza di uno spazio assoluto. Il problema è che, essendo impensabile una prova sperimentale di quanto affermava, la sua finiva per essere una posizione a priori non verificabile, come tale esposta alle critiche più dure.

Nella stessa direzione va un altro celebre esperimento concettuale proposto da Newton nei principia

Le sfere rotanti, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* I. Newton 1687:
... if two globes kept at a given distance one from the other, by means of a cord that connects them, were revolved about their common center of gravity; we might, from the tension of the cord, discover the endeavor of the globes to recede from the axis of their motion. ... And thus we might find both the quantity and the determination of this circular motion, even in an immense vacuum, where there was nothing external or sensible with which the globes could be compared

L'idea è semplice: nel vuoto del cosmo, si immaginano due sfere di massa M ai capi di una funicella di lunghezza 2R poste in rotazione attorno al centro di massa in modo tale che la funicella venga tesa. Come fa un osservatore a capire se sta ruotando oppure no? Facile: basta che misuri i) la tensione della funicella, ii) la velocità di rotazione ω della funicella nel suo riferimento. Se la relazione tra forza e velocità di rotazione è data da $F=M\ \omega^2\ R$ allora, valendo il secondo principio della dinamica si deduce che il riferimento è inerziale e dunque non rotante. In caso contrario il sistema è rotante e si può stabilire anche la velocità di tale rotazione.

Il criterio è ineccepibile e fornisce un **principio empirico chiaro per stabilire se un riferimento sia inerziale o meno**. Tuttavia è evidente che anche potendo stabilire senza alcun riferimento ad altri corpi lo stato di rotazione del proprio riferimento questo non significa che gli altri corpi non abbiano un ruolo: ancora una volta, per dirimere la questione, sarebbe necessario ripetere l'esperimento dopo avere svuotato il cosmo di tutta la sua materia. **Con questi soli elementi in gioco la posizione newtoniana rimane a priori e non verificabile**.

Per questo motivo numerosi fisici assunsero posizioni critiche che culminarono nell'attacco decisivo del fisico-filosofo E. Mach (1838-1916), autore di in una fondamentale opera di revisione critica dell'intera meccanica:

La critica dell'esperimento del secchio rotante, da *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, E. Mach 1883 :

Nessuno, a nostro parere, è in grado di dire qualcosa sullo spazio assoluto e sul moto assoluto, che sono puri enti ideali non conoscibili sperimentalmente. […] tutti i principi fondamentali della meccanica sono conoscenze sperimentali su posizioni e moti relativi dei corpi. […] Nessuno è autorizzato a estendere questi principi al di là dei limiti dell'esperienza; […] L'esperimento newtoniano del vaso pieno d'acqua sottoposto a moto rotatorio ci insegna solo che la rotazione relativa dell'acqua rispetto alle *pareti* del vaso non produce forze centrifughe percettibili, ma che tali forze sono prodotte dal moto rotatorio relativo alla massa della terra e agli altri corpi celesti. Non ci insegna nulla di più.

Mach dunque, rovescia la posizione newtoniana **sottolineando che, nell'esperimento del secchio, ciò che davvero si osserva non è il moto dell'acqua rispetto allo spazio, ma il moto dell'acqua rispetto alle altre masse del cosmo per cui questa sola può essere la causa fisica che fa risalire l'acqua lungo le pareti del secchio stesso** (in altri termini, se si fosse chiesto a Mach cosa sarebbe successo qualora si fosse ripetuto l'esperimento del secchio, togliendo un poco alla volta la materia dal cosmo fino a svuotarlo completamente, egli avrebbe risposto che alla fine non si sarebbe osservata più la risalita dell'acqua lungo le sue pareti). Risultato immediato di questa impostazione è il

Principio di Mach : *sono inerziali i riferimenti privi di accelerazioni rispetto alle stelle fisse.*

che attribuisce la causa delle forze inerziali alla materia invece che allo spazio.

E' necessario precisare che il termine **'stelle fisse'** può certamente indicare le stelle visibili della volta celeste le quali, a causa delle loro enormi distanze, si muovono in modo apprezzabile solo nel corso di lunghissimi intervalli temporali. Ma non solo, esso deve essere inteso in senso più ampio includendo qualunque sistema di corpi celesti distanti e tra loro indipendenti in modo tale che sia più semplice evidenziare, sullo sfondo di questi, il proprio moto (è in questo modo che viene definito l' International Celestial Reference Frame). Fatta questa premessa si noterà allora come anche il principio di Mach costituisca un **principio empirico chiaro per stabilire se un riferimento sia inerziale o meno (**se un riferimento ruota rispetto alle stelle fisse, come ad esempio la terra rispetto alle stelle visibili, allora quel riferimento non è inerziale).

Nonostante questo, è tuttavia è evidente che anche potendo riferire lo stato di rotazione del proprio riferimento alle stelle fisse questo non significa che le stelle fisse siano la causa fisica delle forze inerziali: siamo dunque in una posizione antitetica a quella newtoniana che però soffre delle stesse debolezze in quanto ancora una volta, per dirimere la questione, sarebbe necessario svuotare il cosmo di tutta la sua materia oppure mettere in rotazione la materia del cosmo.

In realtà **l'argomentazione machiana sembra più plausibile quella newtoniana** poiché attribuisce la causa delle forze inerziali a qualcosa di osservabile, alla materia del cosmo appunto, e non allo spazio assoluto che non può essere osservato. Ad un esame più attento però risulta via via più chiaro che **tale impressione è legata più a posizioni filosofiche di impronta positivista che a ragioni fisiche oggettive**: **senza l'introduzione di principi fisici nuovi risulta impossibile decidere tra le posizioni di Mach e di Newton**.

Di questo fatto si rese lucidamente conto A. Eistein il quale, affascinato dalla coerenza logica della posizione di Mach la sostenne entusiasticamente (la rigorosa aderenza ai fatti della critica machiana, scevra da tentazioni metafisiche, fu un esempio determinante per la creazione della teoria della relatività ristretta), per ritornare però, negli anni tardi, sui propri passi:

La critica alle idee di Mach, da *Uber den Ather; Verh. d. Schweiz. Naturf. Ges. 105, 85-93;* A Einstein 1924:

Invece che di "etere" si può parlare altrettanto bene di "qualità fisiche dello spazio". […] ErnstMach […] tentò di evitare l'ipotesi dell' "etere della meccanica", cercando di ridurre l'inerzia all'interazione immediata tra la massa considerata e tutte le restanti masse dell'universo. Questa concezione è logicamente possibile, ma come teoria dell'azione a distanza per noi oggi non si può più prendere seriamente in considerazione. L' etere meccanico da Newton designato come "spazio assoluto", dev'essere quindi da noi considerato come una realtà fisica.

Il problema sollevato da Einstein, per quanto riguarda l'impostazione machiana, può essere facilmente compreso riprendendo l'esempio della piattaforma rotante. Quando lo sperimentatore aziona il pulsante e mette in rotazione la piattaforma rispetto a terra, da subito si osserva un moto curvilneo del corpo materiale lanciato radialmente rispetto a quel riferimento, da subito, quindi, quel riferimento cessa di essere inerziale. Ciò esclude che le stelle fisse possano aver un ruolo poichè sarebbe necessario un lungo tempo ad una qualche azione fisica per propagarsi dalle stelle fisse alla piattaforma. L'unica possibilità, dunque, sarebbe quella di una azione a istantanea (azione a distanza) la quale però, dopo la relatività ristretta, 'non si può più prendere seriamente in considerazione'.

Dunque, secondo l' A.Einstein degli anni tardi, pur rappresentando un utile criterio empirico, l'ipotesi di Mach, che riconduce la causa dell'inerzia all'azione delle stelle fisse, non può essere accolta in quanto presuppone inaccettabile (almeno fino ad ora) azione a distanza. Come suggerì Newton, **non rimane allora che attribuire tale causa allo 'spazio', magari ad uno spazio più fisico, capace di giocare un ruolo attivo nei processi, come il nome di 'etere' suggerisce**:

Una posizione contemporanea, da *Relativismo ed etere di Lorentz*, relazione su invito, F. Selleri :

Che dire, oggi, dell'etere relativistico di Einstein? Beh, in primo luogo che il ritorno all'etere è un'operazione dettata dal buon senso: lo spazio vuoto dotato di proprietà fisiche può benissimo essere chiamato «etere», […]

Principio di relatività galileiano

Nonostante non si siano ancora chiarite a fondo le circostanze fisiche che determinano l'inerzialità a meno di un riferimento, risulta essere un punto fermo acquisito che **attraverso la validità delle leggi meccaniche possiamo solo distinguere tra sistemi di riferimento inerziali e non inerziali.** Tale fatto a sua volta implica che **tutti i riferimenti inerziali siano tra loro equivalenti** una proprietà delle leggi meccaniche di grande rilevanza:

Principio di Relatività Galileiano

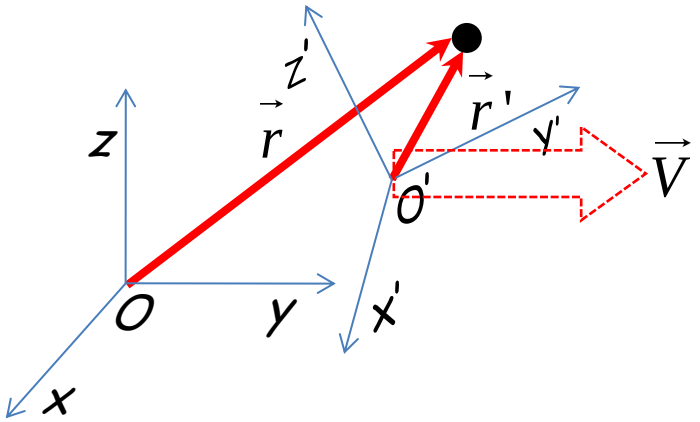
per mezzo delle leggi meccaniche non è possibile distinguere un sistema di riferimento inerziale tra gli infiniti possibili

secondo le leggi meccaniche tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti

per mezzo di esperimenti meccanici non è possibile determinare lo stato di moto uniforme (ovvero la velocità) di un riferimento inerziale

secondo le leggi meccaniche non esiste un riferimento inerziale privilegiato

le leggi meccaniche sono simmetriche rispetto al cambiamento di riferimento inerziale



Rimandando altre considerazioni al seguito, sottolineiamo che **il principio dichiara l'equivalenza dei riferimenti inerziali limitatamente alle leggi meccaniche e non rispetto a tutte le leggi fisiche.**

Poiché attraverso le leggi meccaniche non è possibile determinare lo stato di moto di un riferimento inerziale, ne consegue anche che **non sia possibile determinare nemmeno la direzione del moto e la posizione nello spazio del riferimento.** Possiamo allora affermare che devono valere le seguenti proprietà:

Isotropia ed Omogeneità delle leggi meccaniche

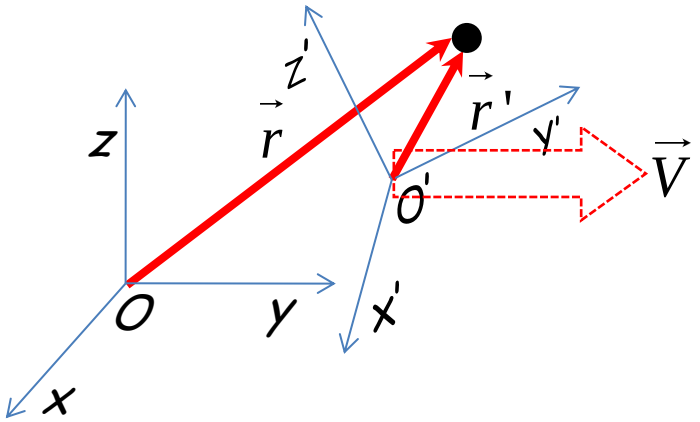
per mezzo delle leggi meccaniche non è possibile distinguere l'orientamento e la posizione nello spazio di un riferimento inerziale

secondo le leggi meccaniche tutti le orientazioni e le posizioni nello spazio dei riferimenti inerziali sono equivalenti

attraverso esperimenti meccanici non è possibile determinare l'orientazione e la posizione nello spazio di un riferimento inerziale

secondo le leggi meccaniche non esiste una orientazione ed una posizione spaziale privilegiata del riferimento inerziale

le leggi meccaniche sono simmetriche rispetto alle rotazioni e traslazioni del riferimento inerziale



Come prima sottolineiamo che **il principio dichiara la simmetria ed isotropia dello spazio limitatamente alle leggi meccaniche e non rispetto a tutte le leggi fisiche.**

Il principio di relatività in meccanica

Limitatamente all'ambito della meccanica, che allora comunque copriva tutto ciò che poteva definirsi realtà fisica, l' *impossibilità di stabilire lo stato di moto o di quiete di un osservatore* (soggetto ad un moto tranquillo, ovvero inerziale) è sicuramente nota dall'antichità:

La scuola alessandrina, in particolare **Aristarco di Samo** (310-230 a.C.), aveva anticipato molte delle conclusioni di Copernico compresa la centralità del sole ed il moto terrestre attorno ad esso. Dunque doveva avere chiaro che tale moto non provocava effetti osservabili per coloro che si trovavano sulla terra (non ne siamo certi poiché le opere originali sono perdute e conosciamo le idee di Aristarco solo attraverso le citazioni di altre opere posteriori quali l'*Arenario* di Archimede).

Certamente tale concetto era molto chiaro a N. Copernico:

La inosservabilità dello stato di moto, *da De revolutionibus orbium coelestium*, N. Copernico 1543:

Fra cose che si muovono a uguale velocità verso il medesimo punto, non si percepisce alcun movimento […]

quando una nave viaggia nella bonaccia, i naviganti vedono tutte le cose che sono fuori di essa muoversi ad immagine del suo movimento e, inversamente, credono se stessi e tutto ciò che hanno con sé in riposo […]

Ma che potremo dire, dunque, delle nubi e di tutte le altre cose sospese nell'aria, sia di quelle che tendono al basso come di quelle che, invece, volgono verso l'alto ? Niente altro se non che non solo la Terra con l'elemento acqueo che le è unito si muove in tal modo, bensì anche una parte non trascurabile dell'aria […]

E fu espresso in modo compiuto da Galileo:

La inosservabilità dello stato di moto, dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo,* G. Galilei 1632:

[…] Rinserratevi nella maggiore stanza che sia sotto coperta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi dei pescetti;

sospendasi anco in alto qualche secchiello che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quegli animaletti volanti con pari velocità vadano verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto […]

Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benchè niun dubbio ci sia che mentre 'l vassello sta fermo non debbano succedere così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità, chè (purchè il moto sia uniforme e non fluttuante […]) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina oppure sta ferma […]

Ancor prima che la meccanica ricevesse il suo assetto definitivo da parte di I. Newton, Galileo intuì con chiarezza una delle sue proprietà più profonde espressa oltretutto con un taglio concettuale assai moderno: **i riferimenti inerziali in moto tra loro con velocità uniforme sono tutti 'equivalenti' nel senso che gli esperimenti meccanici forniscono, in tali riferimenti, gli stessi risultati e sono pertanto governati dalle stesse leggi.** Non siamo molto lontani, come si vede, dalla affermazione che le leggi meccaniche sono simmetriche rispetto al cambiamento di riferimento inerziale, un modo assolutamente moderno di impostare il problema!

Le Trasformazioni di Galileo

Se vogliamo esplorare a fondo il significato e le implicazioni del principio di relatività galileiano, dobbiamo essere in grado di scrivere le leggi meccaniche nei diversi riferimenti inerziali la qual cosa comporta, ancor prima, che si sia in grado di scrivere le posizioni, le velocità, le accelerazioni, le masse e le forze nei diversi riferimenti. In una parola si pone il problema di stabilire come si trasformino, passando da un riferimento inerziale all'altro, le grandezze fisiche e loro misure a partire da quelle fondamentali. Dunque per cominciare

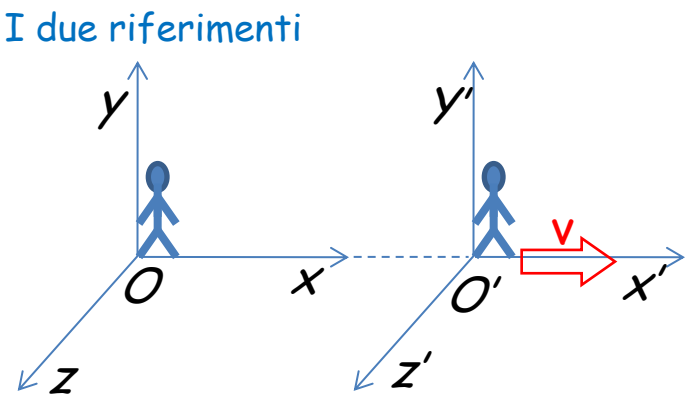
come si trasformano, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, le misure di posizione e di tempo?

Per impostare il problema immaginiamo che vi siano due diversi sistemi inerziali *Oxyz* e *O'x'y'z'*. E' evidente che nel caso generale i due riferimenti potrebbero differire nella orientazione degli assi, inoltre la velocità relativa potrebbe avere una qualunque direzione nello spazio. Tutto ciò costituirebbe una complicazione di natura geometrica priva di contenuto fisico per cui assumeremo la seguente situazione

i) i riferimenti *Oxyz* e *O'x'y'z'* hanno assi paralleli con gli assi *x* e *x'* sulla stessa retta;

ii) il riferimento *Oxyz* è pensato in quiete ed il riferimento *O'x'y'z'* in moto rettilineo uniforme con velocità *v* diretta lungo l'asse *x*

iii) in quiete, in ciascuno dei due riferimenti, si trovano due osservatori *O* ed *O'* dotati di regoli e cronometri identici per compiere le misure di posizione e tempo. Inoltre, i cronometri sono regolati in modo tale che segnino entrambi *t=0* quando le origini *O* ed *O'* coincidono.



Ciò premesso immaginiamo che entrambi gli osservatori vogliano determinare la posizione di un certo punto materiale P rispetto ai due riferimenti. Assumiamo ad esempio il punto di vista dell' **osservatore O** (considerazioni del tutto analoghe valgono anche per l'osservatore O')

Dopo avere misurato un certo numero di segmenti con il proprio regolo stabilisce che, **ad un certo istante to, il punto P ha le seguenti coordinate**

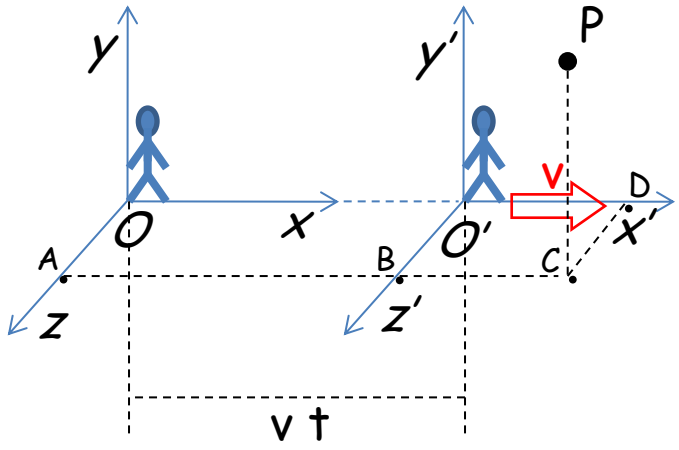
(1) $x'_O \; y'_O \; z'_O$ rispetto al riferimento O'

$x_O \; y_O \; z_O$ rispetto al riferimento O

e che tra queste coordinate valgono le relazioni

(2) $x'_O = x_O - v\,t_O \qquad y'_O = y_O \qquad z'_O = z_O$

La posizione di P al tempo *t* rispetto ad O ed O' misurata da O e O'



E' irresistibile la tentazione di pensare che queste siano le trasformazioni delle coordinate di P nel passaggio da O (coordinate senza apice) ad O' (coordinate con apice). E' invece importantissimo notare che x'O è effettivamente la coordinata di P rispetto al riferimento O' ma come misurata da O non da O'. Dunque le (1) non sono ancora formule di passaggio da un riferimento all'altro! Per diventarlo **dobbiamo capire quale relazione leghi x'O a x'O'** che è la coordinata di P rispetto ad O' misurata da O'. In modo analogo occorre pure **determinare le relazioni tra le coordinate y'O e y'O', z'O e z'O'** ed infine **la corrispondenza tra i tempi della misura to e to'.**

Premesso che da un punto di vista metodologico le relazioni esistenti tra le corrispondenti coordinate spaziali e temporali misurate da O ed O' dovrebbero essere determinate per via sperimentale, prima che Einstein sollevasse il problema con la formulazione della Teoria della Relatività ristretta, un esperimento in tal senso non è mai stato fatto, ne pensato, ne ritenuto necessario: semplicemente **nella fisica classica si assumeva che gli intervalli spaziali e temporali avessero lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali**

(3) $x'_{O'} = x'_{O} \quad y'_{O'} = y'_{O} \quad z'_{O'} = z'_{O} \quad x_{O'} = x_{O} \quad y_{O'} = y_{O} \quad z_{O'} = z_{O} \quad \text{e} \quad t_{O'} = t_{O}$

Tale convinzione - che ha dominato **la meccanica, l'elettromagnetismo, la termodinamica, ed in generale tutta la fisica prerelativistica (fisica classica) –** trovava il suo punto d'appoggio nella **concezione newtoniana dello spazio e del tempo assoluti** (come Einstein fu in grado di dimostrare, i sottili conflitti tra meccanica ed elettromagnetismo di cui diremo, traevano la propria origine proprio dalla infondatezza di questa ipotesi)

Il Tempo Assoluto, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* I. Newton 1687:

[…] il tempo assoluto vero e matematico, in sé e per sua natura, fluisce uniformemente senza relazione a qualcosa di esterno, e con un altro nome si chiama durata; il tempo relativo, apparente e comune, è la misura sensibile ed esterna [...] della durata attraverso il mezzo del movimento, ed esso è comunemente usato al posto del tempo vero; esso è l'ora, il giorno, il mese, l'anno. Lo spazio assoluto […]

Lo spazio Assoluto, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* I. Newton 1687:

Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale ed immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso come lo spazio immobile; cosí la dimensione di uno spazio sotterraneo o aereo o celeste viene determinata dalla sua posizione rispetto alla terra. Lo spazio assoluto e lo spazio relativo sono identici per grandezza e specie, ma non sempre permangono identici quanto al numero. Infatti se la Terra, per esempio, si muove, lo spazio della nostra aria, che relativamente alla Terra rimane sempre identico, sarà ora una parte dello spazio assoluto attraverso cui l'aria passa, ora un'altra parte di esso; e cosí muterà assolutamente in perpetuo.

Richiamiamo ora la formula (2)

$$x'_O = x_O - v t_O \qquad y'_O = y_O \qquad z'_O = z_O$$

se, in accordo con le assunzioni della fisica classica assumiamo la validità delle (3), possiamo interpretare le coordinate x'O, y'O e z'O misurate da O come misure effettuate da O' e scrivere pertanto

$$(4) \qquad x'_{O'} = x_O - v t_O \qquad y'_{O'} = y_O \qquad z'_{O'} = z_O$$

alle quali possiamo aggiungere l'eguaglianza

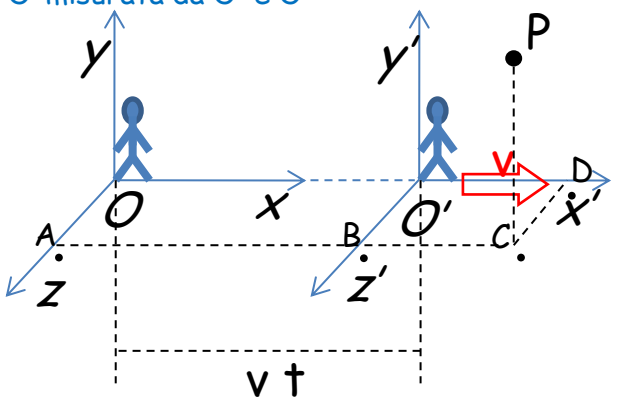
$$(5) \qquad t_{O'} = t_O$$

Le (4) e (5) prendono allora forma di relazioni tra le misure di spazio e tempo degli osservatori O ed O' riferite ai propri sistemi di riferimento ed ai propri orologi. Se ricordiamo che le coordinate senza accento sono misurate da O e quelle con accento da O', possiamo semplificare la notazione omettendo i pedici pervenendo alle seguenti relazioni note con il nome di

Trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

La posizione di P al tempo *t* rispetto ad *O* ed *O'* misurata da *O* e *O'*



Le Trasformazioni di Galileo (TdG) sono state dedotte sulla base della ipotesi che gli intervalli spaziali e temporali abbiano valori indipendenti dall'osservatore inerziale che li misura. Invertendo il procedimento, ci attendiamo allora che dalle trasformazioni si possa ottenere tale indipendenza.

Immaginiamo che, nel riferimento O' nell'istante di tempo t', due corpi materiali P_1 e P_2 occupino due differenti posizioni dello spazio e di domandarci quale sia la distanza tra le loro posizioni misurata da O'. Utilizzando i propri regoli egli troverà le coordinate (x'_1, y'_1, z'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2) e quindi la distanza

$$d' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

D'altra parte le Trasformazioni di Galileo forniscono le relazioni con le coordinate degli stessi punti misurate dall'osservatore O al tempo t=t'

$$x'_1 = x_1 - vt \qquad y'_1 = y_1 \qquad z'_1 = z_1$$

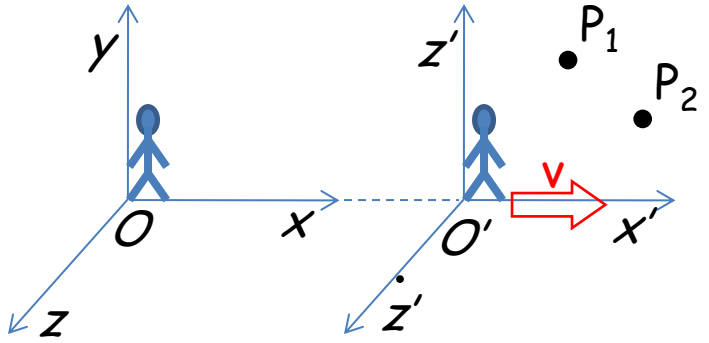
$$x'_2 = x_2 - vt \qquad y'_2 = y_2 \qquad z'_2 = z_2$$

che sostituite nella espressione di **d'** forniscono

$$d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d$$

la quale mostra che gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa distanza tra i corpi materiali P_1 e P_2.

La distanza tra le posizioni dei corpi materiali P e Q al tempo t' misurata da O'



Come atteso dunque **secondo le Trasformazioni di Galileo la distanza tra due dati punti dello spazio (intervallo spaziale) è la stessa per tutti gli osservatori inerziali** o equivalentemente che **la distanza tra due dati punti dello spazio non dipende dallo stato di moto uniforme**.

In questa forma si comprende subito l'importante fatto fisico che, secondo le TdG la lunghezza dei corpi materiali non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

Possiamo ragionare in modo analogo sulle distanze temporali immaginando che in un determinato punto dello spazio del riferimento O' avvenga un certo evento fisico caratterizzato da una certa durata: ad esempio un corpo materiale appeso ad un filo (pendolo) che al tempo t'_1 si trova in una certa posizione dello spazio e che al tempo t'_2 ritorna nella stessa posizione (nel riferimento O'). La durata temporale di questo evento misurata da O' vale evidentemente

$$\delta' = t'_2 - t'_1$$

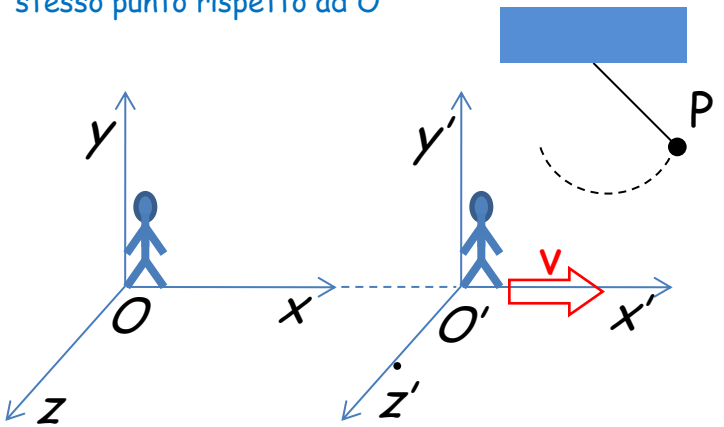
d'altra parte dalle Trasformazioni di Galileo si ha

$$t'_1 = t_1 \qquad t'_2 = t_2$$

che sostituite nella prima espressione forniscono

$$\delta' = t_2 - t_1 = \delta$$

Il corpo materiale P del pendolo solidale con il riferimento O' dopo un certo tempo ritorna nello stesso punto rispetto ad O'



Dunque gli osservatori inerziali O ed O' misurano la stessa durata dell'evento fisico considerato. Possiamo allora affermare che **secondo le trasformazioni di Galileo, la durata di un dato evento (intervallo temporale è la stessa per tutti gli osservatori inerziali** o equivalentemente che **la durata di un dato evento non dipende dallo stato di moto uniforme**.
Si noti che in questa forma si comprende subito l'importante fatto fisico secondo il quale, assumendo le trasformazioni di Galileo, il ritmo di un cronometro non dipende dall'eventuale stato di moto uniforme.

Mettendo insieme le conclusioni ottenute possiamo affermare che
secondo le TdG gli intervalli spaziali e temporali assumono lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali od anche che **gli intervalli spaziali e temporali sono assoluti per tutti gli osservatori inerziali .**

La trasformazione delle grandezze meccaniche

Una volta in possesso delle Trasformazioni di Galileo siamo in grado di connettere le misure di posizione e tempo eseguite da due osservatori inerziali O e O' in merito allo stesso evento fisico. Si tratta di un avanzamento fondamentale poiché, da queste, potremo costruire le leggi di trasformazione delle misure di velocità, accelerazione e forza e, alla fine, delle leggi meccaniche stesse. Riusciremo così a stabilire *in che modo due diversi osservatori inerziali scrivono le leggi di un dato fenomeno meccanico.*

Velocità

Le componenti cartesiane del vettore velocità **w** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque la velocità misurata da O' vale

$$\vec{w}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \qquad (1)$$

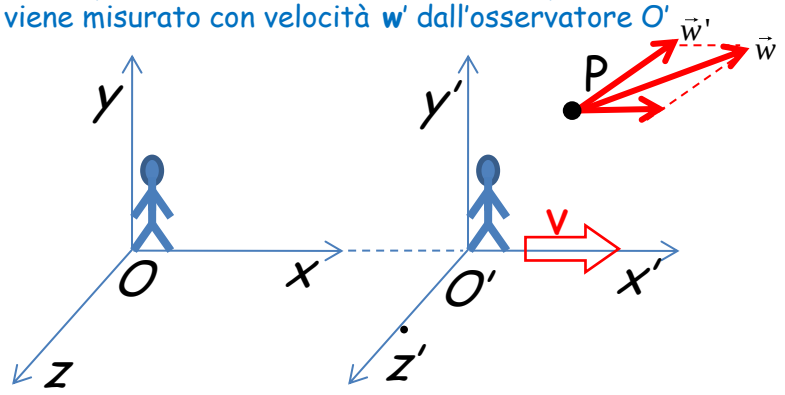
mentre quella misurata da O vale

$$\vec{w} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

Un corpo materiale che ha velocità **w** rispetto ad O viene misurato con velocità **w'** dall'osservatore O'



e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{w}' = \left(\frac{d(x-vt)}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt} - v, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) - (v, 0, 0)$$

ora si noti che la prima parentesi nell'ultimo membro è proprio la velocità **w** misurata da O (vedi la (2)) mentre la seconda parentesi è la velocità **v** del riferimento O' rispetto ad O dunque

$$\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v} \qquad \vec{w} = \vec{w}' + \vec{v}$$

Dato un riferimento O' in moto uniforme con velocità v rispetto ad O, un corpo materiale misurato con velocità w' dall'osservatore O' viene misurato con velocità w=w'+v dall'osservatore O.

Accelerazione

Le componenti cartesiane del vettore velocità **a** di un certo corpo materiale rispetto ad un determinato riferimento si ottengono derivando rispetto al tempo due volte la posizione del corpo materiale rispetto a quel riferimento. Dunque l'accelerazione misurata da O' vale

$$\vec{a}\,' = \left(\frac{d^2x'}{dt'^2}, \frac{d^2y'}{dt'^2}, \frac{d^2z'}{dt'^2}\right) \qquad (1)$$

mentre quella misurata da O vale

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \qquad (2)$$

Richiamando le trasformazioni di Galileo

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

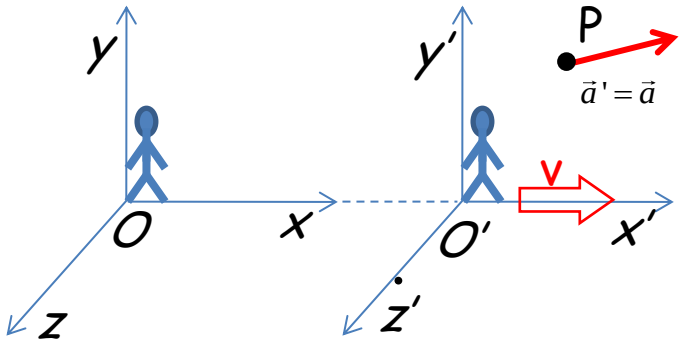
e sostituendo in (1) otteniamo

$$\vec{a}\,' = \left(\frac{d^2(x-vt)}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

ora si noti che la parentesi nell'ultimo membro è proprio l'accelerazione **a** misurata da O (vedi la (2)) dunque

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}}$$

Un corpo materiale che ha accelerazione **a'** rispetto ad O' viene misurato con la stessa accelerazione **a** dall'osservatore O



Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della accelerazione impressa ad un corpo materiale.

Forza

Ora cercheremo di stabilire la relazione esistente tra le misure della stessa forza da parte di due osservatori inerziali.

A questo proposito ricordiamo che una forza agente su di un corpo materiale è assimilabile alla azione sviluppata da un dinamometro applicato al corpo materiale stesso e rappresentata da un segmento orientato (vettore) la cui direzione e verso coincide con quella lungo la quale è disposto il dinamometro e la cui lunghezza è proporzionale alla intensità misurata dal dinamometro.

Dunque per capire come due osservatori inerziali vedono la stessa forza è sufficiente chiedersi in che modo due osservatori inerziali vedono un segmento orientato di data lunghezza.

Immaginiamo allora che su un certo corpo materiale agisca una forza che l'osservatore O' misura e poi rappresenta con il segmento orientato AB, disposto ad esempio nel piano z'x', ed avente componenti AH lungo x' e HB lungo z'.

In che modo il segmento orientato AB (sostituto della forza) viene visto dall'osservatore O ?

Per rispondere è sufficiente ricordare che secondo le trasformazioni di Galileo la distanza tra due punti dello spazio assume lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali. Ne consegue allora che i segmenti AH, HB ed AB avranno lo stessa lunghezza sia per O' che per O il che implica che l'osservatore O misuri la stessa forza (uguale cioè in intensità direzione e verso) misurata da O'

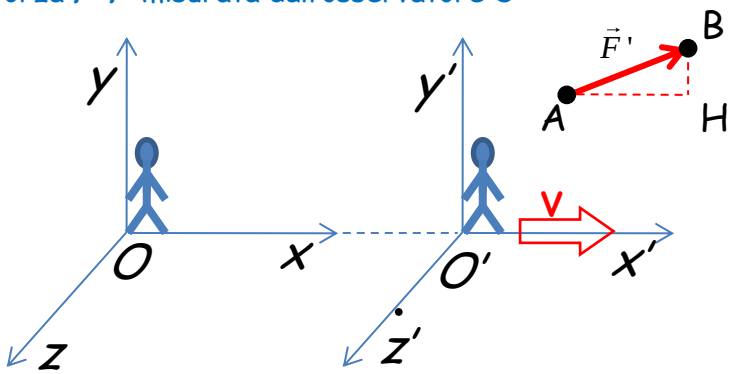
$$\vec{F}' = \vec{F}$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della forza applicata ad un corpo materiale.

Massa inerziale

Da ultimo cercheremo la relazione esistente tra le misure della massa inerziale di un corpo da parte di due osservatori

Un corpo materiale soggetto ad una forza ***F'*** misurata dall'osservatore O' sarà soggetto ad una forza ***F=F'*** misurata dall'osservatore O



inerziali.

A questo proposito è sufficiente ricordare che la massa inerziale di un corpo materiale si misura determinando il rapporto tra il modulo della forza applicata ed il modulo della accelerazione impressa $m=|\mathbf{F}|/|\mathbf{a}|$. Dato che tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse forze e le stesse accelerazioni dobbiamo allora attenderci che tutti gli osservatori inerziali misurino anche lo stesso valore della massa inerziale

$$m' = m$$

Tutti gli osservatori inerziali misurano lo stesso valore della massa inerziale di un corpo materiale.

La validità delle leggi meccaniche nei riferimenti inerziali

Abbiamo appreso il fatto fondamentale che il modo in cui sono connesse tra loro le misure di spazio e tempo eseguite da due differenti osservatori inerziali in merito allo stesso evento fisico (trasformazioni di Galileo) determina anche le relazioni tra le misure di accelerazione, forza e massa inerziale. In particolare emerge il fatto rilevante che **in merito ad un dato fenomeno meccanico, tutti gli osservatori inerziali misurano le stesse accelerazioni, forze e masse inerziali.** Quali sono le implicazioni per quanto riguarda le leggi meccaniche?

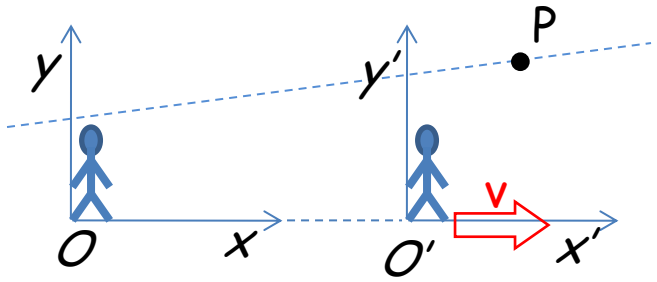
Primo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O', un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze nulla. Sulla base del primo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto rettilineo uniforme. Per fissare le idee immagineremo che il moto si sviluppi nel piano z'x' con una velocità w lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'asse x'. Le leggi orarie del moto, nel riferimento dell'osservatore O', saranno (vedi figura)

$$x' = (w'\cos\alpha')t' \qquad (1)$$
$$y' = (w'\sin\alpha')t' + y_0'$$

Questo principio apparirà valido anche per l'osservatore O?

Il corpo materiale P si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento O'



Per capire quale traiettoria osserva O basterà tenere conto delle *Trasformazioni di Galileo x'=x-vt, z'=z, t'=t* e sostituirle nelle (1). Si ottengono allora le equazioni

$$x - vt = (w'\cos\alpha')t \qquad x = (w'\cos\alpha' + v)t \qquad (2)$$
$$y = (w'\sin\alpha')t + y_0' \qquad y = (w'\sin\alpha')t + y_0'$$

che descrivono un moto rettilineo uniforme nel piano yx con velocità $w=[(w'\cos\alpha'+v)^2+(w'\sin\alpha')^2]^{1/2}=[w'^2+v^2-2w'v\cos\alpha']^{1/2}$ inclinata di un angolo $\alpha=\mathrm{arctg}[w'\sin\alpha'/(w'\cos\alpha'-v)]$ rispetto all'asse x. Avendo poi le forze lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali, anche l'osservatore O misurerà una forza nulla agente sul corpo materiale.

Concludiamo allora che anche l'osservatore O misura un moto rettilineo uniforme nel caso in cui la forza agente sul corpo materiale sia nulla: **il primo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali.**

Secondo principio della dinamica

Supponiamo che, in un riferimento inerziale O', un corpo materiale sia soggetto ad una risultante delle forze non nulla. Sulla base del secondo principio allora esso deve muoversi (rispetto ad O') di moto accelerato secondo l'equazione

$$\vec{F}' = m'\vec{a}'$$

Quale equazione scriverà l'osservatore O? Per capirlo è sufficiente ricordare che, misurando tutti gli osservatori inerziali le stesse accelerazioni , forze e masse inerziali, egli scriverà semplicemente

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

con la condizione ***F=F'***, ***m=m'***, ***a=a'***. Dunque l'osservatore O scriverà esattamente la stessa espressione del secondo principio scritta dall'osservatore O'. Giungiamo allora alla conclusione che : **tutti gli osservatori inerziali scrivono esattamente la stessa espressione (con lo stesso valore delle forze, masse inerziali ed accelerazioni) del secondo principio della dinamica**.

Si può esprimere lo stesso contenuto fisico in modo più formale, dicendo che a seguito di un cambiamento di riferimento inerziale (ovvero di una trasformazione di Galileo), il secondo principio della dinamica rimane esattamente lo stesso (ovvero è invariante). Dunque **il secondo principio della dinamica è invariante per trasformazioni di Galileo.**

Terzo principio della dinamica

Immaginiamo siano dati due corpi materiali in mutua interazione e che l'osservatore O' misuri su tali corpi forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la loro congiungente in accordo con il terzo principio della dinamica.

Tutto questo risulterà valido anche per un altro osservatore inerziale O? Dato che le forze sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali possiamo certamente concludere che sarà così: anche l'osservatore O misurerà forze uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la congiungente i corpi materiali verificando quindi il terzo principio. Concludiamo allora che **il terzo principio della dinamica vale per tutti gli osservatori inerziali**.

Conclusioni

E' necessario commentare il percorso fatto fino a questo punto per comprendere il significato fisico dei risultati ottenuti.

Il primo rilevante risultato che vogliamo richiamare riguarda il fatto che le trasformazioni di Galileo possono essere ottenute a partire da precise ipotesi sulla natura dello spazio e del tempo che riassumiamo nella formula di spazio e tempo assoluti.

Poi, partendo da tali trasformazioni, abbiamo ricavato le analoghe leggi di trasformazione delle grandezze meccaniche (accelerazione, forza, massa inerziale) che ci hanno permesso di mostrare che le leggi meccaniche valgono in tutti i riferimenti inerziali che è ciò che afferma, in ultima analisi, il principio di relatività galileiano.

Riassumendo, **a partire dalle proprietà dello spazio e del tempo abbiamo ottenuto che le leggi meccaniche devono soddisfare il principio di relatività galileiano**.

Invertendo ora l'intero ragionamento, potremmo allora partire **dal principio di relatività galileiano e dalle leggi meccaniche per ottenere, alla fine, le trasformazioni di Galileo**.

In questo modo ci rendiamo conto che possiamo rispondere ad un quesito che forse alcuni di voi si sono posto: **per quale motivo le leggi meccaniche soddisfano il principio di relatività galileiano?** La risposta è **che le trasformazioni delle misure di spazio e tempo, ovvero le trasformazioni di Galileo, sono tali per cui le leggi meccaniche finiscono per essere valide in tutti i riferimenti inerziali**. Dunque, in ultima analisi, **il principio di relatività galileiano delle leggi meccaniche trova la sua spiegazione nelle trasformazioni di Galileo ovvero in certe proprietà dello spazio e del tempo** (spazio e tempo assoluti).

Si tratta di un risultato di grande rilevanza poiché ci fa comprendere che dal modo in cui si trasforma un insieme di leggi fisiche nel passaggio da un riferimento inerziale all'altro possiamo dedurre le proprietà dello spazio e del tempo che quelle leggi sottointendono.

Le leggi meccaniche, come abbiamo visto, si fondano sulla concezione dello spazio e del tempo assoluti codificata matematicamente dalle trasformazioni di Galileo.

Il passo successivo non può che essere quello di comprendere quale sia la concezione dello spazio e del tempo su cui si fonda l'atro pilastro della fisica classica, l'elettromagnetismo.

Le leggi dell'elettromagnetismo

L'elettromagnetismo si pone l'obiettivo di studiare le forze elettriche e magnetiche, le forze che, assieme a quelle gravitazionali, dominano il mondo macroscopico.
A differenza della teoria della gravitazione di Newton, l'elettromagnetismo, per espressa volontà di Faraday e Maxwell, venne sin dall'inizio formulato nel quadro del *concetto di campo* che permette di superare il paradosso fisico dell'azione istantanea tra corpi materiali distanti nello spazio (azione a distanza).

Secondo l'elettromagnetismo la carica elettrica ***Q*** e la corrente elettrica ***i*** modificano lo spazio circostante determinando la presenza di campi elettrici ***E*** (generati dalle cariche elettriche) e campi magnetici ***B*** (generati dalle correnti elettriche) secondo un insieme di relazioni dette ***Equazioni di Maxwell*** che riportiamo nella *forma integrale*

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{S_L} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_{S_L}\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Qualora altre cariche elettriche che indicheremo con ***q*** si trovino nello spazio ove siano presenti questi campi elettrici ***E*** e magnetici ***B*** esse saranno soggette ad una forza, detta ***forza di Lorentz***, data dalla espressione

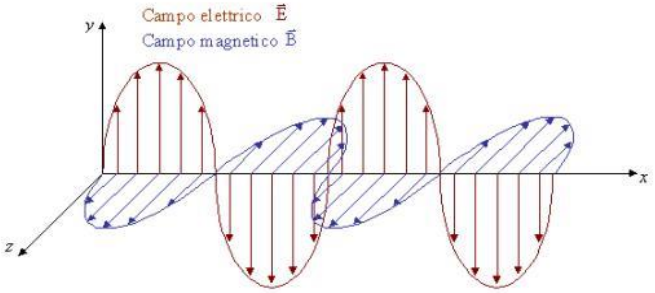
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

infine la *carica elettrica che risulta essere una proprietà intrinseca della materia non può essere ne creata ne distrutta* ed è pertanto soggetta alla ***legge della conservazione della carica*** $\nabla\cdot\vec{J} = -\partial\rho/\partial t$

Secondo l'elettromagnetismo, *l'azione di una carica elettrica su un'altra, distante nello spazio, non è una azione diretta ma si realizza in due fasi fisicamente distinte: la prima carica crea nello spazio circostante un campo elettrico e/o magnetico, che una seconda carica, in esso immersa, percepisce subendo l'azione elettrica e/o magnetica* (quando una azione naturale - gravitazionale, elettrica/magnetica, forte o debole - viene descritta con questo meccanismo si dice che è stata formulata una ***teoria di campo*** per quella azione).
La teoria elettromagnetica prevede che il campo elettrico e/o magnetico, in alcuni contesti, riveli la propria esistenza in modo assai diretto: quando delle cariche elettriche vengono 'scosse' (ovvero accelerate dando luogo a correnti elettriche variabili nel tempo) *i campi elettrici e magnetici ad esse associati cominciano ad oscillare in certa specifica configurazione* detta ***onda elettromagnetica*** (raggi X, luce, onde radio). Tale onda si allontana dalle cariche alla fantastica ***velocità c,*** soddisfacendo una nota equazione detta
equazione delle onde di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}} = 299\,792\,458\ m/s$$



L'onda trasporta con se *quantità di moto* (pressione di radiazione), *momento angolare* ed *energia* che dopo pochissimo tempo possono essere prelevati in punti assai distanti da quello in cui ha avuto origine. Dato che si può mostrare che la luce è fisicamente un'onda elettromagnetica, possiamo affermare che l'elettromagnetismo realizza una potente sintesi riconducendo ad una unica causa - la carica elettrica - i fenomeni elettrici, magnetici ed ottici.

Tuttavia contiene aspetti assai problematici : rispetto a quale riferimento si deve intendere misurata la velocità c di propagazione dell'onda elettromagnetica ? Cosa sono i campi elettrici e/o magnetici ?

L'etere come possibile interpretazione dell'elettromagnetismo

Sul finire dell'800, sembrava assolutamente naturale **porre in relazione l'elettromagnetismo con i fenomeni ondulatori allora noti, i quali, oltretutto, fornivano una semplice risposta ai precedenti quesiti.** Si sapeva infatti che all'interno dei *mezzi materiali elastici*, solidi, liquidi o gassosi che fossero, gli stati di distensione e compressione del mezzo potevano propagarsi, trasportando quantità di moto, momento angolare ed energia, e che tale propagazione era descritta proprio dalla equazione delle onde di D'Alembert .

Per questo, sembrò inevitabile immaginare l'esistenza di un **mezzo fisico *elastico*** che poteva essere perturbato localmente dalle cariche elettriche in quiete (cariche statiche) ed in movimento (correnti elettriche). La perturbazione, consistente in stati di compressione e distensione del mezzo (identificati con i campi elettrici e/o magnetici), poteva poi propagarsi allontanandosi dal punto in cui era stata generata (onda elettromagnetica).

In completa analogia con i fenomeni ondulatori allora noti, la velocità c doveva sicuramente intendersi come riferita al mezzo fisico stesso.

Infine, tale mezzo non poteva essere di natura materiale convenzionale (come un solido un liquido od un gas) dato che i corpi materiali, come mostra l'esperienza, potevano muoversi all'interno di esso senza subire alcuna resistenza. **Un mezzo fisico con simili proprietà, era stato introdotto in fisica circa 150 anni prima, per spiegare i fenomeni ottici:**

L'etere luminifero, da *Traitè de la lumière*, C. Huygens, 1691:

Se ora si esamina quale può essere questa materia nella quale si estende il movimento che viene dai corpi luminosi, materia che chiamo eterea [etherée], si vedrà che non è la stessa che serve alla propagazione del suono. Poiché si trova che quest'ultima è propriamente l'aria che sentiamo e che respiriamo: e se anche la si toglie da un recipiente, non se ne toglie l'altra materia che serve alla luce. Il che può provarsi racchiudendo un corpo che suona in un recipiente di vetro [...] si può pensare che queste particelle di etere, nonostante la loro piccolezza, siano a loro volte composte di altre parti e che la loro elasticità consista nel movimento molto rapido di una materia molto sottile[...]

L'ottica, progredì rapidamente nel primo decennio dell'800 con le fondamentali ricerche sperimentali di Thomas Young sui fenomeni della diffrazione e, soprattutto, della interferenza, che stabilirono definitivamente *la natura ondulatoria della luce*. La comprensione dei fenomeni ottici fu però completa solo con i lavori di Augustin Jean Fresnel, che oltre ad essere un abile sperimentatore (scoprì il fenomeno della polarizzazione e riprodusse tutti i risultati di Young), era pure un raffinato matematico, capace di formulare una teoria in grado di spiegare tutti fenomeni osservati. In una serie di lavori presentati a più riprese all'Accademia delle scienze di Parigi tra il 1815 ed il 1819, **Frenel sviluppa una teoria dell'ottica fondate sul concetto di etere luminifero:**

L'etere, *A.J. Fresnel 1815-1819*:
[…] è l'incontrarsi di raggi che produce interferenza. Questo mi sembra del tutto opposto all'ipotesi dell'emissione di particelle e conferma il sistema che fa consistere la luce nelle vibrazioni di un fluido particolare […]

Quasi contemporaneamente, le ricerche di Ampere e poi quelle di Faraday prepararono il terreno alla grande sintesi maxwelliana (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873), che porterà alla completa comprensione dei fenomeni elettrici e magnetici ed alla scoperta fondamentale che la luce stessa è un fenomeno elettromagnetico. Il concetto di etere ne uscì ulteriormente rafforzato, poichè *Maxwell stesso pensava che i campi elettrici e magnetici, pensati da Faraday e matematicamente descritti dalla sua teoria, fossero stati di tensione di un mezzo capace di propagarli sotto forma di onde elettromagnetiche.* Inoltre, tutto l'apparato formale dell'elettromagnetismo (flussi e circuitazioni dei campi vettoriali) era stato fortemente influenzato dall'idrodinamica di Stokes, sviluppata in quegli stessi anni. Dunque, i successi dell'elettromagnetismo e le convinzioni dello stesso Maxwell supportavano fortemente l'idea di etere:

La voce 'Ether', *nona edizione dell'Enciclopedia Britannica, J.C. Maxwell, 1878:*
[…]Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza […]

Le implicazioni concettuali della esistenza dell'etere

Dal punto di vista dei fisici dell'800 (e forse anche dal nostro!) il concetto di *etere* forniva una spiegazione semplice e diretta dei fenomeni elettromagnetici ed ottici e delle loro proprietà.

Come accennato, l'etere presentava aspetti problematici che lo rendevano un **mezzo meccanico non convenzionale**: lo si pensava particolarmente **rigido** in quanto capace di trasmettere, ad altissima velocità, le vibrazioni elettro-magnetiche, ma, al tempo stesso, altrettanto **rarefatto** poiché incapace di opporre resistenza all'avanzamento dei corpi materiali.

A fronte di queste difficoltà, prevaleva però il grande vantaggio di fornire una precisa risposta al significato fisico da attribuire alla velocità c dell'onda elettromagnetica che risultava essere semplicemente **la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto al proprio mezzo di propagazione ovvero rispetto all'etere,** in analogia con tutti i fenomeni ondulatori allora noti.

La scelta di questo assetto concettuale aveva alcune conseguenze di ordine generale che è bene discutere.

In primo luogo, la velocità della luce, prevista dalle equazioni di Maxwell, doveva essere interpretata come la velocità della luce nello specifico riferimento in quiete rispetto all'etere, e non rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, dove invece tale velocità doveva essere diversa. In sostanza si doveva ammettere che, attraverso esperimenti con fenomeni di natura elettromagnetica, fosse possibile individuare, tra gli infiniti riferimenti inerziali, quello particolare, fermo nell'etere, in cui la velocità della luce assumeva il valore c previsto dalle equazioni di Maxwell. Un vero e proprio riferimento privilegiato che conduceva alla inevitabile conclusione che **il principio di relatività galileiano non valesse per i fenomeni elettromagnetici.**

A questo riguardo, è bene tenere presente che allora - questo fatto - era poco più che una marginale notazione, poiché nessuno pensava al principio di relatività galileiano come ad uno dei principi portanti della fisica, come suggerito in seguito da Einstein con la formulazione della teoria della relatività ristretta. Secondo la prospettiva di allora, non c'era alcun valido motivo per supporre che qualunque fenomeno naturale dovesse soddisfare il principio di relatività galileiano, per cui si accettava senza problemi che, per mezzo di esperimenti elettromagnetici, si potesse addirittura trovare il riferimento privilegiato in quiete nell'etere, quello nel quale la velocità della luce era uguale a c in tutte le direzioni.

Questa interpretazione aveva un'altra inevitabile conseguenza.

Come lungamente discusso, il fatto che la meccanica soddisfi il principio di relatività galileiano è riconducibile alla invarianza delle equazioni della meccanica rispetto alle trasformazioni di Galileo.

Ora, dato che le equazioni dell'elettromagnetismo, lette nel conteso di etere, violano il principio di relatività galileiano si accettava come fatto ovvio che queste non fossero invarianti rispetto a trasformazioni di Galileo (ometteremo la dimostrazione anche se non è difficile mostrare questo fatto).

In altre parole la non invarianza delle equazioni dell'elettromagnetismo rispetto alle trasformazioni di Galileo non era percepita come il sintomo di un possibile problema a

carico delle trasformazioni stesse ma come un fatto dettato dalla particolare natura dell'elettromagnetismo che, a differenza della meccanica, violava il principio di relatività galileiano. In questo modo non c'era motivo di dubitare delle trasformazioni di Galileo, e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluto su cui erano fondate.

Sul piano generale dei principi possiamo allora riassumere la situazione di allora nel modo seguente

i) le trasformazioni di Galileo sono valide in generale sia per i fenomeni meccanici che elettromagnetici e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluti;

ii) le equazioni della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo e per questo soddisfano il principio di relatività galileiano;

iii) le equazioni dell'elettromagnetismo non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo e per questo non soddisfano il principio di relatività galileiano in accordo con il concetto di etere nel conteso del quale venivano collocate.

Riguardo a quest'ultimo punto, va detto che anche nella prospettiva di allora ci si poteva porre il problema di trovare le trasformazioni di coordinate capaci di lasciare invariate le equazioni dell'elettromagnetismo. In effetti il problema fu posto e risolto (ricordiamo che tali trasformazioni furono trovate nel 1887 da W. Voigt poi nel 1897 da J. Larmor ma, il primo a capire che avevano la proprietà di lasciare invariate le equazioni di Maxwell, fu H.A. Lorentz nel 1900 e poi H. Poincarè nel 1904) tuttavia rimase poco più che un fatto matematico nel quale non si scorgeva alcun contenuto fisico. E non poteva che essere così poiché l'impostazione concettuale appena discussa richiedeva che l'elettromagnetismo dovesse violare il principio di relatività galileiano per cui nessun significato fisico poteva essere attribuito alle trasformazioni di Lorentz che lo lasciavano invariante. Al contrario le corrette trasformazioni fisiche dovevano essere quelle che lo rendevano non invariante: le trasformazioni di Galileo appunto.

Come già sottolineato, ne oggi ne allora poteva esserci una qualche ragione di principio contro un tale assetto concettuale. L'unica osservazione che si può fare è che, sul piano metodologico, era chiaramente necessaria una prova sperimentale diretta per cui, **l'ideazione e lo studio di tecniche capaci di evidenziare l'esistenza dell'etere,** divenne uno dei temi dominanti della fisica della seconda metà dell'800.

Un possibile esperimento per la rivelazione dell'etere

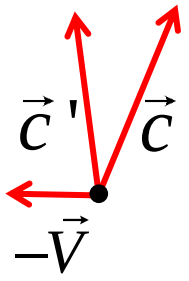
L'idea su cui doveva fondarsi un possibile esperimento per verificare l'esistenza dell'etere deriva quasi immediatamente dalle proprietà che gli venivano attribuite.
Si pensava che l'etere fosse un mezzo rigido e rarefatto che riempiva il cosmo intero dato che si osservava la luce proveniente dalle stelle distanti. **In tale mezzo, le stelle, e con esse il sole, venivano ipotizzate essere in quiete.** Ne risultava che **la terra, a causa del suo moto di rivoluzione attorno al sole con la velocità di circa 30 Km/s, doveva trovarsi in moto rispetto all'etere proprio con quella velocità.**
Questo comportava che **la velocità della luce dovesse valere c in tutte le direzioni per il solo osservatore in quiete rispetto al sole mentre doveva assumere valori diversi per l'osservatore solidale con la terra.** Dato che si assumevano valide le trasformazioni di Galileo, la velocità della luce rispetto ad un riferimento solidale alla terra doveva valere

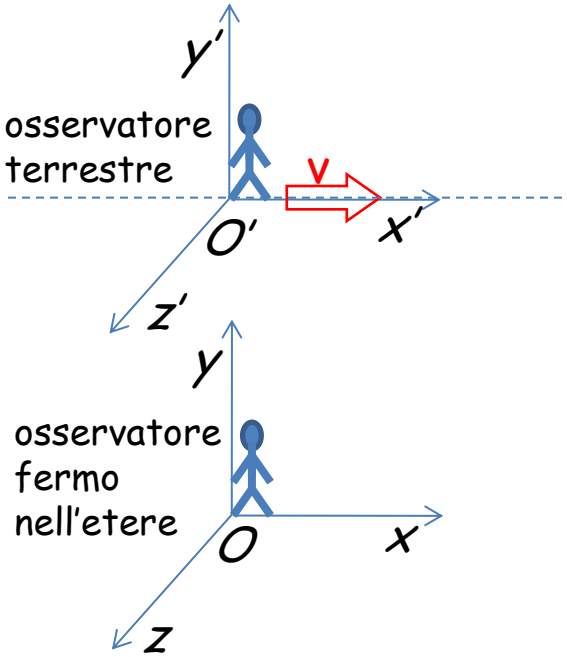
$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V} \qquad (1)$$

In conseguenza di questo fatto, come lo stesso Maxwell suggerì nel 1870, uno sperimentatore terrestre avrebbe dovuto misurare un valore della velocità della luce dipendente dall'angolo esistente tra il raggio luminoso e la direzione del moto terrestre nell'etere (vedi più avanti). Tale valore era evidentemente compreso tra i valori estremi c-V (propagazione della luce nella stessa direzione e verso del moto terrestre nell'etere) e c+V (propagazione della luce nella stessa direzione ma verso opposto a quello del moto terrestre nell'etere) per cui **una misura capace di una sensibilità percentuale dell'ordine di**

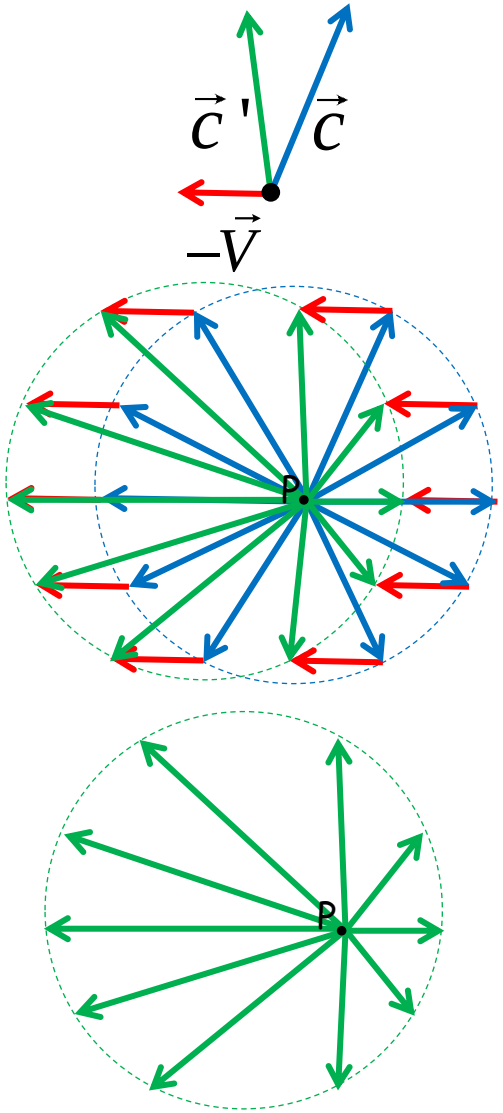
$$\frac{(c+V)-(c-V)}{c} = \frac{2V}{c} = \frac{2\times(30\ km/s)}{(300000\ km/s)} = 2\times10^{-4}$$

avrebbe potuto fornire la prova sperimentale della esistenza (o non esistenza) dell'etere. Oggi una misura così precisa è in generale molto difficile, allora era di una difficoltà estrema!



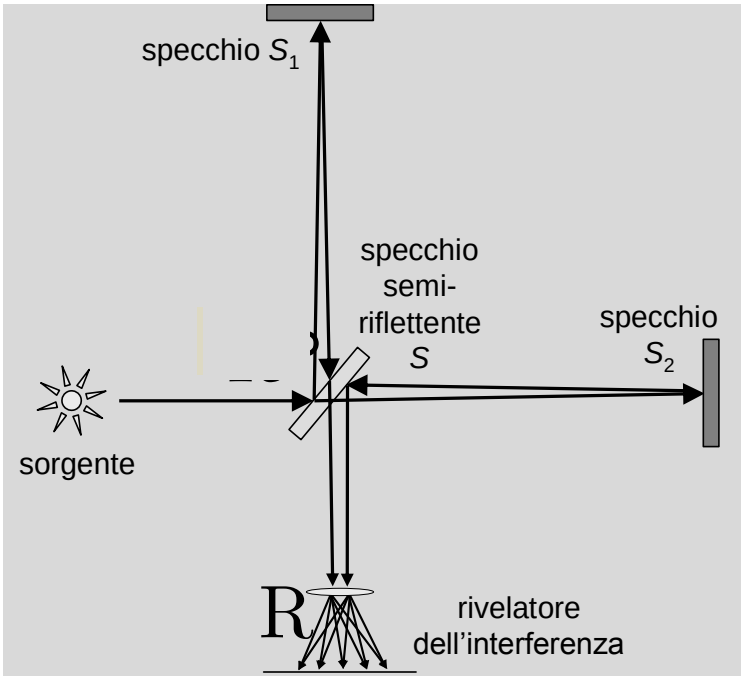


La velocità della luce, misurata nel riferimento terrestre, è data dalla formula (1) che può essere espressa per via grafica nel modo seguente.
Nel riferimento O, fermo nell'etere, a partire da un punto P dello spazio, i possibili spostamenti della luce nell'unità di tempo sono dati dall'insieme dei vettori blu che individuano il cerchio tratteggiato blu.
Per ottenere i corrispondenti spostamenti nel riferimento O' in moto nell'etere, basta aggiungere i controspostamenti dovuti al moto di O' stesso indicati dall'insieme dei vettori rossi. Questi individuano un secondo cerchio tratteggiato verde il cui centro è spostato rispetto al primo della stessa quantità.
A questo punto, i possibili spostamenti della luce nell'unità di tempo, nel riferimento O' in moto nell'etere, possono essere ottenuti congiungendo il punto P, centro del cerchio tratteggiato blu, con i punti della circonferenza tratteggiata verde.
Otteniamo in questo modo l'ultima figura la quale mostra ciò che avevamo anticipato: **in un generico punto P del riferimento mobile nell'etere, la velocità della luce dipende dalla direzione lungo cui si propaga** in un modo dipendente dall'angolo esistente tra il raggio luminoso e la direzione del moto terrestre nell'etere. Altrettanto chiaramente, la figura mostra che quando la luce si propaga in avanti, nella stessa direzione e verso del moto terrestre, la sua velocità assume il minimo valore **c-V**, mentre quando si propaga indietro, nella stessa direzione ma con verso opposto al moto terrestre, la sua velocità assume il massimo valore **c+V.**



L'interferometro di Michelson

Un punto di svolta nel problema dell'etere fu raggiunto quando si trovò un metodo sperimentale capace di misurare i piccoli effetti sulla velocità di propagazione della luce che il concetto di etere stesso comportava.
L'idea, uno dei capisaldi della moderna fisica sperimentale, è dovuta a **A. Michelson** che ebbe l'intuizione di affidarsi ad un fenomeno ottico molto sensibile, quello della **interferenza** che - essendo regolato da un parametro molto piccolo: la lunghezza d'onda λ della luce (si tenga presente che per la luce visibile $\lambda \sim 500$ nm) - può mettere in evidenza effetti piccoli. Ospite di H. von Helmholtz a Berlino, nel 1880 ideò una apparecchiatura ottica di enorme sensibilità, ancor oggi usata, detta **interferometro**.



Come noto, affinchè possa essere osservata **l'interferenza di onde**, qualunque esse siano, è necessario che le onde interferenti

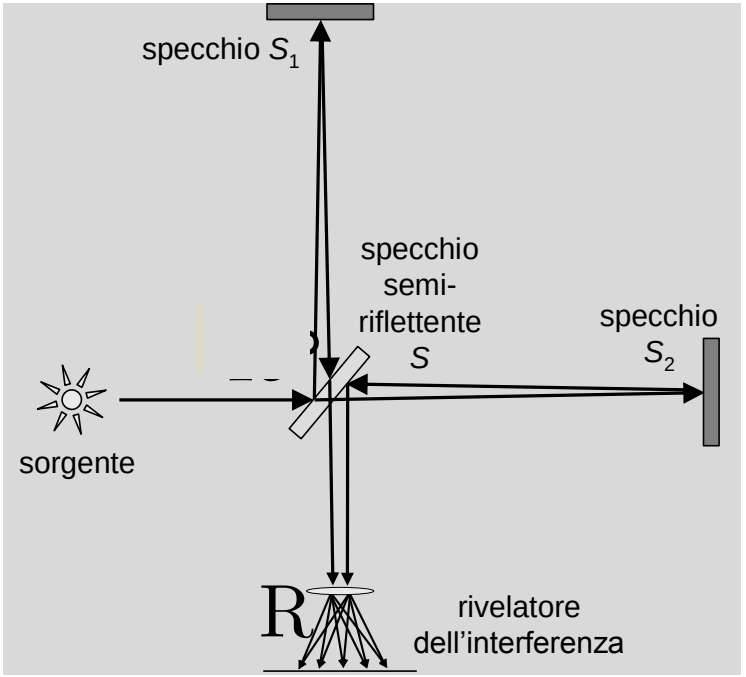
i) siano coerenti, ovvero abbiano una differenza nella fase di oscillazione costante nel tempo;
ii) abbiano intensità confrontabili, meglio se uguali, in modo tale da rendere massime le modulazioni derivanti dalla loro sovrapposizione;
iii) abbiano la stessa direzione di oscillazione dei campi, ovvero siano polarizzate nella stessa direzione.

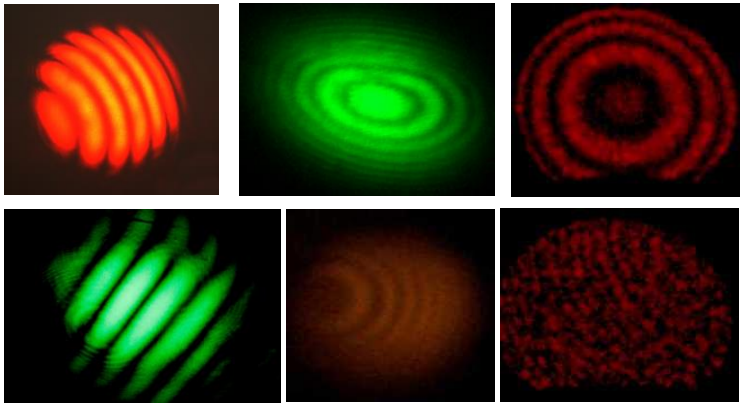
Fatte queste premesse possiamo capire il funzionamento dell'interferometro di Michelson dove queste condizioni vengono soddisfatte nel migliore dei modi.
Una sorgente emette luce nella direzione di uno specchio semiriflettente-semitrasmittente S che divide il raggio luminoso in due raggi coerenti di eguale intensità (ciascuno il 50% della intensità iniziale) e polarizzazione capaci pertanto di interferire qualora venissero sovrapposti.

Per realizzare tale sovrapposizione i due raggi vengono inviati verso due specchi S1 ed S2 che li riflettono completamente indietro verso lo specchio semiriflettente-semitrasmittente S. Il raggio che scende in verticale viene allora in parte riflesso verso la sorgente (di questo non ci curiamo) ed in parte trasmesso verso lo schermo R (il 25% della intensità iniziale). Analogamente il raggio che proviene in orizzontale viene in parte trasmesso verso la sorgente (di questo non ci curiamo) ed in parte riflesso verso lo schermo R (il 25% della intensità iniziale). Si noterà che i due raggi camminano sovrapposti in tutto il tratto di percorso che va dallo specchio S allo schermo R trovandosi nelle condizioni ideali (le condizioni d'interferenza prima ricordate) per interferire.

Se l'interferometro è ben regolato nel punto centrale dello schermo (cioè nel punto giacente su uno dei due assi del dispositivo) si forma un massimo d'interferenza poiché i raggi che si sovrappongono hanno fatto percorsi esattamente uguali. Mano a mano che ci si allontana da questo punto però si osservano cerchi scuri (zone d'interferenza distruttiva) e cerchi illuminati (zone d'interferenza costruttiva) dovute al fatto che i raggi che vi giungono hanno fatto percorsi lievemente diversi e possono sommarsi sia distruttivamente che costruttivamente (tipiche frange d'interferenza, diverse a causa delle differente regolazione degli specchi, sono mostrate nelle figure a colori).

Qualunque piccola variazione nel percorso di uno dei due raggi luminosi si traduce in una modifica della figura d'interferenza che dipendendo dalla lunghezza d'onda della luce impiegata (dell'ordine di 500 nm per la luce visibile) conferisce all'apparecchiatura una enorme sensibilità (naturalmente tale sensibilità si manifesta anche nei confronti dei piccoli effetti ambientali che devono essere assolutamente evitati e che rendono le misure interferometriche molto difficili e delicate).





Il principio dell'esperimento di Michelson

Nella prima figura riportiamo il diagramma delle velocità della luce nelle varie direzioni del laboratorio terrestre previsto dalla ipotesi dell'etere.

A) Inizialmente l'interferometro viene disposto con il braccio L-S2 lungo la direzione di moto della terra nell'etere ed il braccio S1-R perpendicolare a tale direzione.

In questa situazione, la luce si propaga lungo il braccio L-S2 con velocità VLa all'andata e VLr al ritorno, mentre si propaga lungo il braccio S1-R con velocità VT sia all'andata che al ritorno (vedi diagramma delle velocità).

A causa della differente velocità della luce nei due bracci dell'interferometro, ci si attende di osservare, centrate sullo schermo in una certa posizione P1 fuori asse, le frange d'interferenza.

B) Successivamente l'interferometro viene ruotato di 90 gradi in modo da portare il braccio S1-R lungo la direzione di moto della terra nell'etere ed il braccio L-S2 perpendicolare a tale direzione.

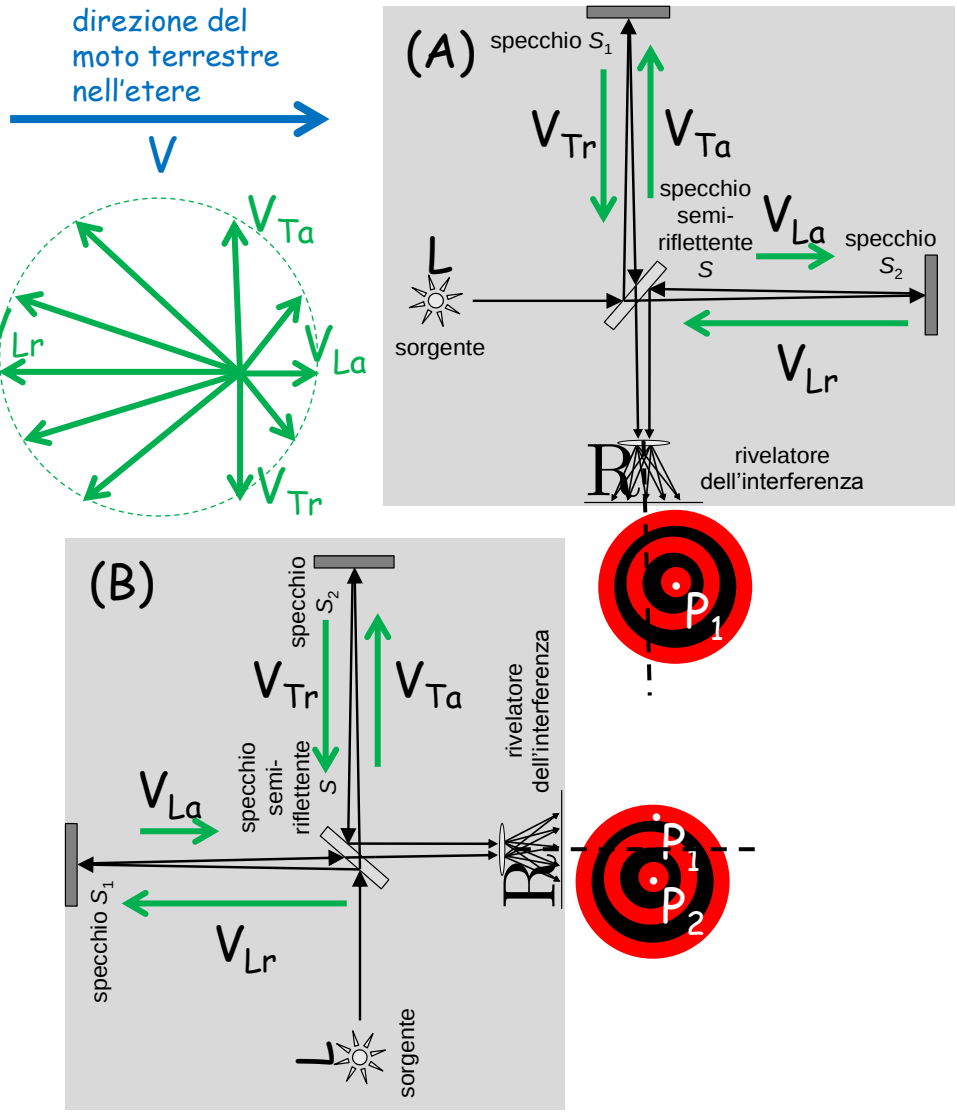
In questa situazione la configurazione delle velocità nei bracci dell'interferometro si scambia e ci si attende di osservare, centrate sullo schermo in posizione P2 simmetrica rispetto all'asse, le frange d'interferenza.

In sostanza la rotazione dell'interferometro dovrebbe portare ad uno spostamento dell'intero sistema di frange d'interferenza. Come mostreremo, l'entità Δx dello spostamento P1-P2 (in unità di distanza tra due massimi successivi della figura d'interferenza) è data dalla seguente formula

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

dove L è la lunghezza dei bracci dell'interferometro, λ la lunghezza d'onda della luce impiegata, c la velocità della luce nell'etere e v la velocità della terra nell'etere.

Sulla base di quanto detto **l'osservazione di uno spostamento delle frange supporta la tesi dell'etere, mentre l'assenza di uno spostamento la nega.**



Il calcolo dello spostamento delle frange d'interferenza

Poniamo l'interferometro nella posizione (1) con il braccio ABE lungo la direzione del moto terrestre nell'etere.

Supponiamo che al tempo t=0 il raggio di luce lasci la sorgente A e calcoliamo il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABCBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABCBE}(1) = \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Calcoliamo ora il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABDBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABDBE}(1) = \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{(c+v)} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

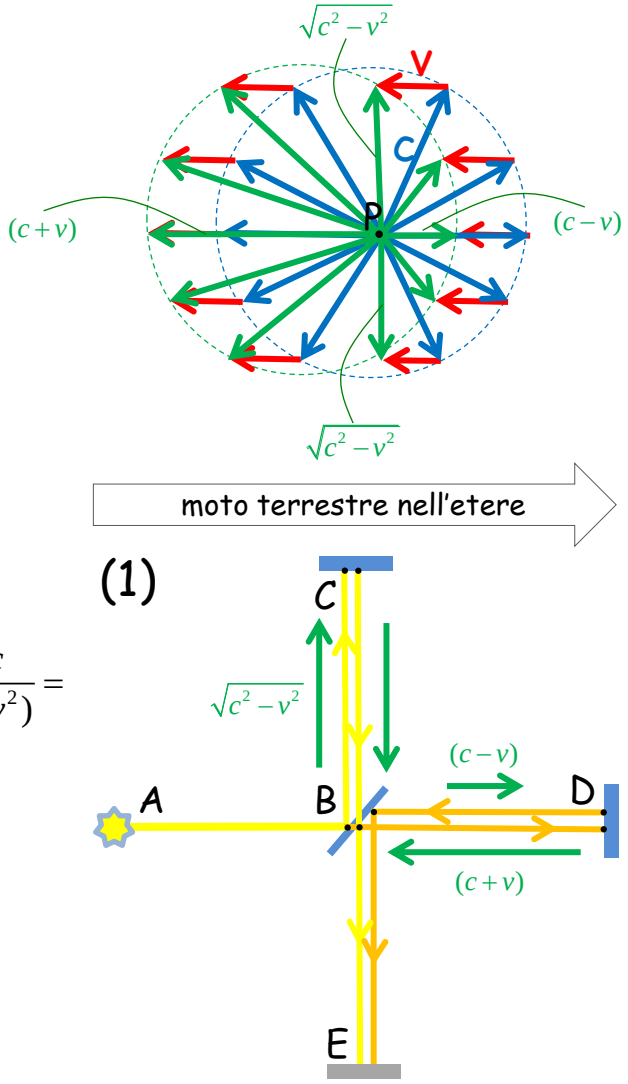
La differenza dei tempi di percorrenza dei due raggi vale allora

$$t_{ABCBE}(1) - t_{ABDBE}(1) = \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} - \frac{L}{(c-v)} - \frac{L}{(c+v)} = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} - \frac{2Lc}{(c^2-v^2)} =$$

$$= \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{2L/c}{(1-v^2/c^2)} \simeq \frac{2L/c}{(1-\frac{1}{2}v^2/c^2)} - \frac{2L/c}{(1-v^2/c^2)} \simeq$$

$$\simeq \frac{2L}{c}(1+\frac{1}{2}v^2/c^2) - \frac{2L}{c}(1-v^2/c^2) = -\frac{L}{c}v^2/c^2$$

ed indica che il raggio ABCBE arriva sullo schermo prima del raggio ABDBE.



Ora ruotiamo l'interferometro nella posizione (2) con il braccio CBE lungo la direzione del moto terrestre nell'etere e calcoliamo nuovamente i tempi di percorrenza dei due raggi.
Supponiamo che al tempo t=0 il raggio di luce lasci la sorgente A e calcoliamo il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABCBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABCBE}(2) = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{(c+v)} + \frac{L}{(c+v)}$$

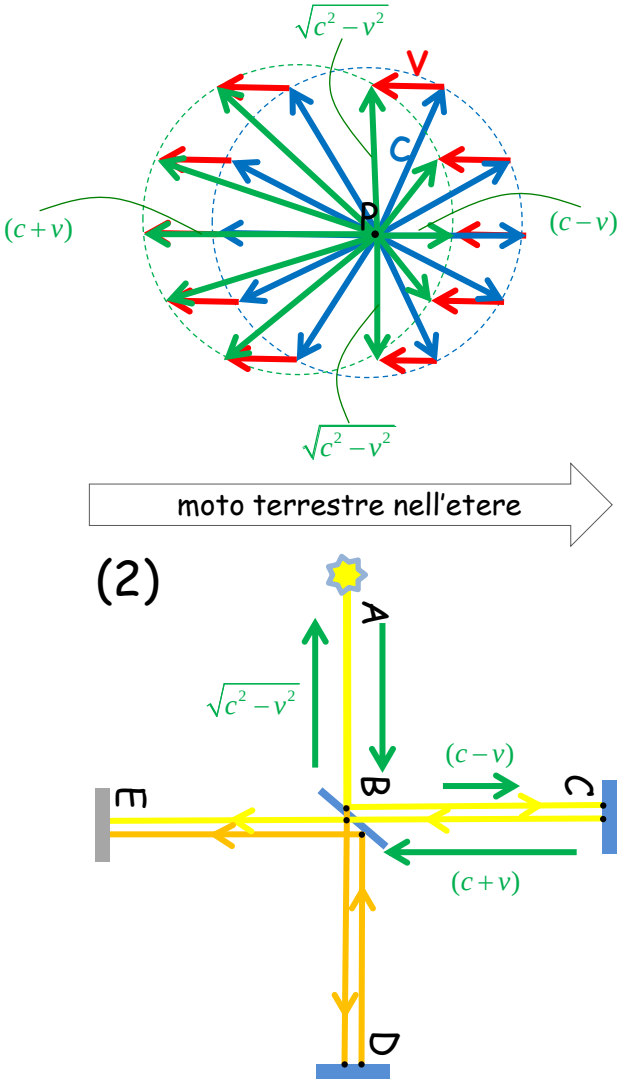
Calcoliamo ora il tempo necessario per giungere in E attraverso il cammino ABDBE. Sommando i contributi di ciascun braccio dell'interferometro, ognuno percorso con la propria velocità, abbiamo

$$t_{ABDBE}(2) = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{(c+v)}$$

Dal confronto con l'analoga formula della pagina precedente notiamo che la differenza dei tempi di percorrenza dei due raggi ha invertito esattamente il segno e vale

$$t_{ABCBE}(2) - t_{ABDBE}(2) = \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{(c+v)} - \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{L}{c} v^2 / c^2$$

indicando che ora il raggio ABDBE arriva sullo schermo prima del raggio ABCBE. Ragioniamo ora sul significato di queste differenze nei tempi di percorrenza.



Si consideri la situazione (1). Il raggio ABDBE è il più lento, e quando arriva sullo schermo, il raggio ABCBE è già passato ed ha percorso lo spazio

$$s(1) = c\,(t_{ABDBE}(1) - t_{ABCBE}(1)) = L\ v^2 / c^2$$

Il quoziente x(1) tra questo spazio e la lunghezza d'onda della luce fornisce il punto della figura d'interferenza che viene a formarsi al centro dello schermo (Es: se X(1)=3 significa che nel punto centrale dello schermo cade il terzo massimo della figura d'interferenza)

$$x(1) = \frac{s(1)}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} v^2 / c^2$$

Questo significa che la figura tende a svilupparsi fuori centro, ad esempio lateralmente, della quantità x(1) (in unità di distanza di due massimi successivi) .

Si consideri la situazione (2). Ora è Il raggio ABCBE il più lento, e quando arriva sullo schermo, il raggio ABDBE è già passato ed ha percorso uno spazio (uguale al precedente)

$$s(2) = c\,(t_{ABCBE}(2) - t_{ABDBE}(2)) = L\ v^2 / c^2$$

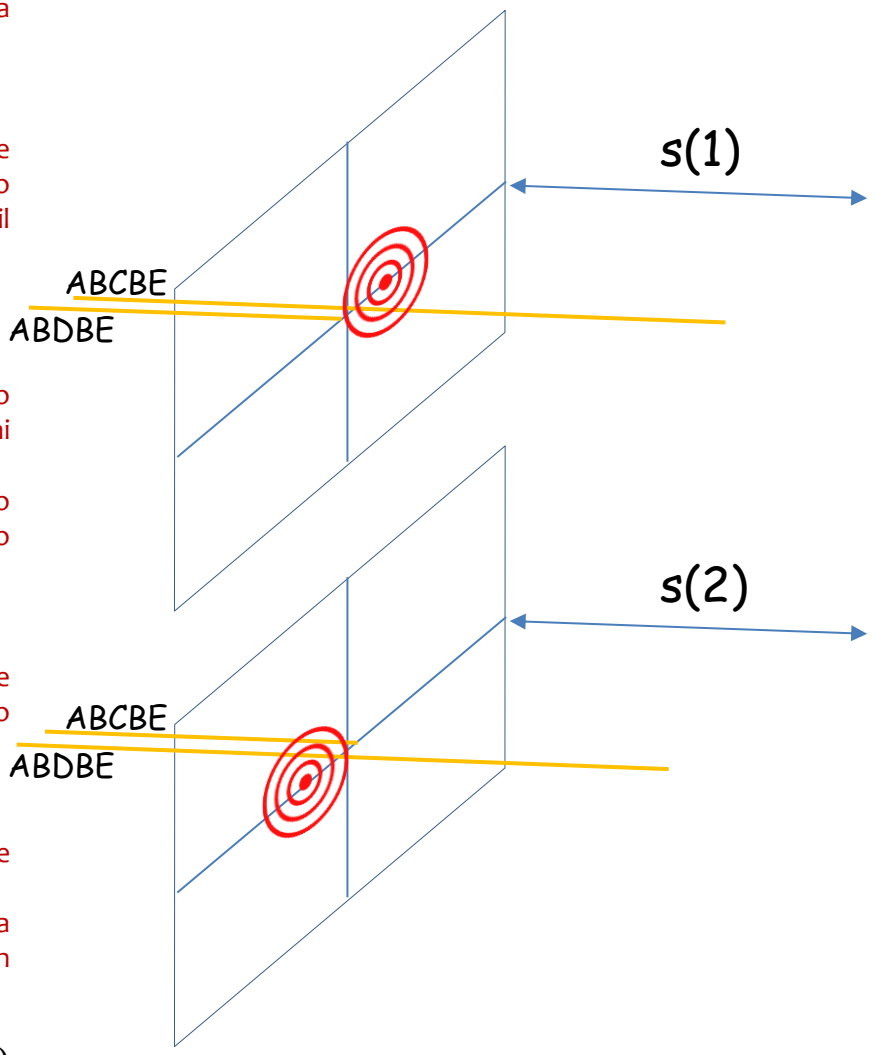
Il quoziente x(2) tra questo spazio e la lunghezza d'onda della luce fornisce il punto della figura d'interferenza che viene a formarsi al centro dello schermo

$$x(2) = \frac{s(2)}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} v^2 / c^2$$

Questo significa che la figura tende a svilupparsi fuori centro ma dalla parte opposta rispetto a prima a causa della inversione dei raggi.

Passando allora dalla configurazione (1) alla (2) il centro della figura d'interferenza si è spostato complessivamente della seguente quantità (in unità di distanza tra due massimi successivi della figura d'interferenza)

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda} v^2 / c^2 \qquad (F1)$$



Il risultato dell'esperimento di Michelson

Richiamiamo la formula dello spostamento della figura d'interferenza (in unità della distanza di due massimi successivi della figura stessa)

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

Si noterà che le grandezze a scelta dello sperimentatore sono la lunghezza L del braccio dell'interferometro e la lunghezza d'onda λ della luce impiegata, essendo date, invece, la velocità della luce e l'eventuale velocità della terra nell'etere. Tenuto conto che la lunghezza d'onda della luce è vincolata a rimanere nel visibile e quindi tra i 400 ed i 700 nm, l'unica vera leva che possiede lo sperimentatore per rendere massimo l'effetto è lunghezza L del braccio dell'interferometro che deve essere la più grande possibile.

Michelson effettuò l'esperimento una prima volta nel 1881 con un interferometro di braccio L=1,2 m e luce di lunghezza d'onda λ=570 nm. L'eventuale effetto ammontava quindi

$$\Delta x = \frac{2L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\times 1,2}{5,7\times 10^{-7}}\left(\frac{30}{300000}\right)^2 = 0,04$$

Ovvero un piccolo spostamento di 4 centesimi di frangia. **Michelson dichiarò che la rotazione dell'interferometro non aveva causato alcuno spostamento di frage ma molti obiettarono che la sensibilità era al limite e l'effetto poteva essere sfuggito.**

Per questo ripetè l'esperimento nel 1887 in collaborazione con E. Morley, utilizzando un nuovo interferometro di braccio L=12m che garantiva un eventuale effetto di

$$\Delta x = 0,4$$

Ovvero uno spostamento di quasi mezza frangia (la dove c'era un massimo doveva quindi comparire un minimo!) certamente visibile qualora ci fosse stato l'effetto**.** Ancora una volta **gli sperimentatori dichiararono di non avere osservato alcun effetto** e questa volta nessuno poteva sollevare obiezioni sulla sensibilità dello strumento.

Le conseguenze dell'esperimento di Michelson e Morley

L'esito negativo dell'esperimento di Michelson e Morley (MeM), confermato al di la di ogni dubbio nel 1887, condusse la fisica in una situazione assai complessa che si risolse solo con la formulazione della teoria della relatività ristretta nel 1905 da parte di A. Einstein.

Per comprendere questo periodo è necessario tenere presente che anche il risultato sperimentale più limpido, sotto il profilo logico non è mai conclusivo in quanto sempre passibile di diverse interpretazioni.

In effetti l'esperimento fu seguito da una impressionante varietà di idee e proposte tutte tese a spiegare ciò che costituiva l'unico punto fermo: *l'assenza di spostamento delle frange a seguito della rotazione dell'interferometro*.

In linea di principio erano possibili due diversi posizioni:

i) non esiste l'etere luminifero e quindi non si osserva lo spostamento delle frange. In questo caso, assumendo la validità dell'elettromagnetismo, il significato della velocità *c* non poteva che essere quello di rappresentare la velocità dell'onda elettromagnetica (luce) rispetto ad un qualunque osservatore inerziale (come vedremo fu la strada imboccata da A. Einstein, che però richiede una radicale revisione dei concetti di spazio e tempo).

ii) esiste l'etere luminifero ma non si osserva lo spostamento delle frange a causa di certi effetti di cui non si è tenuto conto. Fu la strada più seguita e tra gli effetti proposti ricordiamo:

- **trascinamento dell'etere**: la terra, nel suo moto orbitale, *trascina l'etere* per cui il laboratorio e l'interferometro si trovano, in realtà, in quiete nell'etere stesso. Per questo motivo non si osserva alcun spostamento delle frange (tale ipotesi fu poco sostenuta poiché non riusciva a spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare);
- **contrazione di Lorentz-Fitzgerald**: la terra si muove nell'etere, che non viene trascinato, tuttavia, *il braccio allineato con il moto nell'etere, subisce una modifica della propria lunghezza* tale da compensare esattamente lo spostamento atteso delle frange. Si spiega dunque l'esito dell'esperimento di MeM ma al prezzo di un nuovo effetto fisico che, oltre ad essere spiacevolmente 'ad-hoc', *modifica la concezione galileiana dello spazio*. Inoltre, per spiegare il fenomeno dell'aberrazione stellare, Lorentz fu costretto anche a *modificare la concezione galileiana del tempo*.

Come si vede la battaglia a favore dell'etere era diventata difficilissima poiché risultava impossibile rendere conto del risultato dell'esperimento di Michelson e Morley senza cadere in contraddizioni con altri effetti noti. L'etere stava diventando un concetto fisico inutile e come tale prossimo ad essere abbandonato. La conseguenza più rilevante di questo fatto riguardava però le trasformazioni di Galileo che private dell'etere non risultavano più inattaccabili e con esse la concezione dello spazio e del tempo assoluti su cui si fondavano.

La Teoria della Relatività Ristretta

A. Einstein, in un famoso lavoro pubblicato nel 1905 in una rivista specializzata tedesca prende la direzione che tutti gli esperimenti a seguire dimostreranno essere quella giusta (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, pubblicato su Zeitschrift für Physik*).

In tale lavoro, il primo passo fu quello di **abbandonare il concetto di etere.** Dato che Einstein era fermamente convinto che le equazioni di Maxwell fossero corrette, l'unica possibile interpretazione della velocità c dell'onda elettromagnetica prevista da queste equazioni era che **c fosse la velocità dell'onda elettromagnetica rispetto ad un qualunque sistema di riferimento inerziale.** Tale ipotesi rappresenta uno dei due capisaldi della teoria dove occupa la posizione di secondo postulato.

E' assai significativo ricordare una dichiarazione di A. Einstein secondo la quale, al momento della formulazione della TRR, non era a conoscenza dell'esperimento di Michelson e Morley e che la ragione che lo spinse ad abbandonare il concetto di etere fu soprattutto la possibilità di recuperare la completa equivalenza di tutti gli osservatori inerziali, sia per i fenomeni meccanici che per quelli elettromagnetici, in accordo con la sua intuizione che **il principio di relatività galileiano dovesse essere un principio generale, valido per tutti i fenomeni fisici.** Questa ipotesi rappresenta l'altro caposaldo della costruzione einsteniana, dove vi figura come primo postulato.

Stabiliti questi due punti fermi, A. Einstein mostrò che era possibile costruire una visione della fisica (in particolare dell'elettromagnetismo) coerente con queste assunzioni purché si fosse disposti ad abbracciare una nuova concezione dello spazio e del tempo abbandonando quella familiare della fisica classica.

E' inutile sottolineare che tutto ciò sarebbe rimasto un ardito esercizio intellettuale se gli esperimenti, oramai numerosissimi, non avessero puntualmente confermato tutte le rivoluzionarie previsioni della nuova teoria!

Fatte queste premesse, possiamo formulare i due principi o postulati, che A. Einstein assunse come veri, e dai quali, in modo deduttivo, si ottengono tutte le conseguenze della TRR:

Primo postulato : *in tutti i riferimenti inerziali valgono le stesse leggi fisiche*

Secondo postulato: *in tutti i riferimenti inerziali la velocità della luce assume lo stesso valore*

Le trasformazioni di Galileo violano il secondo postulato

Mostreremo ora che ***le trasformazioni di Galileo contraddicono il secondo postulato*** per cui *risulta necessario procedere ad una loro modifica.*

Consideriamo i due soliti riferimenti ***O*** ed ***O'***, ed immaginiamo che, nel momento in cui le origini coincidono, dalla origine del riferimento mobile ***O'*** venga emesso un raggio di luce nella direzione delle ***x'*** positive. La posizione in funzione del tempo, del fronte del raggio, per l'osservatore ***O'*** vale

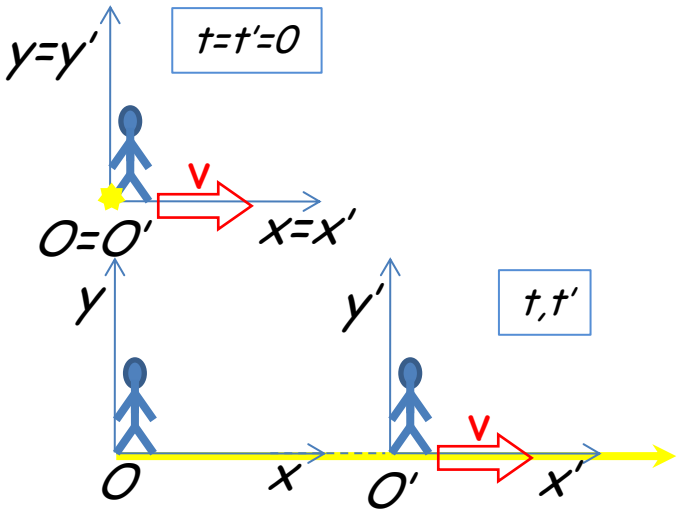
$$x' = ct'$$

Richiamando le Trasformazioni di Galileo, sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct' + vt \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = ct + vt \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = (c+v)t \\ - \end{cases}$$

Il risultato mostra che **l'osservatore O vede un raggio luminoso che si propaga nella direzione delle x positive con velocità c'=(c+v) in completo disaccordo con il secondo postulato** che invece richiede che anche per l'osservatore ***O*** la velocità del raggio luminoso valga ***c***!

A questo proposito vale la pena sottolineare **quanto il secondo postulato sia in conflitto con il senso comune**: dal punto di vista dell'osservatore ***O***, il raggio luminoso ha seguito un percorso più lungo rispetto al riferimento ***O*** che



rispetto al riferimento ***O'***. Ciononostante il raggio si muove con la stessa velocità rispetto ad entrambi i riferimenti ! Ciò è possibile solo se sui ammette che i due osservatori misurino le durate degli stessi fenomeni in modo diverso.

Il punto finale di queste considerazioni è che **le trasformazioni di Galileo non sono compatibili con i postulati della teoria della relatività ristretta per cui risulta necessario procedere alla costruzione delle nuove trasformazioni.**

La costruzione delle nuove trasformazioni

Le nuove trasformazioni possono essere costruite analizzando le seguenti situazioni fisiche:

i) Un corpo materiale in quiete nell'origine del riferimento O', deve apparire in moto con velocità v all'osservatore O:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x = vt \end{cases}$$

Evidentemente tale condizione può essere soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x' = x - vt \quad \rightarrow \quad x' = \alpha(x - vt)$$

dove α *è una costante da determinare*.

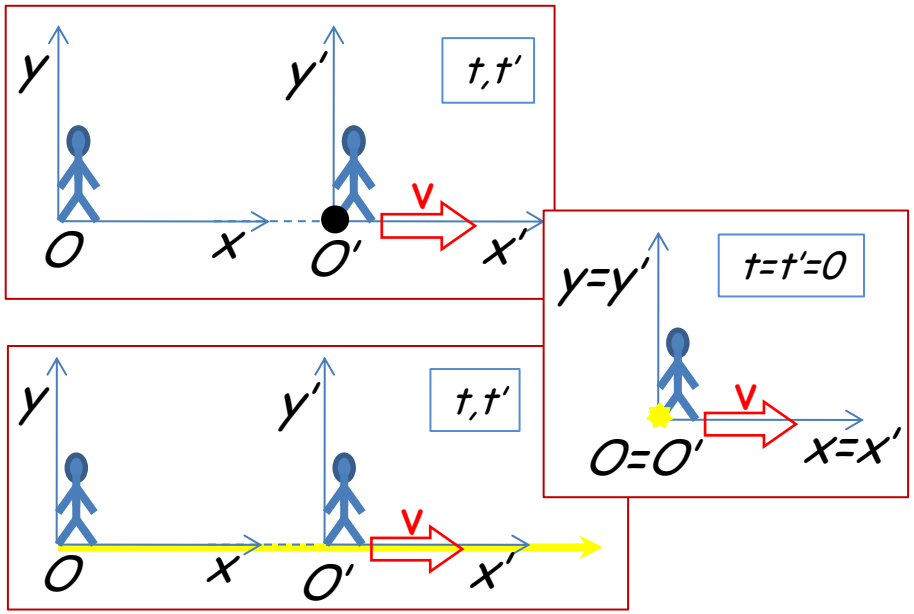
Un corpo materiale è in quiete nel riferimento O deve apparire in moto con velocità –v all'osservatore O':

$$\begin{cases} x' = -vt' \\ x = 0 \end{cases}$$

Tale condizione può essere condizione soddisfatta solo se la trasformazione di Galileo viene modificata nel modo seguente

$$x = x' + vt = x' + vt' \quad \rightarrow \quad x = \alpha(x' + vt')$$

con *la stessa costante* α dato che i due osservatori sono del tutto equivalenti in accordo con il primo postulato. Confrontando le espressioni per **x** e **x'** arriviamo allora a comprendere che, in generale, dati due osservatori **O** e **O'**, in moto traslatorio uniforme, le trasformazioni di coordinate da **O** ad **O'** e da **O'** ad **O** possono differire nel solo segno della velocità (è facile verificare che questa proprietà è soddisfatta anche dalle trasformazioni di Galileo).



ii) Un raggio luminoso, nel momento in cui le origini coincidono, viene emesso nella direzione delle x e x' positive. In accordo con il secondo postulato, la posizione del fronte, nei rispettivi riferimenti, deve essere data dalle espressioni

$$\begin{cases} x' = ct' \\ x = ct \end{cases}$$

iii) La eguaglianza t'=t, non può essere valida poiché contraddice il secondo postulato (esempio iniziale). La nuova relazione tra i tempi deve comunque essere lineare (altrimenti entra nelle formule il problema della origine) per cui scriveremo nel modo più generale possibile tipo **t'=at+bx** che, per simmetria con quella relativa alle posizioni, prenderemo nella forma **t'=β(t+γx).**

Passiamo ora la costruzione delle nuove formule di trasformazione. Avremo allora per le **trasformazioni da O ad O' e da O' ad O** che si ricavano immediatamente

$$1)\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v}\left(x' + \dfrac{\alpha}{\beta} v t'\right) \\ t = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v}\left(t' - \dfrac{\beta}{\alpha}\gamma x'\right) \end{cases}$$

Dal requisito i) otteniamo immediatamente che devono essere soddisfatte le condizioni

$$3)\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1 \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta \qquad 4)\begin{cases} \alpha = \dfrac{1/\alpha}{1+\gamma v} \\ \beta = \dfrac{1/\beta}{1+\gamma v} \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma v}}$$

Dal requisito ii), sostituendo nelle 1) **x'=ct'** e **x=ct** otteniamo invece

$$5)\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma x) \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \alpha(ct - vt) \\ t' = \beta(t + \gamma ct) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \alpha(c - v)t \\ t' = \beta(1 + \gamma c)t \end{cases} \qquad c = \frac{\alpha(c-v)}{\beta(1+\gamma c)} \qquad \gamma = -v/c^2$$

Tenendo conto delle 3), 4) e 5) otteniamo allora le espressioni

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \gamma = -v/c^2$$

le quali, sostituite nelle 1) e 2), forniscono le *nuove trasformazioni di coordinate* per *x* e *t*.

$$6)\ O \rightarrow O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$7)\ O' \rightarrow O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ora dobbiamo affrontare il problema delle trasformazioni delle coordinate *y* e *z* che, nel caso delle trasformazioni di Galileo, sono fornite dalle semplici leggi *y'=y* e *z'=z*. Continueranno ad essere valide? Ragioniamo come segue.

Si immagini una variante dell'esempio esaminato all'inizio nel quale, il raggio luminoso (nell'istante in cui le origini coincidono), viene indirizzato, nel riferimento in moto ***O'***, lungo l'asse delle ***y'*** positive. Mentre il raggio viaggia in direzione verticale verso l'alto per l'osservatore ***O'***, viaggia pure in direzione diagonale per ***O***. Dopo un certo intervallo di tempo la traiettoria percorsa nel riferimento ***O*** potrebbe essere quella tracciata nella figura.

La posizione del fronte, nei due riferimenti, è data dalle equazioni

$$8)\begin{cases} y' = ct' \\ x' = 0 \end{cases} \qquad 9)\begin{cases} y = v't \\ x = vt \end{cases}$$

Si noti che O vede un raggio luminoso che si propaga in direzione diagonale con una velocità che deve valere ***c*** (in accordo con il secondo postulato) per cui si deve avere dal teorema di Pitagora

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (v't)^2 \qquad v' = (c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,)t$$

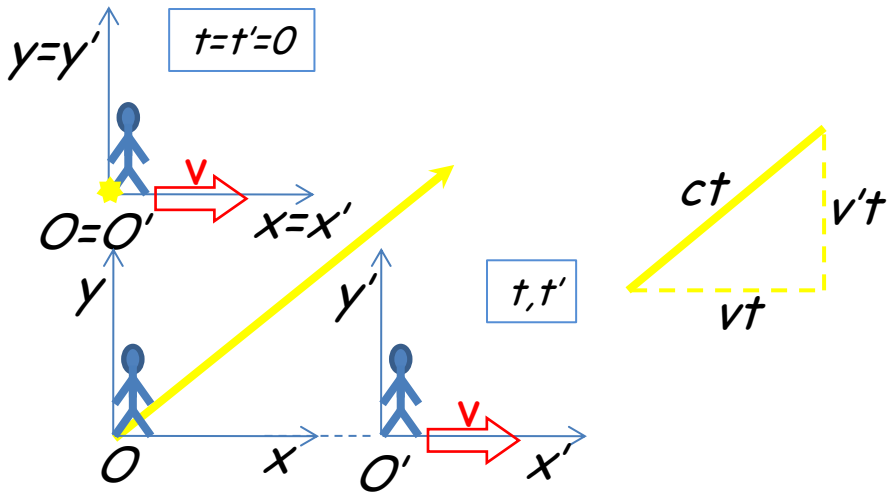
sostituendo nelle 9) e riscrivendo sia le 8) che le 9), otteniamo

$$10)\begin{cases} y' = ct' \\ x' = 0 \end{cases} \qquad 11)\begin{cases} y = (c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,)t \\ x = vt \end{cases}$$

Ora, si deve richiamare la trasformazione del tempo data dalla seconda delle 6),

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e sostituirla nella prima delle 10), si ottiene



$$12)\begin{cases} y' = c\dfrac{\left(t - \frac{v}{c^2}vt\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,)t \\ x' = 0 \end{cases}$$

per confronto diretto, verifichiamo che la prima delle 12) coincide con la prima delle 11) per cui ***y'=y***. Dato che analoghe considerazioni valgono anche per la coordinata z concludiamo che **le leggi di trasformazione delle coordinate perpendicolari alla direzione del moto non necessitano di alcuna correzione**

$$13)\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Le Traformazioni di Lorentz

Nelle pagine precedenti abbiamo ottenuto **le trasformazioni delle misure di posizione e tempo di un certo evento fisico tra due osservatori inerziali O ed O' compatibili con i postulati della teoria della relatività ristretta** [formule dalle 6), 7) e 13)] .

Queste trasformazioni hanno una storia piuttosto complessa: furono trovate, a partire dal 1887, da G. Fitzgerald, J. Larmor, H. Lorentz e W. Voigt essenzialmente per spiegare l'esito nullo dell'esperimento di Michelson e Morley. Pare che J. Larmor avesse compreso l'effetto della dilatazione del tempo in esse nascosto, e Lorentz la loro proprietà di lasciare invarianti le equazioni dell'elettromagnetismo, ma fu A. Einstein che per primo chiarì fino in fondo il loro vero significato fisico._In effetti, è solo con la teoria della relatività ristretta che queste trasformazioni - dette trasformazioni di Lorentz – vengono ad assumere **un ruolo fondativo per tutta la fisica prescrivendo le proprietà di trasformazione della misure di posizione e tempo tra osservatori inerziali in moto relativo uniforme valide per tutti i fenomeni fisici**.

Queste formule si presentano come relazioni tra le misure di posizione ***(x,y,z)*** e tempo ***t*** di un certo evento fisico operate dall'osservatore inerziale ***O*** con quelle di posizione ***(x',y',z')*** e tempo ***t'*** operate da un altro osservatore inerziale ***O'*** in moto, rispetto al primo, con una certa velocità **v**. In accordo con le condizioni imposte nella costruzione di queste formule [vedi condizione i) del paragrafo precedente] **le espressioni da O ad O' si possono ottenere da quelle da O' ad O semplicemente scambiando gli apici ed invertendo il segno della velocità di traslazione**, una regola che torna utile nella memorizzazione delle formule stesse.

$$O \to O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \to O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{(t' + \frac{v}{c^2}x')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

❑ La trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare

In numerose situazioni che analizzeremo, troveremo più agevole riferirci non a singoli eventi ma a coppie di eventi fisici osservati sia da O che da O' per cui ragioneremo su intervalli spaziali e temporali tra gli eventi piuttosto che su valori di posizione e tempo del singolo evento.

Per ottenere le trasformazioni di Lorentz per gli intervalli spaziali e temporali tra i due eventi è sufficiente scrivere le trasformazioni per ciascun evento

$$x_1' = \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad y_1' = y_1 \quad z_1' = z_1 \quad t_1' = \frac{(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad y_2' = y_2 \quad z_2' = z_2 \quad t_2' = \frac{(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

e poi procedere ad una sottrazione membro a membro. Si ottengono immediatamente le **trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare** riportate qui a fianco sia per il passaggio da O ad O' che per quello da O' ad O.

$$O \to O' \begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \to O \begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

❑ Trasformazioni di Lorentz e raggi luminosi

Nei paragrafi seguenti analizzeremo il contenuto fisico delle trasformazioni di Lorentz ed avremo modo di verificare che queste contengono un certo numero di fatti assolutamente nuovi, tali da richiedere una radicale revisione di quelle proprietà dello spazio e del tempo che abbiamo sedimentato attraverso la nostra esperienza quotidiana e che abbiamo elevato al rango di leggi fisiche costruendo la fisica classica. A tali nuovi fatti si suole dare il nome di **effetti relativistici,** tuttavia deve essere ben chiaro che non si tratta di 'effetti' ma della realtà delle cose, che appare 'rivoluzionaria' solo perché la nostra esperienza matura in contesti caratterizzati da velocità piccole rispetto a quella della luce dove tali 'effetti' non sono apprezzabili, ma che troveremmo assolutamente naturali qualora fossimo nati in un mondo dominato da fenomeni con alte velocità.

Come già sottolineato le trasformazioni di Lorentz sono state ottenute **cercando trasformazioni di coordinate compatibili con i due postulati della teoria**. Tra questi, il più dirompente è il secondo dal quale discendono le conseguenze più rilevanti e che conferisce alla propagazione dei raggi luminosi il ruolo di fenomeno di riferimento per eccellenza. Questo fatto non deve però fare pensare che la propagazione della luce abbia una qualche priorità sugli altri fenomeni. **Proprio perché la cinematica dei raggi luminosi viene precisata dal secondo postulato, essa è solo il fenomeno più conveniente attraverso il quale evidenziare le proprietà degli intervalli spaziali e temporali.** Si noterà infatti che nella costruzione delle nuove trasformazioni di coordinate l'attenzione era costantemente concentrata sugli intervalli spaziali e temporali intercorrenti tra due eventi fisici che solo per le suddette ragioni di opportunità riguardavano la propagazione della luce. Da questo punto di vista è ovvio che, **benché ottenute argomentando con i raggi luminosi, le proprietà degli intervalli spaziali e temporali così ottenute devono essere valide per tutti i fenomeni naturali diventando proprietà intrinseche dello spazio e del tempo**.

Premesso che torneremo nuovamente su questo aspetto della teoria, non dovrebbe più esserci alcuna difficoltà nell'attribuire il giusto significato agli esempi dei paragrafi seguenti, tutti basati sulla cinematica dei raggi dei luminosi, con i quali cercheremo di interpretare il contenuto fisico delle trasformazioni di Lorentz.

$$O \to O' \begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$O' \to O \begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

❑ Le trasformazioni di Galileo come limite alle basse velocità delle trasformazioni di Lorentz.

Premesso che le corrette trasformazioni delle misure di posizione e tempo sono quelle di Lorentz, è comunque vero che, in certi contesti fisici, queste sono molto ben approssimate dalle trasformazioni di Galileo. Richiamando le trasformazioni di Lorentz è facile rendersi conto quando questo accade.

Si osservi che, nel caso in cui si possa trascurare il rapporto v^2/c^2 nelle radici quadrate e vx/c^2 nelle trasformazioni del tempo, si ottengono esattamente le Trasformazioni di Galileo. Ora, il termine v^2/c^2 è trascurabile quando la velocità della traslazione del riferimento è piccola rispetto alla velocità della luce. Per quanto riguarda, invece, il termine vx/c^2, si osservi che x rappresenta la posizione dell'evento fisico rispetto al riferimento O e che, se l'evento è connesso ad un qualche moto di velocità v' lungo x, avremo $x=v't$ per cui si ha $vx/c^2 = vv'/c^2$ che è trascurabile se anche questa velocità è piccola rispetto alla velocità della luce.

Dunque riassumendo, **le Trasformazioni di Galileo valgono con approssimazione sempre migliore mano a mano che la velocità di traslazione del riferimento e le velocità dei processi fisici in gioco assumono valori piccoli rispetto alla velocità della luce.** Questo fatto mostra che il passaggio dalla fisica classica a quella relativistica avviene con continuità, essenzialmente modulato dal quoziente v/c tra le velocità in gioco nel processo fisico e la velocità della luce.

Ciò premesso, le trasformazioni di Lorentz affermano che, in relazione alla **velocità della luce che viene ad assumere nella fisica il ruolo di velocità di riferimento**, esistono **due regimi**: quello **classico** delle basse velocità e quello **relativistico** delle alte velocità che esploreremo nei prossimi paragrafi. Sotto questo profilo **la TRR non dichiara il fallimento della fisica classica ma ne limita solo il dominio di applicabilità** riconoscendo che il regime classico si estende fino alle velocità che rimangono piccole rispetto a quella della luce.

$$O \to O' \begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t \end{cases}$$

$$O' \to O \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t' \end{cases}$$

La dilatazione dei tempi

Esaminiamo la trasformazione degli intervalli temporali da ***O'*** ad ***O***. Rispetto alla trasformazione di Galileo $(t_2 - t_1) = (t_2' - t_1')$, compaiono differenze essenziali nei punti indicati

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad 1)$$

A (termine $\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')$) — B (denominatore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

Quale è il contenuto fisico di queste differenze? Tenendo ben presente quanto affermato nel paragrafo precedente (*Trasformazioni di Lorentz e raggi luminosi*), cercheremo di interpretare questi termini facendo riferimento ad eventi riguardanti la propagazione di raggi luminosi.

Per saggiare il significato del **termine B escludendo il termine A,** conviene riferirsi ad eventi che per l'osservatore O' accadono nello stesso punto dello spazio in tempi però diversi in modo tale da avere

$$(x_2' - x_1') = 0 \qquad (t_2' - t_1') \neq 0 \qquad 2)$$

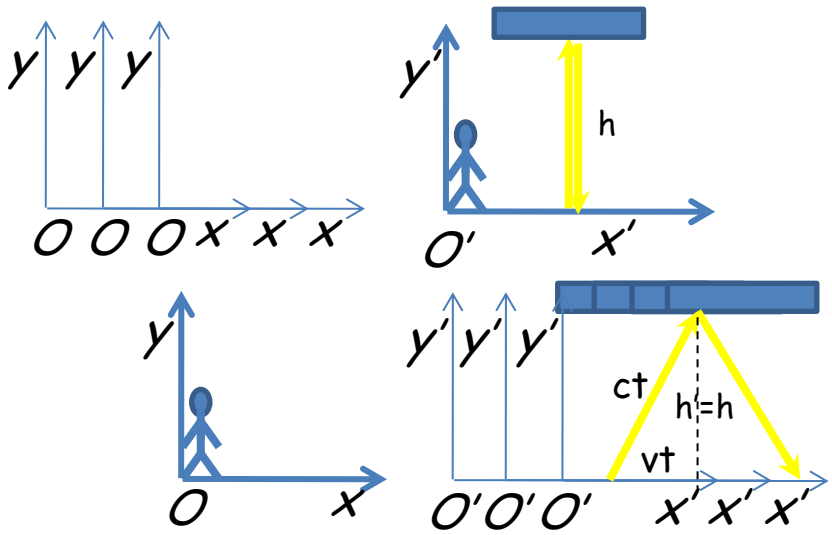
Con una tale coppia di eventi dalla (1) si ottiene l'espressione

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che possiamo porre nella forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad 4)$$

Troviamo allora che il termine B nella trasformazione (1) indica che **due eventi separati da un intervallo temporale $\Delta t'$ per l'osservatore in quiete, risultano separati da un intervallo temporale Δt più lungo per l'osservatore in movimento !**



Per interpretare questo fatto Immaginiamo un raggio luminoso che, nel riferimento ***O'***, parte dal punto (x_1', y_1') al tempo t_1', si propaga in direzione verticale per un tratto ***h***, incontra uno specchio che lo riflette fino a tornare nello stesso punto (x_1', y_1') al tempo t_2'. Gli eventi fisici '*partenza del raggio luminoso*' e '*ritorno del raggio luminoso*' soddisfano le (2) fornendo

$$\Delta x' = (x_2' - x_1') = 0 \qquad \Delta t' = (t_2' - t_1') = 2h/c \qquad 3)$$

Quale separazione temporale misura invece ***O?*** Osserviamo in primo luogo che l'osservatore O vedrà un raggio luminoso salire obliquamente verso lo specchio per poi ridiscendere obliquamente verso il punto del riferimento O' da cui era stato emesso.

Tenendo presente che **la velocità della luce vale c anche per O**, da semplici considerazioni cinematiche si ottiene immediatamente che il tempo **t** impiegato dal raggio luminoso per raggiungere lo specchio soddisfa la relazione

$$ct = \sqrt{h^2 + (vt)^2}$$

da cui si ottiene

$$t = \frac{h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e quindi un tempo di andata e ritorno del raggio luminoso pari a

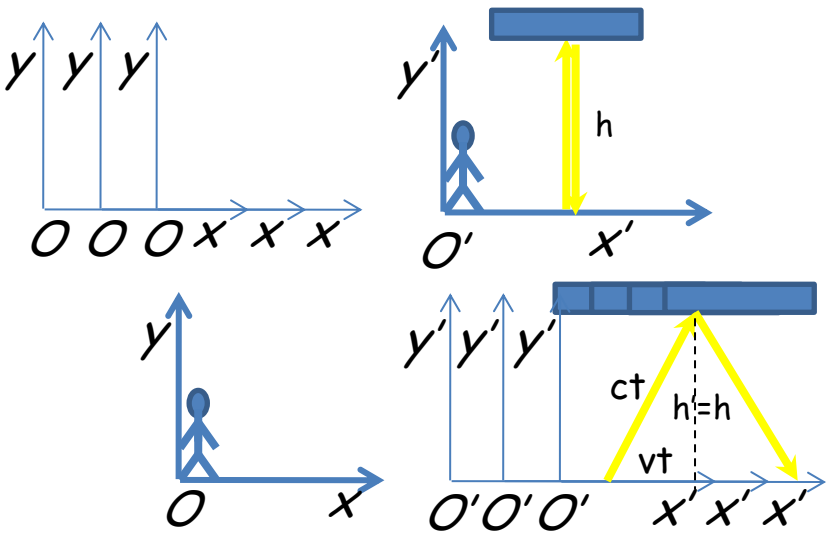
$$t_2 - t_1 = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

il quale, tenendo conto della (3), può essere espresso nella forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che coincide in effetti con la (4).

Dunque, gli osservatori O' ed O osservano la luce compiere due diversi tragitti di cui il primo più breve del secondo. Nonostante questo fatto, i due osservatori misurerebbero la stessa separazione temporale tra gli eventi partenza ed arrivo del segnale luminoso se la luce fosse soggetta alla legge galileiana di composizione della velocità (è facile provarlo!). Il punto però è che il secondo postulato afferma proprio che la luce si propaga con la stessa velocità per tutti gli osservatori violando la legge di composizione galileiana, un fatto possibile solo se gli osservatori misurano intervalli temporali differenti.



L'esempio chiarisce allora che il secondo postulato comporta che **due eventi separati da un intervallo temporale Δt' per l'osservatore in quiete devono risultano separati da un intervallo temporale Δt più lungo per l'osservatore in movimento**. Aumentando la velocità di traslazione del riferimento ***O'***, pur restando invariato per lui l'intervallo temporale ***Δt'*** tra gli eventi, aumenta quello ***Δt*** misurato da ***O***, che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di ***O'*** si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **dilatazione degli intervalli temporali** e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz **ogni osservatore inerziale misura una propria durata degli eventi fisici** un fatto riferito sinteticamente affermando che, contrariamente a ciò che accadeva nella fisica classica, **gli intervalli temporali sono relativi.**

La relatività della simultaneità

Richiamando ancora la trasformazione del tempo da O' ad O

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad 1)$$

A

B

cercheremo ora di comprendere il significato del termine A. La cosa più semplice è riferirsi ad una coppia di eventi tali che

$$(x'_2 - x'_1) \neq 0 \qquad (t'_2 - t'_1) = 0 \qquad 2)$$

ovvero eventi che per l'osservatore O' accadono in punti dello spazio differenti lungo la direzione del moto relativo dei riferimenti ma che vengono misurati accadere nello stesso istante essendo quindi simultanei.

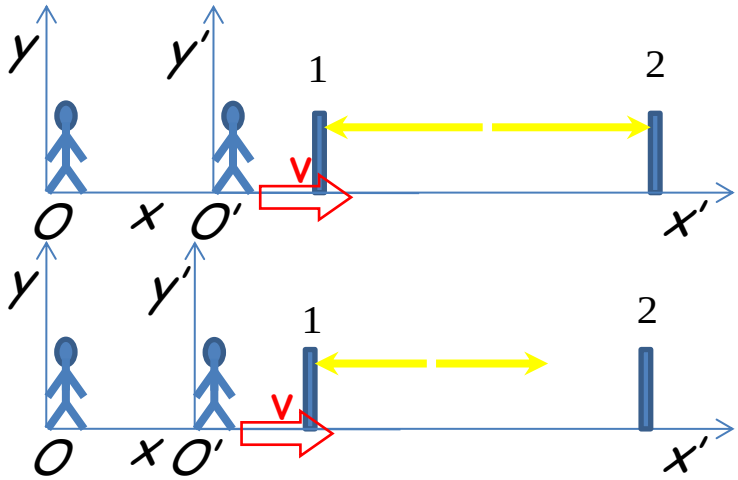
Notiamo subito che una tale coppia di eventi fornisce la seguente espressione della (1)

$$(t_2 - t_1) = \frac{\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che possiamo porre nella forma

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad 3)$$

Questa espressione mostra che **i due eventi non sono misurati come simultanei dall'osservatore in moto relativo O che li vede dissincroni in una misura crescente con la loro separazione spaziale** (si noti in questa formula la separazione spaziale è espressa nelle variabili di O').



Per interpretare questo fatto immaginiamo che nel riferimento ***O'***, lungo la direzione ***x'***, siano disposti due traguardi distanti **L'** nelle posizioni x_1' e x_2'. Ad un certo istante, dal punto di mezzo (tra i due traguardi), vengono emessi due raggi luminosi lungo l'asse ***x'*** in versi opposti, raggiungendo, dopo un certo tempo, i traguardi stessi. Senza dubbio per l'osservatore **O'** i raggi raggiungono i traguardi contemporaneamente. Gli intervalli spaziali e temporali che separano gli eventi arrivo dei due raggi luminosi sui due traguardi valgono allora

$$\Delta x' = (x'_2 - x'_1) = L' \qquad \Delta t' = (t'_2 - t'_1) = 0$$

Quali intervalli misura invece l'osservatore O? Mentre O' vede i raggi cadere simultaneamente sui due traguardi, l'osservatore ***O***, vede un raggio andare incontro al traguardo (1) e l'altro inseguire il traguardo (2). Dato che **la velocità della luce vale c per tutti e due i raggi luminosi** egli deve concludere che la luce raggiungerà

prima un traguardo e poi l'altro. Ora, assumendo come origine dei tempi l'istante in cui vengono emessi i raggi luminosi, le posizioni lungo l'asse delle x dei raggi e dei traguardi sono date dalle espressioni

$$traguardo(1) \qquad x_0 - \frac{L}{2} + vt$$

$$raggio(1) \qquad x_0 - ct$$

$$traguardo(2) \qquad x_0 + \frac{L}{2} + vt$$

$$raggio(2) \qquad x_0 + ct$$

dove, introducendo L, abbiamo previsto la possibilità che i due traguardi vengano misurati da O ad una distanza diversa da quella misurata da O'.

Chiaramente i raggi incontrano i rispettivi traguardi quando eguagliano le rispettive posizioni sull'asse delle x per cui otteniamo le uguaglianze

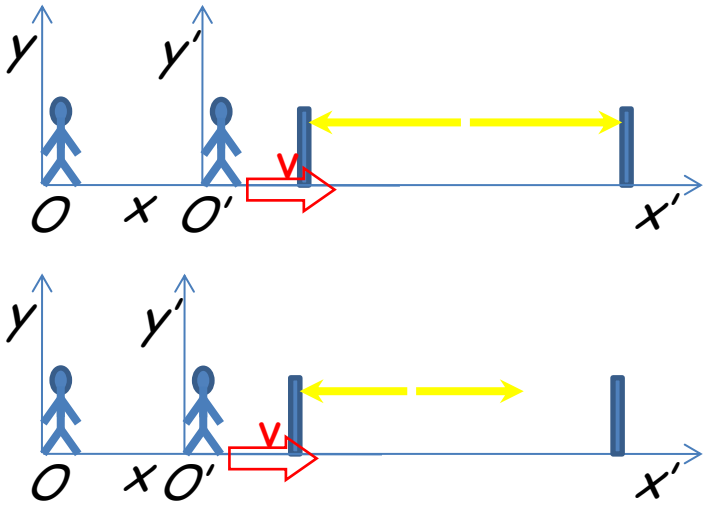
$$x_0 - ct_1 = x_0 - \frac{L}{2} + vt_1 \qquad x_0 + ct_2 = x_0 + \frac{L}{2} + vt_2$$

da cui si ottengono i tempi

$$t_1 = \frac{L/2}{c+v} \qquad t_2 = \frac{L/2}{c-v}$$

ed infine la separazione tra gli eventi di arrivo dei due raggi sui traguardi misurata da O

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} L / (1 - \frac{v^2}{c^2}) \qquad 4)$$



Tale espressione non può ancora essere confrontata con la (3) perché in quella formula l'intervallo spaziale risulta misurato da O' e non da O. Le due espressioni (4) e (3) risulteranno coincidenti se

$$L = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad 5)$$

Infatti sostituendo la (5) nella (4) troviamo

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2} L'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v^2/c^2)} = \frac{\frac{v}{c^2} L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene infine l'espressione

$$\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che coincide con la (3)!

Dunque, ammettendo la relazione (5) che interpreteremo nel paragrafo seguente, i due osservatori misurano differenti situazioni. O vede i raggi luminosi raggiungere i traguardi nello stesso istante mentre O' vede il primo raggio andare incontro al primo traguardo ed il secondo raggio inseguire il secondo traguardo. Nonostante questo fatto entrambi gli osservatori misurerebbero l'arrivo dei raggi sui traguardi come simultaneo se la luce fosse soggetta alla legge galileiana di composizione della velocità (è facile provarlo!). Il punto però è che il secondo postulato afferma proprio che la luce si propaga con la stessa velocità per tutti gli osservatori violando la legge di composizione galileiana, un fatto che costringe a concludere che l'arrivo dei raggi sui due traguardi non può essere simultaneo per tutti e due gli osservatori.

L'esempio chiarisce allora che il secondo postulato comporta che **due eventi simultanei per l'osservatore in quiete risultano dissincroni per l'osservatore in movimento in misura crescente con al loro separazione spaziale**. Aumentando la velocità di traslazione del riferimento ***O'***, pur restando per lui sincroni gli eventi, aumenta il dissincronismo misurato da ***O***, che può addirittura tendere all'infinito mano a mano che la velocità di traslazione di ***O'*** si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **desincronizzazione degli intervalli temporali** e mostra che secondo le trasformazioni di Lorentz **due eventi possono essere simultanei per un solo osservatore risultando dissincroni per tutti gli altri** un fatto riferito sinteticamente affermando che, contrariamente a ciò che accadeva nella fisica classica, **la simultaneità degli eventi è un concetto relativo.**

Per finire vale la pena notare che questo nuovo effetto comporta che un intervallo giudicato spaziale da O' viene invece giudicato come spaziale e temporale da O. Le trasformazioni di Galileo ammettevano che un intervallo puramente temporale per un osservatore potesse essere interpretato come spaziale e temporale da un altro (un fenomeno periodico per ***O'*** si chiude in tempi diversi ed in punti diversi per ***O***). Tuttavia un intervallo puramente spaziale per un osservatore, rimaneva tale per ogni altro. In relatività il cerchio si chiude e si osserva una completa reversibilità dei punti di vista per cui anche **la definizione della natura spaziale o temporale di un intervallo acquisisce un carattere completamente relativo.**

La contrazione delle lunghezze

L'analisi del concetto di simultaneità sviluppata nel paragrafo precedente ha richiesto ad un certo punto la seguente relazione (vedi la (5)) tra la misura di lunghezza compiuta da O' - che vedeva i traguardi in quiete ad una distanza L' - e quella compiuta da O – che invece vedeva i traguardi in moto con velocità v

$$L = L'\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (1)$$

Questo significa che non possiamo semplicemente assumere che i due tipi di misura coincidano ma che, al contrario, dobbiamo affrontare il problema inedito di misurare la distanza tra due traguardi che si trovino in movimento rispetto all'osservatore, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie quando i due traguardi si trovano in quiete. Infatti l'osservatore O', rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustapponendo un regolo graduato e annotando le tacche corrispondenti ai due traguardi. In questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi è verificata per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa.

Ragionando in termini di eventi fisici, che in questo consistono nella coincidenza dei traguardi con le tacche del regolo, abbiamo per l'osservatore O' i seguenti intervalli

$$(x'_2 - x'_1) = L' \qquad (t'_2 - t'_1)\ \textit{qualsiasi} \qquad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O che li vede muoversi? Può ancora utilizzare il regolo per misurare la distanza dei traguardi ora che sono in moto rispetto al regolo stesso?

Chiaramente in questo caso la difficoltà consiste nel fatto che i traguardi si muovono rispetto al regolo per cui il confronto delle loro posizioni lungo il regolo può essere fatto solo specificando l'istante di tempo. Un attimo di riflessione chiarisce che l'unica sensata possibilità è quella di confrontare tra loro le posizioni dei traguardi lungo il regolo nello stesso istante di tempo. Si potrebbe così identificare **la distanza dei traguardi misurata da O con la differenza delle posizioni simultanee dei traguardi lungo il regolo ad un qualunque istante di tempo**. Una tale definizione, nel caso in cui traguardi fossero fermi rispetto al regolo, restituirebbe la consueta operazione di misura della distanza. Da un punto di vista concettuale, quella appena data, è una **definizione operativa di misura di lunghezza di un corpo materiale in movimento rispetto al regolo** (in questo caso la distanza di due traguardi fermi rispetto ad O'). Vale la pena sottolineare che il termine regolo può essere inteso in senso assai lato. Ad esempio una serie di osservatori disposti lungo la direzione del moto relativo, muniti di orologi sincronizzati, svolgono le operazioni appena discusse per misurare la lunghezza di corpi materiali in movimento (ad esempio la misura della lunghezza di un treno in moto).

La distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere quindi definita come **la distanza tra le tacche del regolo che, nello stesso istante, vengono occupate dai due traguardi,** la qual cosa comporta le seguenti condizioni sugli intervalli misurati da O

$$(x_2 - x_1) = L \qquad (t_2 - t_1) = 0 \qquad (4)$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle trasformazioni di Lorentz nella forma intervallare otteniamo

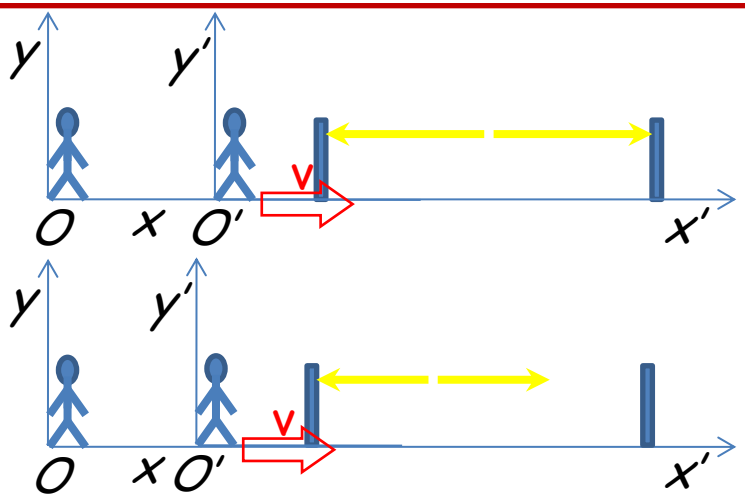
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \qquad L = \frac{L' - v\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (1) ipotizzata essere valida nel precedente paragrafo.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente **relazione tra le distanze dei traguardi Δx', misurata con regolo in quiete, e Δx, misurata con regolo in moto**

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Concludiamo allora che **due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale Δx' per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento.** A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto **contrazione degli intervalli spaziali** o **contrazione delle lunghezze** e mostra che **secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici**. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, **la distanza tra due eventi è una grandezza relativa** e non assoluta.

La contrazione delle lunghezze

Richiamiamo la ben nota trasformazione degli intervalli spaziali disposti lungo la direzione del moto

$$(x_2 - x_1) = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1)$$

ed anche quella degli intervalli temporali

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

Poi, immaginiamo nuovamente la situazione analizzata nel paragrafo precedente dove, nel riferimento ***O'*** lungo la direzione ***x'***, erano disposti due traguardi distanti **L'** nelle posizioni x_1' e x_2'.

Qual è la distanza L dei traguardi misurata dall'osservatore O che li vede muoversi con velocità v assieme al riferimento O' cui sono solidali? Coincide con la distanza L' misurata da O'? Si pone così il problema inedito di misurare la distanza di due traguardi in movimento, un tipo di misura che evidentemente non può essere eseguita nello stesso modo in cui si compie la misura della distanza di due traguardi in quiete.

Infatti l'osservatore O', rispetto al quale i traguardi sono in quiete, può pensare di eseguire la misura nel più ovvio dei modi giustapponendo un regolo graduato e verificando le tacche corrispondenti ai due traguardi. Si noti che in questo tipo di misura il tempo non ha alcun ruolo poiché la coincidenza spaziale delle tacche con i traguardi deve essere verificata sempre, ovvero per tutti gli istanti di tempo, essendo regolo e traguardi in quiete relativa. Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O' corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x_2' - x_1') = L' \qquad (t_2' - t_1') \ qualsiasi \qquad (3)$$

In che modo, invece, può misurare la distanza tra i traguardi l'osservatore O?

Immaginiamo di dovere misurare la lunghezza di un treno in transito nella stazione. Potremmo innanzitutto disporre osservatori dotati di cronometro lungo il marciapiede per una lunghezza sufficiente a comprendere l'intero treno. Poi potremmo sincronizzare i diversi cronometri con una qualche procedura in modo che marcino perfettamente paralleli (si può pensare di inviare un segnale luminoso lungo il marciapiede ricevuto il quale, ogni osservatore, posizionerà il cronometro ad un tempo pari a ***d/c*** dove ***d*** è la distanza dell'osservatore dal punto di emissione del segnale). A questo punto è sufficiente che, al passaggio del treno, ogni osservatore annoti i tempi in cui vede di fronte a se la testa e la coda del treno. Si comprende allora che è ragionevole assumere, come lunghezza del treno, la distanza di due osservatori (qualunque) che vedono la testa e la coda del treno nello stesso istante.

Dunque, la distanza dei traguardi in movimento misurata da O può essere definita come ***la distanza tra due punti dello spazio del riferimento O che, nello stesso istante, vengono occupati dai due traguardi.*** Questo significa che la misura della distanza dei traguardi da parte di O corrisponde alle seguenti condizioni sugli intervalli

$$(x_2 - x_1) = L \qquad (t_2 - t_1) = 0 \qquad (4)$$

Sostituendo le condizioni (3) e (4) nelle formula (1) e (2) otteniamo

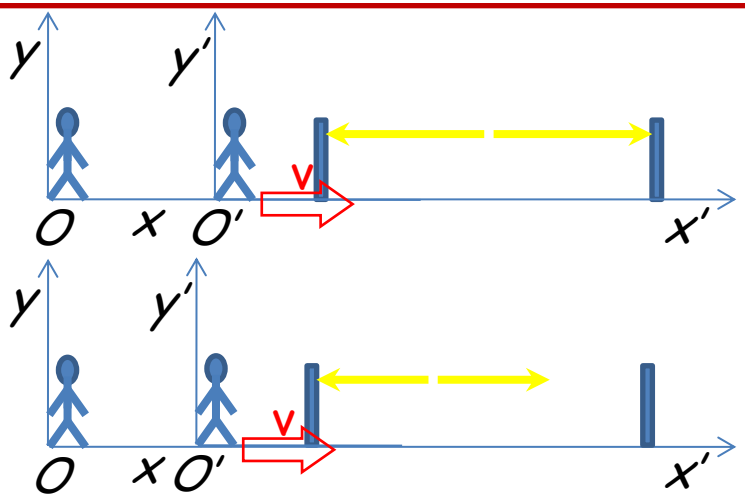
$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ 0 = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}L'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{L' + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (t_2' - t_1') = -\dfrac{v}{c^2}L \end{cases} \qquad L = \frac{L' - v\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che coincide con la (3) che, nel precedente paragrafo, abbiamo ipotizzato essere valida.

Con un lieve cambio di notazione scriveremo allora la seguente relazione tra le distanze dei traguardi $\Delta x'$ e Δx misurate dagli osservatori O' ed O rispettivamente in quiete ed in moto rispetto ai traguardi stessi

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$



Concludiamo allora che ***due eventi lungo la direzione di moto che hanno una distanza spaziale $\Delta x'$ per l'osservatore in quiete sono misurati con una distanza spaziale Δx più corta dall'osservatore in movimento.*** A questo proposito si noti che, aumentando la velocità di traslazione del riferimento O', pur restando invariata per O' l'intervallo spaziale tra gli eventi, diminuisce quello misurato da O che può addirittura tendere a zero mano a mano che la velocità di traslazione di O' si avvicina a quella della luce.

Tale effetto viene detto ***contrazione degli intervalli spaziali*** o ***contrazione delle lunghezze*** e mostra che ***secondo le trasformazioni di Lorentz ogni osservatore inerziale misura una propria distanza tra gli eventi fisici***. Formulato in altri termini questo fatto significa che, diversamente da quanto accade con le trasformazioni di Galileo, ***la distanza tra due eventi è una grandezza relativa*** e non assoluta.

La velocità limite

L'esistenza di una velocità massima possibile, valida per ogni ente fisico (corpi materiali, onde, etc. etc.), è scritta nelle trasformazioni di Lorentz. Si noti, infatti, che in queste compaiono denominatori con radici quadrate

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1);$$

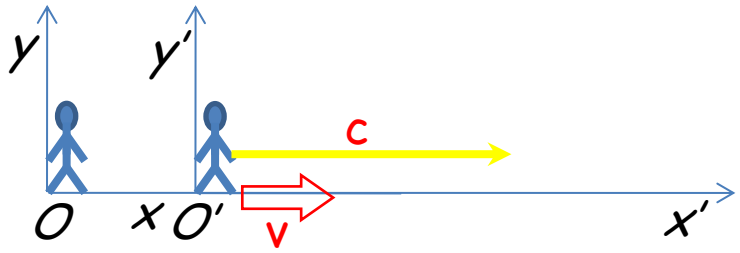
$$(z_2' - z_1') = (z_2 - z_1); \quad (t_2' - t_1') = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

per cui tali espressioni hanno senso solo se le radici quadrate sono reali e non nulle ovvero solo se $1 - v^2/c^2 > 0$ (escludiamo in questa analisi la possibilità che tali radici assumano valori complessi!). Si ottiene allora la seguente condizione sulla velocità della traslazione uniforme del riferimento

$$|v| < |c|$$

valida per un qualsiasi corpo materiale (infatti il riferimento è un corpo materiale come gli altri).

Concludiamo allora che le trasformazioni di Lorentz richiedono che, in ogni riferimento inerziale, **la velocità di un qualunque corpo materiale sia sempre minore di quella della luce** che così assume il ruolo di **velocità limite** raggiungibile solo dagli enti fisici non materiali come i campi elettromagnetici.



Chiaramente, **l'esistenza di una velocità limite comporta che la legge di composizione galileiana delle velocità sia errata**. Questo fatto emerge con chiarezza qualora si immagini che l'osservatore ***O'*** invii un raggio luminoso lungo le ***x'*** positive. Se valesse la legge galileiana, il raggio luminoso si propagherebbe con velocità **c+v** rispetto ad O violando l'esistenza della velocità limite oltre che, naturalmente, anche il secondo postulato.

Il teorema di addizione delle velocità

Consideriamo ad esempio le trasformazioni degli intervalli da O' ad O. Evidentemente si ottengono le velocità semplicemente mettendo a rapporto gli intervalli spaziali e temporali

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1') \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1') \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dfrac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(y_2' - y_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \\ \dfrac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} = \dfrac{(z_2' - z_1')\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(t_2' - t_1') + \dfrac{v}{c^2}(x_2' - x_1')} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_y = \dfrac{\dfrac{(y_2' - y_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \\ v_z = \dfrac{\dfrac{(z_2' - z_1')}{(t_2' - t_1')}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'} \\ v_y = \dfrac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'} \\ v_z = \dfrac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'} \end{cases}$$

Otteniamo così le **leggi relativistiche di composizione delle velocità**

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'} \qquad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'} \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2}v_x'}$$

che sostituiscono quelle galileiane. La struttura delle nuove leggi di composizione è piuttosto complessa, tuttavia, come atteso, le leggi relativistiche conducono a quelle galileiane nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Infatti se $v \ll c$ si ottiene facilmente

$$v_x \simeq v_x' + v \qquad v_y \simeq v_y' \qquad v_z \simeq v_z'$$

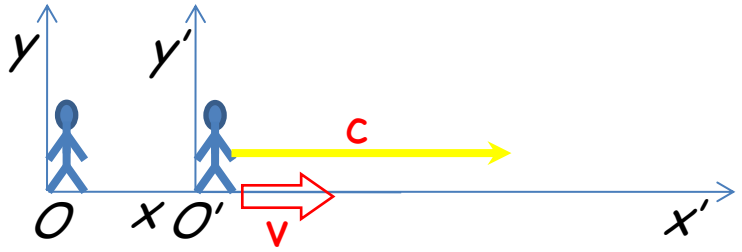
Notiamo che dato un corpo materiale in moto con una certa velocità v'_x, v'_y, v'_z rispetto ad **O'** appare in moto anche ad **O**, ovviamente. Tuttavia le velocità trasversali al moto che egli osserva, non dipendono solamente dalle velocità trasversali che il corpo aveva rispetto ad **O'**, dipendono anche da quella longitudinale lungo la direzione del moto. In un certo senso *le componenti della velocità si mescolano tra loro* contrariamente a quanto avviene con la composizione galileiana delle velocità.

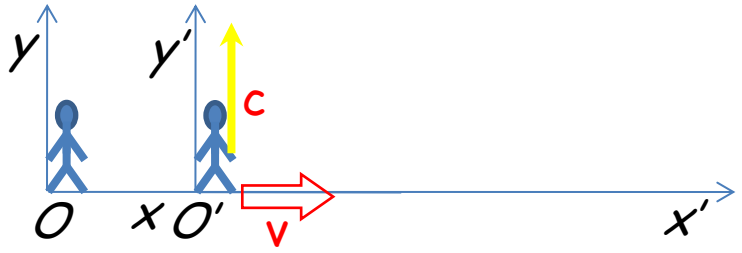
Ancora più sorprendente è **la regola di addizione delle velocità lungo la direzione del moto**. Ragionando con l'esempio esaminato all'inizio si ottiene

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

*Ovvero dato un riferimento **O'** che si muove con velocità v rispetto ad **O** (lungo le **x'** positive), se un raggio luminoso si muove con velocità c rispetto ad **O'** (lungo le **x'** positive), allora tale raggio si muove con velocità c anche rispetto ad **O**. Dunque, **secondo le leggi relativistiche di composizione delle velocità v+c=c, in accordo con l'esistenza di una velocità limite*** (e con il secondo postulato) ma in completo conflitto con le leggi galileiane.

Per completezza analizziamo anche il caso in cui **il raggio luminoso sale verticalmente rispetto ad *O'* ($v'_x=0$, $v'_y=c$) e quindi obliquamente rispetto ad O.** Si ha allora





$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} v'_x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v \\ v_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}$$

da cui possiamo calcolare la velocità del raggio luminoso rispetto ad O

$$\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)} = c$$

in accordo con il secondo postulato.

Il principio di causalità

Dato che una teoria fisica, qualunque essa sia, si pone l'obiettivo di **prevedere l'evoluzione temporale di un sistema fisico** si comprende che l'ipotesi che esso **evolva attraverso un flusso temporalmente ordinato e prevedibile di eventi fisici** ne costituisce l'inevitabile presupposto.

In tali sistemi riveste un ruolo chiave la **relazione di causa-effetto** tra due eventi che permette di descriverne l'evoluzione temporale come una sequenza di accadimenti successivi connessi tra loro in modo tale che quello che precede – la causa - determina quello che segue - l'effetto (se ad ogni causa corrisponde un solo effetto si ha un sistema non solo causale ma anche deterministico).

Queste osservazioni fanno comprendere che le teorie fisiche, proprio per la loro intrinseca necessità di fare previsioni, **devono organizzare le grandezze fisiche in cause ed effetti**, un aspetto che non viene quasi mai sottolineato. Ad esempio nella meccanica newtoniana è la forza che determina l'accelerazione e non viceversa per cui si dice che la forza è la causa e l'accelerazione l'effetto oppure che forza ed accelerazione sono in una relazione di causa-effetto. Così, in elettromagnetismo sono le cariche elettriche che, accelerando, generano un'onda elettromagnetica e non viceversa.

Alcune importante proprietà della relazione di causa-effetto emergono quasi immediatamente.

In primo luogo, poiché la relazione di causa-effetto esprime una connessione tra eventi realizzata attraverso un qualche ente fisico essa ha un carattere oggettivo e deve essere verificata da ogni possibile osservatore: **la relazione di causa-effetto è verificata da tutti gli osservatori ed ha un carattere assoluto.**

Una seconda inevitabile proprietà riguarda l'ordine temporale: **se due eventi sono in relazione di causa-effetto la causa precede sempre l'effetto per tutti gli osservatori** (data la natura assoluta delle proprietà). Se ciò non accadesse la teoria potrebbe condurre a situazioni palesemente assurde (ad esempio immaginiamo che in un certo punto dello spazio, ad un certo tempo, venga esploso un colpo di pistola il cui proiettile va a colpire, ad un certo tempo successivo, una bottiglia posizionata ad una certa distanza frantumandola in mille pezzi. Se l'effetto non seguisse la causa per tutti gli osservatori accadrebbe che qualcuno di loro vedrebbe la bottiglia frantumarsi prima del colpo di pistola).

Ora, supponiamo che una teoria preveda che le azioni fisiche, qualunque sia la loro natura, possano propagarsi con una velocità limitata superiormente da un certo valore V_m. E' chiaro che in questo caso due eventi fisici possono essere causalmente connessi da una qualche azione fisica solo se la loro separazione temporale e spaziale non è incompatibile con la propagazione della più veloce delle azioni fisiche. Concludiamo allora che **due eventi separati da una distanza temporale Δt possono essere in relazione di causa-effetto solo se la loro separazione spaziale Δx è tale che $|\Delta x/\Delta T|<V_m$ per tutti gli osservatori** (natura assoluta delle proprietà). Una ovvia conseguenza di questo fatto è che

mano a mano che la distanza temporale tra causa ed effetto diminuisce deve diminuire anche la corrispondente distanza spaziale per cui, nel limite di una causa ed effetto simultanee si deve avere anche una separazione spaziale nulla. Giungiamo così alla conclusione che **due eventi causalmente connessi e simultanei, ovvero temporalmente coincidenti, devono coincidere anche spazialmente e queste coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori**. In altri termini **le connessioni causali simultanee sono solo locali**, una proprietà riferita come **causalità locale** (come esempio di teoria non causalmente locale possiamo citare la meccanica classica che non possiede alcun limite intrinseco alla velocità di propagazione delle interazioni ammettendo, ad esempio, l'azione gravitazionale istantanea a distanza).

Questo fatto ci fa comprendere che in una teoria fisica causale, con una velocità di propagazione massima delle interazioni, **le coincidenze spaziali e temporali devono essere verificate da tutti gli osservatori** ovvero devono avere un **carattere assoluto**, un punto torneremo nel prossimo paragrafo.

Giungiamo allora alla conclusione che una teoria fisica come la relatività ristretta deve essere **localmente causale** ovvero deve essere tale che, nel caso di eventi in relazione di causale, **in tutti i riferimenti inerziali la causa deve precedere l'effetto e il quoziente tra il loro intervallo spaziale ed il loro intervallo temporale deve soddisfare la relazione $|\Delta x/\Delta t| < c$.** Qualora ciò non accadesse si aprirebbe un delicato problema di consistenza interna della teoria stessa.

❑ Le proprietà causali della TRR

Per stabilire se la Teoria della Relatività Ristretta soddisfa il principio di causalità locale ed assoluta conviene richiamare la trasformazione di Lorentz per l'intervallo temporale che riscriviamo nella seguente forma

$$(t_2 - t_1) = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\left[1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t_2' - t_1') \quad (1)$$

Ora immaginiamo che nel riferimento O' accadano due eventi fisici causalmente connessi: la causa nella posizione X_1 al tempo t_1 e l'effetto nella posizione X_2 al tempo $t_2 > t_1$. Poiché tali eventi sono causalmente connessi, sulla base del secondo postulato della teoria della relatività ristretta avremo la condizione

$$\left|\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}\right| < c \qquad -c < \frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < c \qquad (2)$$

Consideriamo ora la quantità tra parentesi quadra nella (1) e sostituiamo la (2), si ha

$$1 - \frac{v}{c} < 1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} < 1 + \frac{v}{c}$$

da cui, in particolare, discende che per tutti gli eventi in relazione di causa-effetto si ha

$$1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')} > 1 - \frac{v}{c} > 0 \qquad (3)$$

tenendo conto della (3) dalla (1) otteniamo

$$(t_2 - t_1) = \left(\frac{1 + \frac{v}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{(t_2' - t_1')}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)(t_2' - t_1') \quad > 0$$

la quale mostra gli intervalli temporali mantengono la stessa segnatura. Abbiamo così mostrato che **nel caso di eventi causalmente connessi l'ordine temporale è lo stesso per tutti gli osservatori** per cui **la precedenza temporale della causa sull'effetto ha un carattere assoluto** in accordo con quanto atteso nel caso di una teoria che soddisfa il principio di causalità.

E' istruttivo osservare che nel caso di eventi che non possono essere causalmente connessi in quanto non soddisfano la (2) otteniamo che la segnatura degli intervalli temporali può essere invertita. Questo significa che **per tali eventi l'ordine temporale non ha un carattere assoluto** e può accadere che i differenti osservatori vedano una differente sequenza degli eventi. Per quanto ciò possa apparire strano è comunque certo che, essendo tali eventi fisicamente indipendenti, tale fatto non condurrà mai a situazioni assurde.

❑ Dai raggi luminosi alle proprietà dello spazio e del tempo

Ora vogliamo discutere in maggior dettaglio un aspetto già commentato nei precedenti paragrafi. Si tratta del fatto che, in una teoria come la relatività ristretta che ha nella velocità della luce la massima velocità delle azioni fisiche, due eventi simultanei causalmente connessi devono necessariamente avvenire nello stesso punto dello spazio e questo per ogni osservatore. In altri termini **il principio di causalità nella forma locale, cui soddisfa la TRR, implica che le coincidenze spazio-temporali devono avere un carattere assoluto.** Vale sempre la pena ricordare che questo fatto non è vero per le sole coincidenze spaziali (le coincidenze spaziali hanno un carattere relativo già nel caso delle trasformazioni di Galileo) o temporali (le coincidenze temporali hanno un carattere assoluto nel caso Galileiano ma assolutamente relativo con le trasformazioni di Lorentz dove si osserva la relatività della simultaneità) ma solo quando le coincidenze sono sia temporali che spaziali.

Ciò premesso, ora vedremo che l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà degli intervalli spaziali e temporali ottenute a suo tempo, analizzando la propagazione di raggi luminosi, devono essere assolutamente indipendenti dal fenomeno fisico utilizzato per evidenziarle e devono pertanto essere ritenute proprietà autonome ed intrinseche degli intervalli spaziali e temporali stessi.

Intanto verifichiamo quanto detto. Dalle trasformazioni di Lorentz per gli intervalli otteniamo

$$\begin{cases} (x_2 - x_1) = \dfrac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ (y_2 - y_1) = (y_2' - y_1'); \\ (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1'); \\ (t_2 - t_1) = \dfrac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

da cui consegue che se l'osservatore O' vede due eventi coincidere spazio-temporalmente

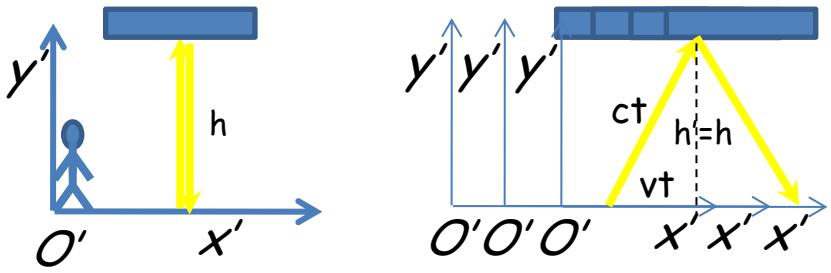
$$\{(x_2 - x_1) = 0 \quad (y_2 - y_1) = 0 \quad (z_2 - z_1) = 0 \quad (t_2 - t_1) = 0$$

anche l'osservatore O li vedrà coincidere spazio-temporalmente

$$\{(x_2' - x_1') = 0 \quad (y_2' - y_1') = 0 \quad (z_2' - z_1') = 0 \quad (t_2' - t_1') = 0$$

Dunque **due eventi fisici spazialmente e temporalmente coincidenti per un osservatore inerziale risultano tali per ogni altro osservatore inerziale.** In altri termini, come atteso, **le coincidenze spazio-temporali di due eventi sono assolute**.

Come accennato, questa proprietà delle trasformazioni di Lorentz è di grande rilevanza. Il secondo postulato precisa in che modo si propaga la luce nei diversi riferimenti, assieme al primo determina la forma delle trasformazioni di Lorentz e permette di costruire i diversi esperimenti ideali attraverso i quali abbiamo esplorato gli effetti relativistici della dilatazione del tempo, contrazione delle lunghezze e relatività della



simultaneità. Il ruolo centrale giocato dalla propagazione della luce potrebbe fare sorgere il dubbio che le trasformazioni di Lorentz e gli effetti relativistici non ci informino di reali proprietà dello spazio e del tempo ma solo di proprietà della misura degli intervalli spaziali e temporali per mezzo di raggi luminosi. In altri termini si potrebbe pensare che gli effetti relativistici potrebbero essere effetti a carico della operazione di misura i quali, una volta corretti, permetterebbero di ottenere la vera misura degli intervalli spaziali e temporali. In realtà, come vedremo, la natura assoluta delle coincidenze spazio-temporali non lascia aperta questa possibilità, forzandoci a concludere che le proprietà dello spazio e del tempo, dedotte attraverso ragionamenti con regoli ed orologi luminosi, devono essere attribuite non a questi ultimi ma proprio allo spazio ed al tempo.

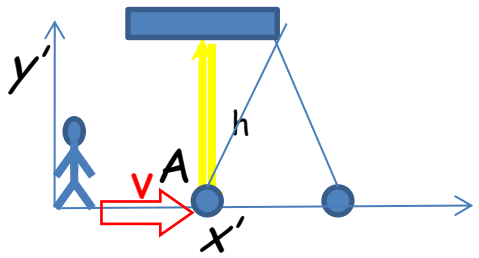
Ad esempio consideriamo il semplice dispositivo utilizzato per illustrare il fenomeno della dilatazione dei tempi. Come sappiamo i postulati della TRR conducono alla espressione seguente

$$\Delta t_M = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

la quale afferma che l'intervallo temporale Δt_0 misurato dall'osservatore in quiete ***O'***, è più corto di quello Δt_M misurato dall'osservatore in moto ***O***. In questa situazione *si potrebbe pensare che non è l'intervallo temporale a dilatarsi ma piuttosto il modo in cui lo misuriamo*. In altre parole, si potrebbe pensare che usando un orologio 'luminoso' si trovi l'effetto calcolato mentre usando, ad esempio, un orologio a cucù, si potrebbe trovare una diversa entità dell'effetto o, addirittura, la sua completa assenza. Se le cose stessero così, non saremmo in presenza di proprietà autentiche (ovvero intrinseche) degli intervalli temporali, ma piuttosto di proprietà dipendenti dal modo in cui questi vengono misurati. Come vedremo la TRR non lascia aperta questa possibilità!

Per comprendere questo fatto, immaginiamo di aggiungere al dispositivo appena visto *un pendolo di lunghezza tale da oscillare, nel riferimento O', con lo stesso tempo che impiega il raggio luminoso a compiere il cammino di andata e ritorno*. Possiamo poi sistemare il pendolo in modo tale che, quando il raggio luminoso parte dal punto A, il pendolo parta dallo stesso punto. Siccome il pendolo ha la lunghezza giusta, quando torna nel punto A, incontra nuovamente, in quel punto, il raggio luminoso.

Notiamo subito che in A la posizione del pendolo e del raggio luminoso coincidono sia spazialmente che temporalmente e che, dopo un certo tempo, il raggio luminoso ed il pendolo tornano nello stesso punto A ovvero tornano a coincidere sia spazialmente che temporalmente.



Siccome le coincidenze spaziotemporali sono assolute, queste avvengono per tutti gli osservatori inerziali per cui ogni altro osservatore inerziale O troverà tali coincidenze. Questo però richiede che l'oscillazione del pendolo e l'oscillazione dell'orologio luminoso abbiano la stessa durata non solo per l'osservatore O' ma per ogni altro osservatore O.

Questo a sua volta equivale ad affermare che se si dilata il tempo misurato dall'orologio luminoso deve dilatarsi, nello stesso modo, anche il tempo misurato dal pendolo.

Dato che questo stesso ragionamento può essere ripetuto con qualunque dispositivo si voglia misurare gli intervalli temporali, è chiaro che ci troviamo innanzi ad una proprietà del tempo indipendente dal modo in cui viene misurato vale a dire ad una sua proprietà intrinseca.

Questi ragionamenti possono essere facilmente estesi anche agli altri effetti relativistici quali la relatività della simultaneità e la contrazione delle lunghezze. Possiamo allora affermare in generale che:

l'assolutezza delle coincidenze spazio-temporali garantisce che le proprietà dello spazio e del tempo, misurate con i raggi luminosi, debbano essere verificate da qualunque altro metodo di misura, ovvero, che tali proprietà sono **proprietà intrinseche dello spazio e del tempo**.

Dunque esiste una connessione profonda tra aspetti apparentemente diversi della teoria della relatività ristretta: la causalità nella forma locale richiede che le coincidenze spazio-temporali abbiano una natura assoluta e questa proprietà delle coincidenze è, a sua volta, cruciale per rendere le proprietà degli intervalli temporali e spaziali, messe in luce attraverso orologi e regoli luminosi, autentiche proprietà del tempo e dello spazio.

Una nuova grandezza assoluta: la distanza spaziotemporale

L'analisi delle proprietà degli intervalli spaziali e temporali condotta fino ad ora probabilmente ci ha convinti che la TTR renda sistematicamente relative, ovvero dipendenti dal riferimento utilizzato, quelle grandezze che le trasformazioni di Galileo, valide nella fisica classica, pensavano essere assolute. Vedremo in questo paragrafo che questa affermazione è solo parzialmente vera poiché se da un lato gli intervalli spaziali e temporali sono relativi troveremo che esiste invece un nuovo tipo di intervallo che assume lo stesso valore per tutti gli osservatori e che pertanto è assoluto.

Richiamiamo le trasformazioni di Lorentz dal riferimento O a quello O' nella forma degli intervalli

$$\begin{cases} (x_2' - x_1') = \dfrac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ (y_2' - y_1') = (y_2 - y_1) \\ (z_2' - z_1') = (z_2 - z_1) \\ (t_2' - t_1') = \dfrac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\,\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Ora eleviamo al quadrato i due membri di ciascuna eguaglianza

$$\begin{cases} \Delta x'^2 = \dfrac{\Delta x^2 + v^2\Delta t^2 - 2v\Delta x\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ \Delta t'^2 = \dfrac{\Delta t^2 + \dfrac{v^2}{c^4}\Delta x^2 - 2\dfrac{v}{c^2}\Delta x\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{cases}$$

Poi riscriviamo le eguaglianza in termini non di Δt ma di cΔt (lo stesso si faccia per Δt')

$$\begin{cases} \Delta x'^2 = \dfrac{\Delta x^2 + \dfrac{v^2}{c^2}c^2\Delta t^2 - 2\dfrac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \\ \Delta y'^2 = \Delta y^2 \\ \Delta z'^2 = \Delta z^2 \\ c^2\Delta t'^2 = \dfrac{c^2\Delta t^2 + \dfrac{v^2}{c^2}\Delta x^2 - 2\dfrac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1 - v^2/c^2)} \end{cases}$$

A questo punto si esegua la somma membro a membro delle prime tre equazioni e si sottragga la quarta

$$\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2-c^2\Delta t'^2=\frac{\Delta x^2+\frac{v^2}{c^2}c^2\Delta t^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2-\frac{c^2\Delta t^2+\frac{v^2}{c^2}\Delta x^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}=$$

$$=\frac{\Delta x^2+\frac{v^2}{c^2}c^2\Delta t^2-2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t-c^2\Delta t^2-\frac{v^2}{c^2}\Delta x^2+2\frac{v}{c}\Delta x\,c\,\Delta t}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2=$$

$$=\frac{\Delta x^2(1-v^2/c^2)-c^2\Delta t^2(1-v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}+\Delta y^2+\Delta z^2=$$

$$=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2$$

Giungiamo allora alla conclusione che il quadrato di un intervallo spaziale (e quindi la distanza spaziale) ed il quadrato di un intervallo temporale (e quindi la distanza temporale o durata) tra due eventi, come più volte osservato, non è la stessa per tutti gli osservatori inerziali. Tuttavia se gli osservatori inerziali sottraggono al quadrato della distanza spaziale tra due eventi il prodotto della velocità della luce per il quadrato della loro distanza temporale (che ha le dimensioni di una lunghezza elevata al quadrato) troveranno tutti lo stesso valore. Questo particolare modo di combinare tra loro gli intervalli spaziali e temporali viene detto **intervallo spaziotemporale** o **distanza spaziotemporale** per cui possiamo affermare che nella teoria della relatività ristretta **la distanza spazio-temporale tra gli eventi è la stessa per tutti gli osservatori inerziali** ovvero che **la distanza spaziotemporale tra due eventi è una grandezza assoluta**

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2 \qquad (4)$$

(si noti che in questa forma, l'assolutezza delle coincidenze spaziotemporali viste nella pagina precedente si deriva immediatamente). Nei prossimi paragrafi mostreremo come questo fatto possa essere sfruttato per giungere ad una elegante e potente riformulazione della teoria della relatività ristretta in termini geometrici.

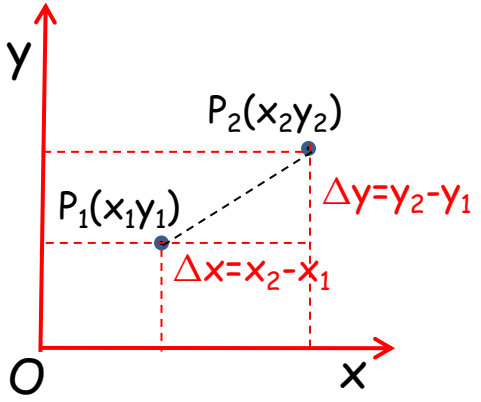
La rotazione del riferimento tridimensionale

La proprietà delle trasformazioni di Lorentz di lasciare invariata la forma quadratica (4) fu messa in luce nel 1908 da Hermann Minkowsky, già professore di A. Einstein al politecnico di Zurigo, che sviluppò una elegante e potente formulazione geometrica della TRR. Per capire l'approccio proposto da Minkowsky vale la pena sviluppare alcune considerazioni preliminari.

❑ Le rotazioni nello spazio tridimensionale

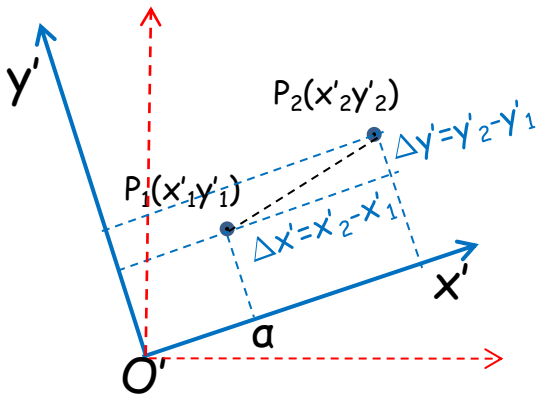
Per semplificare le formule senza perdere i concetti essenziali, pensiamo a **due punti dello spazio tridimensionale euclideo giacenti sul piano xy di un riferimento O**: la loro distanza può essere calcolata attraverso il teorema di Pitagora sommando i quadrati delle differenze delle coordinate

$$d^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \qquad (1)$$



Ora assumiamo un riferimento ***O'*** ruotato, rispetto ad O, di angolo antiorario α attorno all'asse z normale al piano del foglio. Il nuovo osservatore misurerà diverse coordinate dei punti e quindi diversi valori degli intervalli ***Δx'*** e ***Δy'*** ma, quando va a calcolare la distanza tra P e Q, troverà lo stesso valore misurato da ***O***

$$d^2 = (\Delta x'^2 + \Delta y'^2) \qquad (2)$$

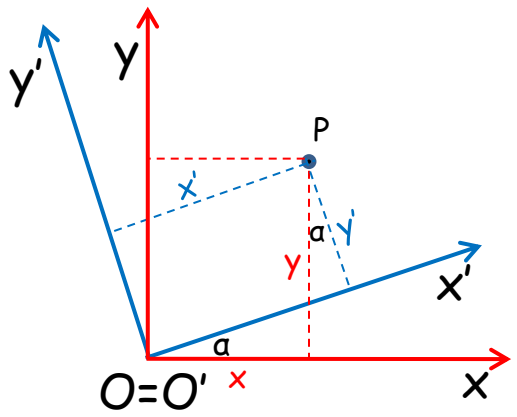


verificando il fatto ben noto che **la distanza tra due punti del piano euclideo non viene alterata dalla rotazione del riferimento.** La (1) e la (2) conducono allora alla seguente eguaglianza

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \qquad (3)$$

E' utile verificare questo fatto considerando le trasformazioni cui sono soggette le coordinate cartesiane dei punti a seguito della rotazione.

Nel caso in cui il riferimento O' viene ruotato di un angolo α antiorario rispetto ad O abbiamo la situazione indicata nella seguente figura



dalla quale possiamo ricavare facilmente le seguenti relazioni tra le coordinate del punto P nei due riferimenti

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha\ x + \sin\alpha\ y \\ y' &= -\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \end{aligned} \qquad (4)$$

Da queste ricaviamo immediatamente le trasformazioni degli intervalli tra le coordinate di due punti

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \cos\alpha\ \Delta x + \sin\alpha\ \Delta y \\ \Delta y' &= -\sin\alpha\, \Delta x + \cos\alpha\, \Delta y \end{aligned} \qquad (5)$$

che possono essere elevate al quadrato

$$\Delta x'^2 = \cos^2\alpha\ \Delta x^2 + \sin^2\alpha\ \Delta y^2 + 2\cos\alpha\sin\alpha\,\Delta x\,\Delta y$$

$$\Delta y'^2 = \sin^2\alpha\,\Delta x^2 + \cos^2\alpha\,\Delta y^2 - 2\cos\alpha\sin\alpha\,\Delta x\,\Delta y$$

e sommate membro a membro

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Troviamo allora una espressione coincidente in con la (3). E' semplice intuire che nel caso avessimo considerato due punti P e Q nello spazio xyz invece che nel piano xy, e una rotazione del riferimento attorno ad una generica direzione dello spazio invece che attorno all'asse z, le coordinate dei punti P e Q avrebbero subito una trasformazione lineare più complessa della (4), ma sempre tale da lasciare invariata la distanza dei punti

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (6)$$

Concludiamo allora che **la rotazione del riferimento nello spazio euclideo tridimensionale determina una trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio tale per cui la distanza pitagorica di due punti rimane invariata**.

La trasformazione lineare delle coordinate cartesiane dei punti dello spazio a seguito della rotazione viene detta **trasformazione ortogonale** e le (4) e (5), sia pure in caso semplice di rotazione attorno all'asse z, ne sono un esempio.

❑ I vettori nello spazio tridimensionale

Un modo molto efficiente per trattare i punti dello spazio e le sue proprietà è quello di associare a ciascun punto un segmento orientato detto **vettore posizione** dove le proprietà geometriche dello spazio vengono incluse attraverso la definizione di un certo numero di operazioni: somma (e differenza), moltiplicazione scalare, prodotto scalare e vettoriale. Il concetto di vettore descrive efficacemente anche le proprietà delle coordinate dei punti dello spazio rispetto alle rotazioni.

Ad esempio si consideri un generico **punto P** dello spazio di coordinate x,y e z cui viene associato il **vettore posizione**

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad (8)$$

le cui componenti coincidono con le coordinate cartesiane del punto. Quando si effettua una **rotazione del riferimento** tali componenti sono soggette ad una trasformazione lineare che potremmo esprimere in modo generale attraverso una matrice 3x3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (9)$$

oppure in modo più sintetico come

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} \qquad (10)$$

Notiamo che la distanza del punto P dalla origine O del riferimento, nel linguaggio dei vettori, è il modulo quadrato del vettore posizione ovvero **il prodotto scalare del vettore posizione con se stesso**

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = (x, y, z)\cdot(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (11)$$

Come osservato nel paragrafo precedente, la rotazione del riferimento ha la proprietà di lasciare inalterata la distanza di due punti dello spazio e quindi anche la distanza del punto P dall'origine O del riferimento. Questo significa che nel caso di una rotazione si deve avere

$$\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,' = \vec{r}\cdot\vec{r} \qquad (12)$$

D'altra parte se eseguiamo una rotazione, dalla (3) otteniamo (introducendo la matrice trasposta R^T) il seguente prodotto scalare

$$\vec{r}\,'\cdot\vec{r}\,' = (R\vec{r})\cdot(R\vec{r}) = \vec{r}\,R^T R\vec{r} \qquad (12b)$$

che coincide con la (5) nel caso in cui

$$R^T R = I \qquad da\ cui \qquad R^T = R^{-1} \qquad (13)$$

giungiamo così alla conclusione che **la rotazione del riferimento determina una trasformazione lineare delle componenti di un generico vettore esprimibile con una matrice R che soddisfa la (6)**. Una tale matrice viene detta **ortogonale**.

facoltativo facoltativo

facoltativo

Naturalmente quanto detto per il vettore posizione di un generico punto vale per i vettori posizione

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

ed anche per la loro differenza

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

A seguito di una rotazione il prodotto scalare di questo vettore con se stesso rimane inalterato per cui, in analogia con la (12), possiamo scrivere

$$(\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,') \cdot (\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,') = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

che fornisce

$$(\Delta x', \Delta y', \Delta z') \cdot (\Delta x', \Delta y', \Delta z') = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

da cui, infine, l'espressione

$$(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

che coincide con la (6) dimostrando che le proprietà delle rotazioni possono essere reinterpretate attraverso i vettori. Riassumendo: i) si associa al generico punto dello spazio il vettore posizione; ii) si associa alla generica rotazione del riferimento una matrice R che opera sui vettori posizione; iii) si richiede che la rotazione lasci invariata la distanza di due punti dello spazio il che richiede che la matrice R sia ortogonale ovvero soddisfi una relazione come la (13). Questo modo formale di gestire le rotazioni torna molto utile nelle considerazioni del prossimo paragrafo.

❑ Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale

Una legge fisica è una relazione tra grandezze fisiche - espressa in forma di equazione - capace di descrivere una certa classe di fenomeni. Mentre la forma dettagliata della legge fisica trova il suo fondamento negli esperimenti riguardanti quella specifica classe di fenomeni, la sua struttura generale è dettata da un certo numero di requisiti che si ritiene debbano essere soddisfatti da qualunque legge fisica.

Ad esempio un requisito generale è che i due membri della equazione che esprime una legge fisica abbiano le stesse dimensioni, siano esse metri, newton o altro.

Poi, dato che fino ad oggi si è verificato che nello spazio non vi sono direzioni privilegiate o posizioni privilegiate, risulta necessario richiedere che le leggi fisiche abbiano una '*forma*' indipendente dall'orientamento del riferimento o dalla posizione del riferimento.

Naturalmente, sulla base del principio di relatività, risulta anche necessario richiedere che la '*forma*' della legge fisica sia indipendente dalla velocità del riferimento (uniforme rispetto ad un qualche riferimento inerziale).

Tra questi, prendiamo in esame il requisito della indipendenza della '*forma*' della equazione dall' orientamento del riferimento.

Per ragionare su di una legge concreta, prendiamo in esame il secondo principio della dinamica newtoniana

$$\vec{f} = m\vec{a} \qquad (15)$$

che esprime il legame esistente tra la forza applicata ad un punto materiale e l'accelerazione che gli viene impressa.

Come osservato poco fa, ci attendiamo che il 'contenuto fisico' di questa equazione sia indipendente dall' orientamento nello spazio del riferimento O prescelto. Ciò significa che qualora assumessimo un riferimento O' ruotato rispetto ad O, il 'contenuto fisico' della equazione dovrebbe rimanere invariato. In effetti le cose stanno così. Infatti, ricordando la (10), una rotazione del riferimento determina la seguente trasformazione delle componenti dei vettori

$$R\vec{f} = R(m\vec{a}) = mR\vec{a} \qquad (15b)$$

(essendo la massa una grandezza scalare non viene modificata dalla matrice di rotazione) che conduce alla relazione

$$\vec{f}\,' = m\vec{a}\,' \qquad (16)$$

In tale equazione le componenti dei vettori sono cambiate rispetto alla (15) - un fatto inevitabile poiché è cambiato l'orientamento del riferimento - tuttavia la struttura o **forma della equazione,** ovvero il tipo di legame esistente tra forza ed accelerazione è rimasto lo stesso - i) modulo della forza proporzionale al modulo della accelerazione, ii) forza ed accelerazione lungo la stessa direzione e nello stesso verso - e con esso anche ciò che abbiamo chiamato 'contenuto fisico' della equazione.

In che modo è stata garantita questa proprietà ? Un attimo di riflessione è sufficiente per individuare nella (15b) il passaggio chiave: l'equazione ha conservato la sua forma a seguito della rotazione perché i due membri si sono trasformati nello stesso modo e questo - a sua volta - è accaduto perché tali membri sono enti matematici dello stesso genere: nel caso specifico entrambi vettori.

Giungiamo così ad una importante conclusione di valore generale detta **principio di covarianza**: **affinché una equazione sia invariante in forma rispetto ad una certa trasformazione è necessario che entrambi i suoi membri si trasformino nello stesso modo quando viene compiuta quella trasformazione.**

Nel caso della (15) il requisito della invarianza in forma della equazione rispetto alle rotazioni è stato assicurato dal fatto di avere scritto l'equazione come eguaglianza tra vettori. Nel fare questa cosa apparentemente ovvia, abbiamo in realtà immesso nella equazione stessa il fatto fisico fondamentale che l'orientamento del riferimento non può avere alcun significato fisico particolare se non quello di permettere di associare ad ogni vettore certe particolari componenti. Il vero significato fisico è invece contenuto nella 'forma' della equazione che è stata salvaguardata dall'avere scritto l'equazione con membri matematicamente omogenei ovvero in forma covariante.

La formulazione geometrica della teoria della relatività ristretta

Le considerazioni sulle rotazioni sviluppate nel precedente paragrafo sono sufficienti per comprendere la riformulazione della teoria della relatività ristretta proposta da Minkowsky.

❑ Trasformazioni di Lorentz e rotazioni nello spazio di Minkowsky

In primo luogo ricordiamo che **il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, descritto da una trasformazione di Lorentz, modifica gli intervalli spaziali e temporali tra gli eventi ma non l'intervallo spazio-temporale**, come espresso dalla (4) del par 3.9

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)-c^2\Delta t'^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)-c^2\Delta t^2 \quad (1)$$

Notiamo che questa espressione ha una forte somiglianza con la (6) del par 3.10 che esprimeva l'invarianza della distanza di due punti dello spazio a seguito di una rotazione del riferimento tridimensionale. Ciò potrebbe **suggerire di interpretare una trasformazione di Lorentz come una 'rotazione' del riferimento**. Se si vuole seguire questa strada è però necessario superare alcune difficoltà.

In primo luogo risulta necessario estendere la nozione di spazio e sistema di riferimento. Infatti nella (6) del par 3.10 compaiono i quadrati dei tre intervalli spaziali Δx, Δy, Δz mentre qui si aggiunge pure il quadrato dell'intervallo temporale $c\Delta t$ (si noti che $c\Delta t$ ha le dimensioni di una lunghezza come gli intervalli spaziali). Questo indica che **gli eventi devono essere collocati in uno spazio a quattro dimensioni** e che in esso **un riferimento ha quattro assi coordinati**, tre per rappresentare gli intervalli spaziali ed il quarto per l'intervallo temporale.

A questo punto bisogna però tenere conto del fatto che la distanza, in questo ipotetico spazio a quattro dimensioni, non viene calcolata sommando i quadrati degli intervalli secondo il teorema di pitagora ma piuttosto sommando i quadrati degli intervalli spaziali e sottraendo quello dell'intervallo temporale. Può apparire una differenza di poco conto tuttavia ciò comporta che **la distanza tra due punti in questo spazio a quattro dimensioni possa anche essere negativa**, un fatto che non ha riferimenti nella ordinaria geometria euclidea dove le distanze sono sempre positive o al più nulle. Per tale motivo tale spazio a quattro dimensioni viene detto **spazio pseudoeuclideo**.

Un espediente per non rinunciare al teorema di pitagora nel calcolo della distanza, tenendo però conto del fatto che questa va calcolata sottraendo il quadrato dell'intervallo temporale, è quello di riscrivere la (1) con **l'unità immaginaria**

$$(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)+(ic\,\Delta t')^2=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)+(ic\,\Delta t)^2 \quad (2)$$

Posta in questa forma si vede che introducendo, accanto ai tre assi reali, un'asse dei tempi immaginario **la distanza tra due punti dello spazio quadrimensionale può essere calcolata formalmente con il teorema di pitagora** (in questo modo la natura pseudoeuclidea dello spazio è espressa dalla presenza di un asse immaginario piuttosto che dalla modifica del teorema di pitagora).

Fatte queste osservazioni giungiamo alla importante conclusione che **il passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero una trasformazione di Lorentz, può essere interpretata come una rotazione di un riferimento in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni** che chiameremo **spazio di Minkowsky.**

Per gestire in modo razionale le proprietà dello spazio di Minkowsky conviene procedere sulla falsariga di ciò che abbiamo fatto nel paragrafo precedente nel caso dello spazio tridimensionale.

In primo luogo osserviamo che **ad un evento fisico** - che un certo osservatore O colloca nella posizione x, y e z al tempo t - viene a **corrispondere un punto in un riferimento quadridimensionale O nello spazio di Minkowsky**.

Se introduciamo il concetto di **vettore posizione nello spazio di Minkowsky** o **quadrivettore posizione**, ad un evento fisico corrisponderà il seguente quadrivettore

$$\bar{R} = (x, y, z, ict) \tag{12}$$

Vale la pena richiamare l'attenzione sul fatto che introducendo lo spazio di Minkowsky **il tempo viene integrato nella geometria dello spazio**, in quanto cessa di essere un parametro fisico esterno per divenire invece una coordinata degli eventi del tutto simile alle coordinate spaziali.

Quando si passa da un riferimento inerziale O ad un riferimento inerziale O' le coordinate di un evento fisico si modificano in accordo con la trasformazione di Lorentz che possiamo porre nella forma di trasformazione di quadrivettori

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{vmatrix} \tag{15}$$

ed anche nella forma compatta seguente

$$\bar{R}' = \Lambda \bar{R} \tag{16}$$

Dunque **una trasformazione di Lorentz può essere interpretata come una trasformazione lineare Λ delle componenti del quadrivettore posizione** (si noti ancora una volta l'analogia formale con le rotazioni tridimensionali).

Introduciamo ora il concetto di **prodotto scalare tra quadrivettori**. Dato che con l'introduzione di un asse immaginario dei tempi abbiamo ripristinato la validità del teorema di pitagora, il prodotto scalare può essere definito in modo analogo al caso tridimensionale. Il **modulo quadrato del quadrivettore posizione** sarà dato quindi dal prodotto scalare del quadrivettore con se stesso

$$\bar{R} \cdot \bar{R} = (x, y, z, ict) \cdot (x, y, z, ict) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{17}$$

facoltativo
facoltativo

E' facile verificare che la trasformazione lineare Λ (ovvero la trasformazione di Lorentz) lascia invariato, come atteso, il prodotto scalare (17). Dalla (16) si ha la seguente relazione

$$\bar{R}'\cdot\bar{R}' = (\Lambda\bar{R})\cdot(\Lambda\bar{R}) = \bar{R}\,\Lambda^T\Lambda\,\bar{R}$$

che lascerà invariato il prodotto scalare solo se

$$\Lambda^T\Lambda = I \qquad (18)$$

In effetti dalla (15) si ha che

$$\Lambda^T\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & +iv/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iv/c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-v^2/c^2}\begin{vmatrix} 1-v^2/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-v^2/c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

che conferma quindi la (18). Dunque **una trasformazione di Lorentz, ovvero la trasformazione lineare Λ, lascia invariato il modulo quadrato del quadrivettore posizione.**

Questo significa che una trasformazione di Lorentz deve lasciare invariato anche il modulo quadrato del quadrivettore differenza tra due eventi fisici. Dati allora i quadrivettori

$$\bar{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \bar{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2)$$

possiamo calcolare il quadrivettore differenza

$$\bar{R}_2 - \bar{R}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ict_2 - ict_1) =$$
$$= (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)$$

le cui componenti sono gli intervalli spaziali e temporale tra i due eventi. Calcolando ora il modulo di questo quadrivettore otteniamo l'espressione seguente

$$(\bar{R}_2 - \bar{R}_1)\cdot(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) =$$
$$= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$$

che coincide con la distanza spaziotemporale tra i due eventi. Dunque, **la distanza spaziotemporale tra due eventi fisici può essere interpretata come il modulo quadrato del quadrivettore differenza dei due eventi** e, come tale, è lasciata invariata dalla trasformazione di Lorentz.

Riassumendo, la procedura appena discussa prevede

- l'introduzione di uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, tre reali (per lo spazio) ed una immaginaria (per il tempo), dove le distanze si calcolano con il teorema di pitagora;

facoltativo facoltativo

- l'introduzione di quadrivettori posizione in tale spazio con le consuete operazioni di somma, differenza e prodotto scalare;
- ad ogni evento fisico misurato da un certo osservatore O corrisponde allora un quadrivettore posizione in un certo riferimento O quadridimensionale;
- al passaggio da un riferimento inerziale all'altro, ovvero alla trasformazione di Lorentz, corrisponde una trasformazione lineare delle componenti del quadrivettore posizione;
- tale trasformazione lineare lascia invariato il prodotto scalare tra quadrivettori e può essere interpretata come una rotazione del riferimento quadridimensionale;
- in particolare tale trasformazione lascia invariato il prodotto scalare con se stesso del quadrivettore posizione differenza tra due eventi che coincide con la distanza spaziotemporale tra gli eventi stessi (che è il punto da cui sono partite le nostre considerazioni).

facoltativo

teoria stessa.

Dovendo ricostruire la fisica dall'inizio, abbiamo in primo luogo dedotto dai due postulati **le nuove trasformazioni degli eventi fisici**, ovvero le trasformazioni di posizione e tempo tra due osservatori inerziali (trasformazioni di Lorentz).

Dopo avere analizzato le rivoluzionarie proprietà di queste trasformazioni, abbiamo mostrato che collocando gli eventi fisici in uno spazio pseudoeuclideo a quattro dimensioni, con tanto di quadrivettori dotati delle 'consuete' operazioni (spazio di Minkowsky), le trasformazioni di Lorenz possono essere interpretate in chiave geometrica come rotazioni del riferimento in tale spazio.

Giungiamo in questo modo a comprendere che per rappresentare gli eventi fisici in accordo con i postulati della teoria è sufficiente posizionarli nello spazio di Minkowsky:

i postulati della TRR sono soddisfatti collocando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky.

❑ Le rotazioni nello spazio di Minkowsky ed i postulati della teoria della relatività ristretta

Come tante volte sottolineato, la teoria della relatività ristretta ha il suo punto d'inizio nei postulati di relatività e costanza della velocità della luce dai quali si ritiene debbano discendere tutte le conseguenze fisiche della

facoltativo

E' utile vedere questo fatto con un esempio diretto. Immaginiamo che un osservatore O misuri la velocità della luce, nel proprio riferimento misurando, l'intervallo spaziale e temporale intercorrente tra gli eventi partenza e arrivo del segnale luminoso

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{(t_2 - t_1)} \qquad (1)$$

facoltativo

Quadrando, troviamo facilmente la relazione

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (2)$$

ed anche l'equazione seguente

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \quad (3)$$

Ora, notiamo che associando ai due eventi fisici i quadrivettori posizione nello spazio di Minkowsky

$$\bar{R}_1 = (x_1, y_1, z_1, ict_1) \quad \bar{R}_2 = (x_2, y_2, z_2, ict_2) \quad (4)$$

si ottiene

$$\bar{R}_2 - \bar{R}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)) \quad (5)$$

da cui risulta che la (3) può essere scritta come prodotto scalare del quadrivettore differenza degli eventi fisici

$$(\bar{R}_2 - \bar{R}_1) \cdot (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) = 0 \quad (6)$$

Poiché sappiamo che il prodotto scalare è lasciato invariato dal cambiamento di riferimento inerziale o trasformazione di Lorentz, possiamo affermare che O' potrà scrivere

$$(\bar{R}_2' - \bar{R}_1') \cdot (\bar{R}_2' - \bar{R}_1') = 0 \quad (7)$$

dalla quale, con gli stessi passaggi sopra esposti, si giunge evidentemente alla espressione

$$c = \frac{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}{(t_2' - t_1')}$$

che rappresenta il valore della velocità della luce misurata da O' il quale, in accordo con il secondo postulato, coincide con quello misurato da O.

facoltativo

Evidentemente il passaggio cruciale è quello che permette di passare dalla (6) alla (7) per cui possiamo concludere che il secondo postulato risulta garantito dalla invarianza del prodotto scalare rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Dunque, come si diceva, rappresentando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky si assicurano agli eventi stessi le proprietà richieste dai due postulati della teoria.

E' naturale domandarsi a questo punto se anche la costruzione di leggi fisiche in accordo con i postulati della teoria possa essere ottenuta formulando tali leggi nello spazio di Minkowsky.

Per rispondere a questa domanda richiamiamo innanzitutto il postulato di relatività, che in effetti si pronuncia su come 'costruire' le leggi fisiche: **le leggi fisiche devono essere le 'stesse' per tutti gli osservatori inerziali.** Con 'stesse' non si può certo intendere che le grandezze fisiche devono assumere gli stessi valori numerici in tutti i riferimenti ma, piuttosto, che la loro reciproca relazione deve essere la 'stessa' ovvero, più precisamente, che **le equazioni delle leggi fisiche devono avere la 'stessa forma' in tutti i riferimenti inerziali.**

Poiché si passa da un riferimento inerziale all'altro con una trasformazione di Lorentz, il principio di relatività sostanzialmente richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una trasformazione di Lorentz.**

Ma, abbiamo visto che una trasformazione di Lorentz è interpretabile come una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky per cui il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere invarianti in forma rispetto ad una rotazione del riferimento nello spazio di Minkowsky.**

Richiamiamo ora le conclusioni raggiunte nel paragrafo '*Le leggi fisiche nello spazio tridimensionale*', dove abbiamo mostrato che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni tridimensionali è sufficiente scriverle in forma covariante ovvero in forma tale che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni tridimensionali stesse.

Da questo possiamo allora dedurre che per costruire leggi fisiche invarianti in forma rispetto alle rotazioni nello spazio di Minkowsky sarà sufficiente scrivere tali leggi in forma covariante in tale spazio, ovvero in modo che in entrambi i membri figurino grandezze fisiche che si trasformano nello stesso modo rispetto alle rotazioni stesse ovvero rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Giungiamo allora a comprendere che, in ultima analisi, il principio di relatività richiede che **le equazioni delle leggi fisiche devono essere covarianti nello spazio di Minkowsky.**

Possiamo allora mettere assieme le conclusioni cui siamo pervenuti affermando che

i postulati della teoria della relatività ristretta sono soddisfatti:

i) **posizionando gli eventi fisici nello spazio di Minkowsky;**

ii) **scrivendo le leggi fisiche in forma covariante nello spazio di Minkowsky.**

Tale affermazione, spesso riferita come **postulato di covarianza**, traduce in una **prescrizione formale ed operativa di natura geometrica il contenuto fisico dei postulati della teoria**. Attraverso di esso risulta più semplice riformulare, e se necessario correggere, le teorie della fisica classica in modo da accordarle con i principi della relatività, mentre rappresenta il principio guida fondamentale nella costruzione di ogni nuova teoria.

❑ Le traformazioni di Lorentz come rotazione nello spazio di Minkwosky

Le trasformazioni di Lorentz da noi considerate sono relative a sistemi di riferimento ad assi paralleli in moto relativo uniforme lungo l'asse delle ascisse. Con questa scelta geometrica le uniche variabili soggette a trasformazione sono le ascisse x ed il tempo t mentre le y e le z rimangono inalterate. Dunque quella che in generale dovrebbe essere una rotazione nello spazio quadridimensionale si riduce, in questo caso, ad una rotazione di due assi ovvero ad una rotazione nel piano.

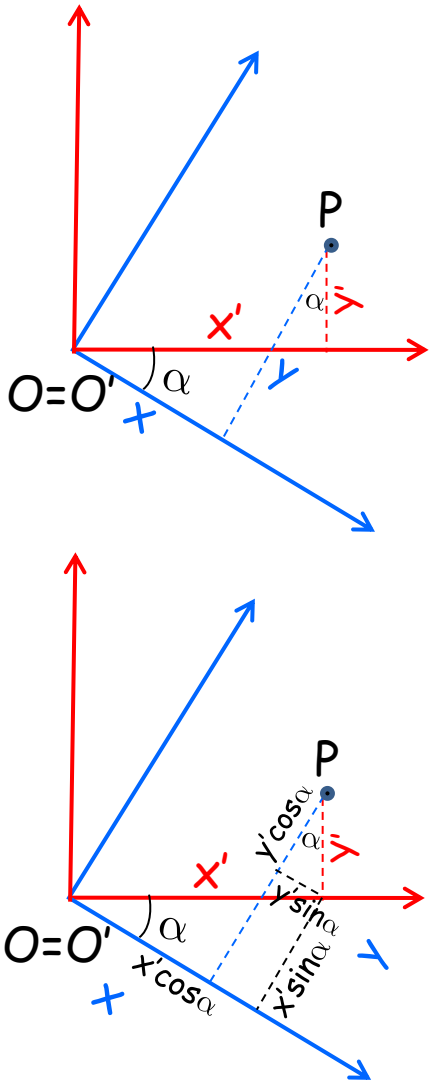
Possiamo allora facilmente dedurre per via geometrica la relazione esistente tra le coordinate x e t di un quadrivettore a seguito di una rotazione nello spazio di Minkowsky di un certo angolo assegnato.

Per cominciare analizziamo una ***rotazione piana ordinaria*** di un certo angolo α. Con tutta evidenza il punto ***P*** possiede coordinate ***x'*** e ***y'*** rispetto al sistema iniziale (in rosso) e coordinate ***x*** e ***y*** rispetto a quello finale ruotato (in blu). Dalla figura sottostante troviamo facilmente

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \dfrac{x'\cos\alpha - y'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \\ y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = \dfrac{y'\cos\alpha + x'\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \end{cases}$$

le quale si può anche scrivere come

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \end{cases}$$



Tali espressioni mostrano una notevole somiglianza con le trasformazioni di Lorentz e lo diventano esattamente se teniamo conto che l'asse y è l'asse immaginario dei tempi

$$y' = ict' \qquad y = ict$$

e richiediamo la seguente eguaglianza

$$\sqrt{1+tg^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad tg^2\alpha = -\frac{v^2}{c^2} \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

Infatti sostituendo ora *y', y, e tg* α nelle formule della rotazione ordinaria della pagina precedente otteniamo le espressioni

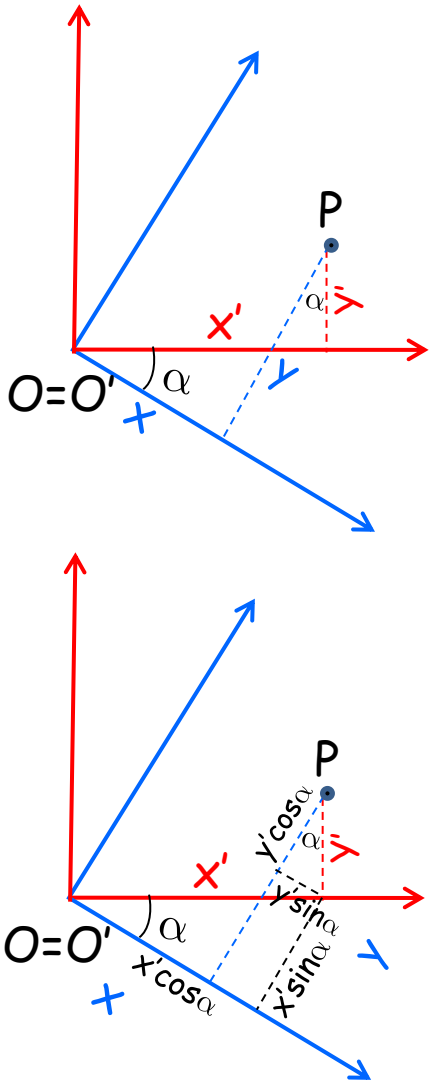
(14)

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \\ y = \dfrac{y' + x'tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' - ict'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \\ ict = \dfrac{ict' + x'(i\frac{v}{c})}{\sqrt{1+(i\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

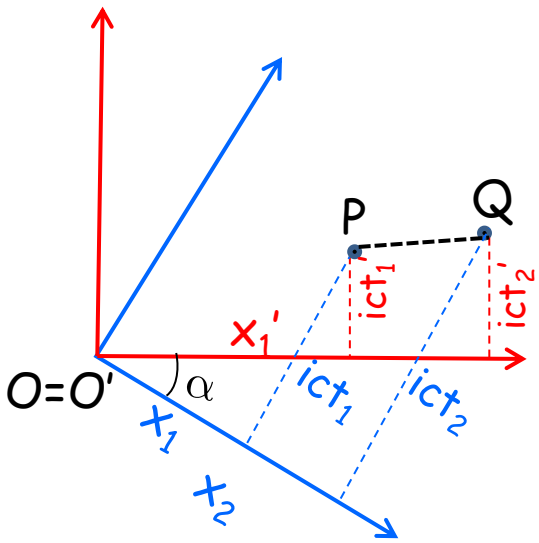
perfettamente coincidenti con le trasformazioni di Lorentz per le coordinate **x** *e* **t***!* Giungiamo allora alla conclusione che : **il passaggio da un riferimento inerziale O' in moto traslatorio uniforme con velocità v lungo l'asse delle x ad un riferimento fisso O (trasformazione di Lorentz) è formalmente identica ad una rotazione oraria piana nello spazio di Minkowsky degli assi x' e ict' di un angolo tale che**

(15)

$$tg\alpha = i\frac{v}{c}$$



Questo significa che è possibile costruire una trasformazione di Lorentz ruotando due assi x' e ict' di un certo angolo orario α tale che ***tgα=i v/c*** (si noti che essendo un asse immaginario le tangenti degli angoli, rapporti di ordinate ed ascisse, sono immaginarie).



❑ Distanza spaziotemporale

Dati due eventi fisici ***P*** e ***Q***, la trasformazione di Lorentz (rotazione) lascia invariata la distanza degli eventi

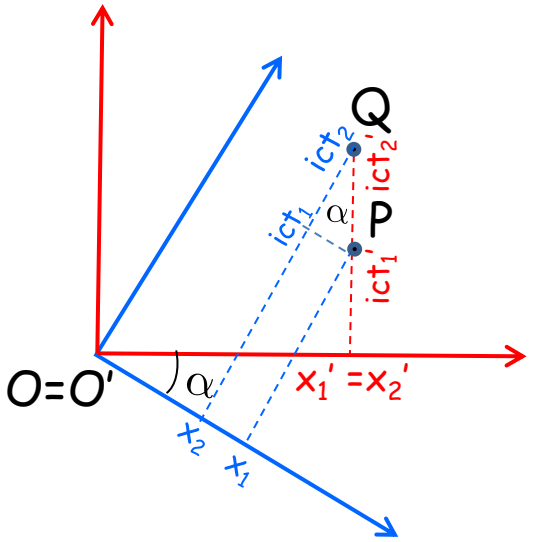
$$\Delta x'^2+\Delta y'^2=\Delta x^2+\Delta y^2 \qquad \Delta y'=ic\Delta t' \qquad \Delta y=ic\Delta t$$

sostituendo otteniamo

$$\Delta x'^2+(ic\Delta t')^2=\Delta x^2+(ic\Delta t)^2 \qquad \Delta x'^2-c^2\Delta t'^2=\Delta x'^2-c^2\Delta t'^2$$

la quale mostra che **l'invarianza della distanza spaziotemporale tra due eventi in seguito ad una trasformazione di Lorentz viene interpretata come invarianza della distanza pitagorica nello spazio di Minkowsky a seguito della rotazione corrispondente.**

Si noti che, come caso particolare, si ottiene immediatamente che se P e Q coincidono per O' allora coincidono anche per O da cui l'affermazione che *se due eventi coincidono spazialmente e temporalmente per un osservatore inerziale allora devono coincidere per ogni altro.*



❑ Dilatazione del tempo

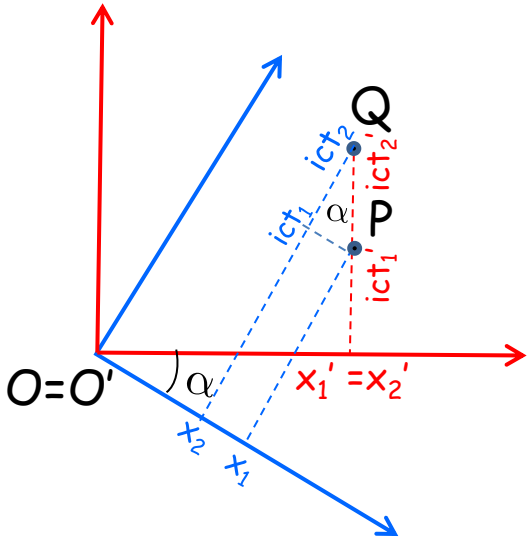
Consideriamo *l'orologio luminoso* con il cammino di andata e ritorno del raggio lungo l'asse ***y'*** del riferimento ***O'*** analizzato a suo tempo. La partenza e l'arrivo del raggio luminoso in ***O'*** corrispondono a due eventi con la stessa ascissa ***x'*** e diversa ordinata ***ict'*** (vedi figura).

La trasformazione di Lorentz (rotazione del riferimento) fa si che l'osservatore O veda invece due eventi con un certo intervallo spaziale x_2-x_1 (che ***O'*** non osserva) e soprattutto un diverso intervallo temporale t_2-t_1 (dilatazione del tempo). Per quanto riguarda quest'ultimo si ha

$$\Delta y = \Delta y' \cos\alpha \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad \Delta y' = ic\Delta t' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = ic\Delta t' / \sqrt{1+tg^2\alpha} = ic\Delta t' / \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$



❑ Relatività della simultaneità

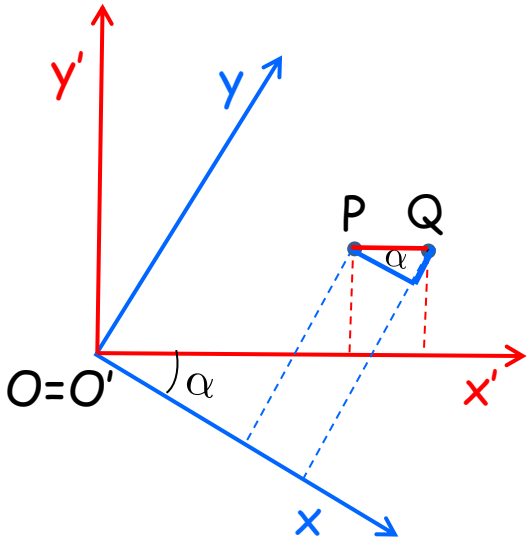
Gli eventi ***P*** e ***Q***, in posizioni diverse, appaiono simultanei a ***O'*** ma non ad ***O*** (relatività della simultaneità). Dalla geometria si ha facilmente che

$$\Delta y = \Delta x' \sin\alpha \qquad \Delta y = ic\Delta t \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

$$ic\Delta t = \Delta x' \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \Delta x' \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui la desincronizzazione

$$\boxed{\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$



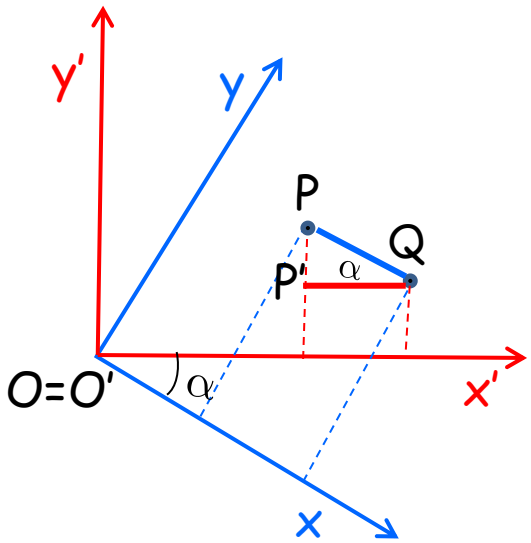
❑ Contrazione delle lunghezze

Data una lunghezza in quiete nel riferimento ***O'***, l'osservatore in moto ***O*** misura una lunghezza pari alla distanza di due suoi osservatori che vedono gli estremi nello stesso istante, dunque la distanza dei punti ***P*** e ***Q***. L'osservatore ***O'*** invece misura la distanza dei punti ***P'*** e ***Q***. Abbiamo allora

$$\Delta x \cos\alpha = \Delta x' \qquad tg\alpha = i\frac{v}{c}$$

da cui la formula della contrazione delle lunghezze

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$



Alcuni commenti

Spesso si dice che con la teoria della relatività tutto diventa relativo. Nulla di più sbagliato!

La teoria della relatività afferma che certe grandezze che nella fisica classica si pensava fossero assolute sono in realtà relative ma che esistono nuove grandezze fisiche, ignote alla fisica classica, che invece sono assolute. In un certo senso ***la teoria della relatività rende relative le vecchie grandezze fisiche ma ne introduce di nuove che sono assolute***.

Questo fatto è in se evidente se riassumiamo le principali conclusioni cui siamo giunti analizzando le trasformazioni di Lorentz:

i) gli intervalli temporali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relativi ed aumentano con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *dilatazione dei tempi*);

ii) la simultaneità tra due eventi separati nello spazio dipende dall'osservatore inerziale, è dunque relativa ed il grado di dissincronia aumenta con la velocità dell'osservatore e con la distanza spaziale degli eventi stessi (*relatività della simultaneità*);

iii) le distanze spaziali dipendono dall'osservatore inerziale, sono dunque relative e diminuiscono con la velocità dell'osservatore (fenomeno della *contrazione delle lunghezze*);

iv) la velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque una grandezza assoluta;

v) le distanze spaziotemporali e le coincidenze spaziotemporali sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali e sono dunque grandezze assolute;

vi) l'ordine temporale di eventi che possono essere connessi causalmente è lo stesso per tutti gli osservatori inerziali ed è dunque assoluto.

La meccanica relativistica del punto materiale

Le leggi meccaniche, nel caso in cui le velocità dei corpi materiali sono piccole rispetto alla velocità della luce, non possono che essere quelle della meccanica newtoniana: nel suo ambito i successi nello spiegare i fatti sperimentali sono tali da non lasciare spazio a dubbi.

Per rendere più precisa questa osservazione è necessario introdurre il concetto di **riferimento proprio O'** che è ***il sistema di riferimento inerziale che all'istante t vede il corpo materiale fermo*** (dato che il corpo materiale in generale può accelerare è evidente che il riferimento ***O'*** può soddisfare questa condizione solo all'istante ***t*** e per questo viene a volte detto riferimento istantaneamente in quiete). Per quanto detto possiamo allora affermare che ***l'osservatore proprio verifica le leggi della meccanica newtoniana***.

Per capire quali siano, invece, le leggi meccaniche nel caso in cui la velocità del corpo materiale sia rilevante rispetto a quella della luce, si potrebbe pensare di assumere il punto di vista di un **riferimento relativistico** *ovvero di un* ***riferimento inerziale O che vede il riferimento O' in rapido moto,*** e di ottenere le leggi meccaniche valide per questo l'osservatore effettuando una trasformazione di Lorentz su ognuna delle grandezze che compaiono nelle leggi meccaniche newtoniane dell'osservatore proprio, giungendo così alla meccanica relativistica. Si può fare ! Ma sorgono alcuni problemi che devono essere superati.

Per cominciare a ragionare in termini concreti, immaginiamo che l'osservatore proprio newtoniano ***O'*** applichi il secondo principio della dinamica ad un certo corpo materiale di massa ***m'*** soggetto ad una forza ***F'***. Scriverà allora, lungo l'asse delle ***x'***, l'equazione seguente

$$F'_x = m' \frac{d}{dt'} \frac{d}{dt'} x' \qquad (1)$$

dove gli apici ricordano che si tratta di grandezze fisiche misurate da ***O'***.

Sulla base di quanto detto, si potrebbe pensare di ottenere la formulazione relativistica di questa equazione effettuando una trasformazione di Lorentz sulle grandezze ***F'_x , m', dt'***, e ***x'***. Premesso che non sappiamo come si trasformano ***F'_x*** ed ***m',*** è comunque chiaro che il numero di trasformazioni di Lorentz da effettuare nei due membri della equazione dovrebbe essere differente violando il principio di covarianza e con esso i postulati della teoria della relatività ristretta. Infatti, come è facile intuire, effettuando un diverso numero di trasformazioni di Lorentz nei due membri si determinerebbe un *cambiamento di forma* della equazione nel passaggio da O' ad O, in palese conflitto con il primo postulato il quale invece richiede che ***le equazioni delle leggi fisiche devono avere la stessa forma in tutti riferimenti inerziali.***

Riprendiamo allora l'equazione meccanica (1)

$$F'_x = m' \frac{d}{dt'} \frac{d}{dt'} x'$$

ed osserviamo subito che abbiamo buoni motivi per affermare che la forza F'_x si trasformi, nel passaggio da un riferimento all'altro, come $\Delta x'$ (ricordiamo infatti che la forza altro non è che l'azione sviluppata da un dinamometro compresso o allungato disposto, ad un certo istante, tra due punti dello spazio ***P*** e ***Q***). Trasformandosi la forza come $\Delta x'$, il membro di sinistra porta con se una trasformazione di Lorentz per cui la stessa cosa deve fare il membro di destra. Dato che la posizione **x'** del corpo materiale porta con se una trasformazione di Lorentz dobbiamo concludere che le grandezze ***m'*** e ***dt'*** non devono essere trasformate rimanendo quelle del riferimento proprio per ogni osservatore inerziale ***O***.

Dunque, affinché sia soddisfatto il principio di covarianza è necessario che ***la massa del corpo materiale e l'intervallo temporale che compaiono nella equazione del secondo principio della dinamica vengano misurate sempre nel riferimento proprio.***

Dato che la massa e il tempo nel riferimento proprio si chiamano solitamente ***massa a riposo*** e ***tempo proprio*** e si indicano con m_0 e τ, la (1) prende allora la forma seguente

$$F'_x = m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} x'$$

Eseguendo su questa equazione una trasformazione di Lorentz, possiamo ottenere la seguente espressione valida nel riferimento relativistico (si noti che l'unica differenza consiste nel fatto che spariscono gli apici)

$$F_x = m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} x$$

da cui consegue **l'espressione vettoriale relativistica del secondo principio della dinamica in forma covariante**

$$\boxed{\vec{F} = m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \vec{x}} \qquad (2)$$

la forza eguaglia il prodotto della massa a riposo per la derivata seconda rispetto al tempo proprio della posizione.

Il principio di covarianza ci ha condotti dunque ad una espressione dove compaiono grandezze fisiche misurate in riferimenti diversi, masse e tempi nel riferimento proprio, forze e posizioni in quello del generico osservatore O. Proprio perché dedotta dal principio di covarianza tale espressione ha il vantaggio di rendere esplicite le proprietà di trasformazione ma è scomoda da usarsi per l'osservatore O che preferirebbe certamente servirsi solo di grandezze fisiche misurate nel suo sistema di riferimento. Non è difficile ottenere questo risultato.

❑ Il secondo principio della dinamica nelle variabili dello stesso riferimento inerziale. La quantità di moto relativistica.

La scrittura covariante del secondo principio della dinamica fornisce la legge nella sua forma più semplice ed ha per questo il pregio della chiarezza. Per esplorare però il contenuto fisico della legge relativistica risulta assai utile scriverla in uno specifico riferimento ovvero per mezzo delle variabili di un determinato osservatore. Uno sguardo alla (2) è sufficiente per capire che quello che dobbiamo fare è semplicemente trasformare l'intervallo di tempo proprio nell'intervallo di tempo misurato dall'osservatore nel riferimento prescelto. Dalla legge di trasformazione degli intervalli abbiamo

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

da cui la relazione

$$d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2}\, dt$$

che sostituita nella (2) fornisce

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\vec{x} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Si noti ora che la quantità sotto il segno di derivata, nel limite delle basse velocità, fornisce l'espressione newtoniana della quantità di moto

$$\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0\vec{v}\,(1+\frac{1}{2}v^2/c^2) \approx m_0\vec{v}$$

un fatto che suggerisce di identificarla con **l'espressione relativistica della quantità di moto**

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (4)$$

Volendo scrivere il secondo principio nella forma in cui al secondo membro compare la derivata temporale della quantità di moto, si deve riportare la radice accanto alla forza ottenendo l'espressione seguente

$$\vec{F}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (5)$$

che può essere considerata una utile **espressione del secondo principio della dinamica in funzione della quantità di moto nelle variabili dello stesso osservatore inerziale** del tutto equivalente alla (2).

❑ La potenza della forza. Energia totale, energia cinetica ed energia a riposo.

Nei precedenti paragrafi abbiamo costruito l'espressione relativistica del secondo principio della dinamica ed anche ottenuto l'espressione relativistica della quantità di moto. Vogliamo ora trovare l'espressione relativistica della energia cinetica, come si fa? Per capirlo conviene richiamare il

procedimento seguito nella meccanica classica : si deve calcolare il lavoro eseguito nell'unità di tempo dalla forza applicata al corpo materiale, ovvero la quantità

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z$$

calcolando, ad esempio, il primo termine troviamo

$$F_x\, v_x = ma_x\, v_x = m\frac{dv_x}{dt}v_x = m\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v_x^2) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2)$$

sommando, poi, tutti termini otteniamo

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

da cui si ricava che il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una quantità detta **energia cinetica**

$$W = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) \qquad T = \frac{1}{2}mv^2$$

Per trovare l'espressione relativistica opereremo nello stesso modo tenendo conto, ovviamente, della espressione relativistica del secondo principio della dinamica.

Abbiamo allora

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z \qquad (1)$$

dove la componente x della forza può essere ottenuta dalla espressione relativistica del secondo principio della dinamica

$$\vec{F}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad F_x\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad F_x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Calcoliamo allora il primo termine della (1), otteniamo

$$v_x F_x = v_x \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x\right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x^2\right)$$

dato che il secondo ed il terzo termine della (1) possono essere ottenuti sostituendo il pedice x con y e z rispettivamente, possiamo scrivere la seguente espressione della potenza della forza

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z =$$

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_x\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_x^2\right) + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_y\frac{dv_y}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_y^2\right) + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v_z\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{(1-v^2/c^2)}\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}v_z^2\right) =$$

$$= \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left((v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}) + \frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)}\left(v\frac{dv}{dt} + \frac{\frac{v^3}{c^2}\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\right) = \frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)}\left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{(1-v^2/c^2)}\right) =$$

$$= \frac{m_0 v\frac{dv}{dt}}{(1-v^2/c^2)^2}$$

Riscriviamo il risultato appena ottenuto

$$W = F_x\, v_x + F_y\, v_y + F_z\, v_z = \frac{m_0 v \dfrac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^2} \qquad (1)$$

ed osserviamo che vale la seguente espressione

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\left(-2\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

che permette di riscrivere la (1) nel modo seguente

$$W = \frac{m_0 v \dfrac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{v\dfrac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

da cui si ottiene finalmente che **il lavoro compiuto nella unità di tempo dalla forza applicata eguaglia la variazione, nella unità di tempo, di una grandezza fisica E_{rel}** che provvisoriamente chiameremo *energia relativistica*

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad E_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

Notiamo subito che tale energia relativistica ha lo stesso ruolo della energia cinetica classica (nel senso che la sua derivata fornisce la potenza della forza) ma non coincide con essa. Infatti, **a differenza della energia cinetica classica, assume un valore non nullo anche quando il corpo materiale è fermo**.

Come possiamo interpretare questa energia relativistica? Ricordando che la meccanica relativistica deve ridursi alla meccanica classica alle basse velocità, possiamo pensare di avere un qualche suggerimento considerando il significato assunto da tale energia relativistica nel caso in cui ***v<<c.*** Abbiamo allora

$$E_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \frac{m_0 c^2}{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} \simeq m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad (3)$$

Dunque, alle basse velocità E_{rel} è dato dalla somma della energia cinetica classica e del termine m_0c^2. Ora si noti che m_0c^2 è proprio il valore che assume E_{rel} nel caso in cui il corpo materiale sia fermo per cui tale termine può essere chiamato **energia a riposo** E_0

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2} \qquad (4)$$

Con questa definizione dalla (3) otteniamo

$$E_{rel} \simeq E_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

una espressione che mostra che, **alle basse velocità, l'energia relativistica è la somma della energia a riposo e della energia cinetica classica.** Tale fatto suggerisce di definire **energia totale** E_T l'energia relativistica E_{rel} in quanto somma della energia a riposo e della energia cinetica classica

$$\boxed{E_T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad (5)$$

Inoltre suggerisce anche di estendere tale concetto al caso generale di velocità qualunque, ovvero di pensare sempre l'energia totale come somma della energia a riposo e della energia cinetica. Si ottiene così la seguente relazione che definisce l'**energia cinetica relativistica**

$$\boxed{E_T = E_0 + E_c} \qquad (6)$$

da cui si può ricavare l'espressione

$$\boxed{E_c = (\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2)} \qquad (7)$$

NOTA: nel caso v<<c tale espressione conduce alla energia cinetica classica

❑L'inerzia della energia

Prima di commentare alcune delle conseguenze fisiche contenute nelle formule ottenute nei precedenti paragrafi riassumiamole. Una prima rilevante novità della meccanica relativistica riguarda l'espressione della **quantità di moto**

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

alla quale dobbiamo aggiungere l'introduzione di due concetti che non hanno riferimento nella meccanica classica ovvero **l'energia totale** e **l'energia a riposo**

$$E_T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m_0 c^2 + \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - m_0 c^2\right) = E_0 + E_c$$

Consideriamo i seguenti passaggi

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1}{c^2} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \vec{v}$$

da cui otteniamo la **quantità di moto relativistica in funzione della energia totale**

(1)
$$\vec{p} = \frac{E_T}{c^2} \vec{v}$$

Ora possiamo tenere conto che l'energia totale può essere espressa attraverso l'energia cinetica e a riposo

$$\vec{p} = \left(\frac{E_C}{c^2} + m_0\right) \vec{v}$$

L'espressione

$$\vec{p} = (\frac{E_C}{c^2} + m_0)\vec{v}$$

mostra che la differenza tra l'espressione relativistica della quantità di moto e quella classica $\boldsymbol{m_0 v}$ risiede nel termine $\mathbf{E_c/c^2}$ che si aggiunge alla massa a riposo (e che coincide con la massa inerziale classica). In altre parole **si potrebbe pensare di ottenere l'espressione relativistica della quantità di moto semplicemente aggiungendo alla massa inerziale del corpo materiale una massa inerziale addizionale dovuta alla sua energia cinetica E_c** secondo la relazione

(1) $$M = E_c / c^2$$

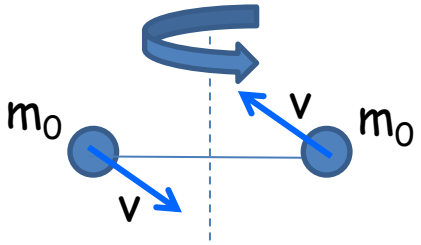
Detto in parole ancora diverse **secondo la teoria della relatività ristretta l'energia cinetica di un corpo materiale contribuisce alla sua massa inerziale** con un termine dato dal quoziente tra l'energia cinetica ed il quadrato della velocità della luce.

Questo fatto può essere ulteriormente chiarito dal seguente esempio. Immaginiamo di avere due corpi materiali di massa a riposo m_0 uniti da una sottile asticella di massa trascurabile. Nel caso in cui il dispositivo è fermo la massa vale semplicemente

$$m = 2m_0$$

Se ora poniamo in rotazione il dispositivo attorno all'asse, le due masse si muoveranno con velocità v dipendente dalla rapidità della rotazione. Ognuna acquisisce anche una energia cinetica Ec e con essa una massa addizionale. Si ha allora che la massa complessiva del dispositivo in moto vale

$$m = 2m_0 + 2\frac{E_c}{c^2}$$



Qualora mettessimo il dispositivo sulla bilancia dovremmo constatare un aumento di massa e dunque **la rivoluzionaria conclusione che l'energia, ovvero il movimento, ha un peso**! Da un punto di vista generale, il processo fisico che mette in movimento il dispositivo è un processo che richiede energia e che ne determina un aumento della massa per cui si configura come una **conversione di energia cinetica in massa inerziale** mentre il processo contrario che portasse il dispositivo nuovamente in quiete si configurerebbe come una **conversione di massa inerziale in energia cinetica**. Dunque **è possibile convertire energia cinetica in massa e massa in energia cinetica** secondo la formula (1).

Ci si può domandare se tale interconvertibilità possa essere estesa ad ogni forma di energia. Accenniamo allora la fatto che qualora il corpo materiale fosse soggetto a forze conservative otterremo una espressione della energia totale data da

$$E_T = E_0 + T_{rel} + V$$

che sostituita nella (1) fornisce

$$\vec{p} = \frac{E_T}{c^2}\vec{v} = \frac{(E_0 + E_c + V)}{c^2}\vec{v} = (\frac{E_c}{c^2} + \frac{V}{c^2} + m_0)\vec{v}$$

Anche in questo caso la differenza tra l'espressione relativistica della quantità di moto e quella classica $\boldsymbol{m_0 v}$ risiede nei termini $\mathbf{E_c/c^2}$ e $\mathbf{V/c^2}$ che si aggiungono alla massa a riposo (e che coincide con la massa inerziale classica) per cui possiamo concludere che secondo la teoria della relatività ristretta non solo l'energia cinetica ma **anche l'energia potenziale di un corpo materiale contribuisce alla sua massa inerziale**. Si tratta di un risultato che può essere dimostrato in modo del tutto generale per concludiamo che **qualunque forma di energia contribuisce alla massa** con un contributo pari a

$$M = E / c^2$$

Vale la pena sottolineare che la lettura in senso inverso di questa relazione, ovvero la conversione di massa in energia, non è in alcun modo precisata dalla teoria della relatività ristretta. La frazione di massa che può essere convertita in energia dipende in generale dalle proprietà del sistema. Ad esempio la massa a riposo di una particella fondamentale (cioè non composta di altre particelle) e stabile (posto che esistano) non può essere convertita in energia. Nel caso invece di un sistema composto di particelle è presumibile che la quota di massa derivante dalla energia dei suoi costituenti possa essere più o meno facilmente trasformata in energia attraverso una qualche reazione. La successiva trasformazione in energia delle masse dei costituenti dipende dalla loro stabilità e non è detto che sia possibile.

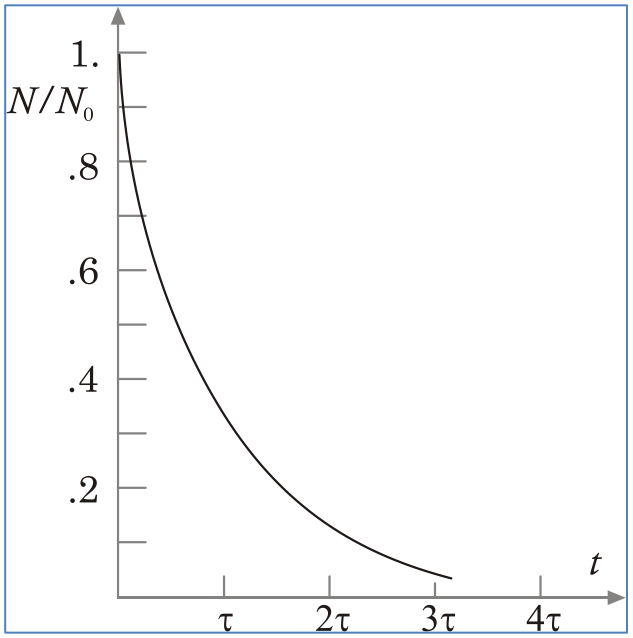
Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con particelle elementari
il flusso di muoni a terra

Legge del decadimento (τ è la 'vita media' della particella)

$$N(t) = N_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

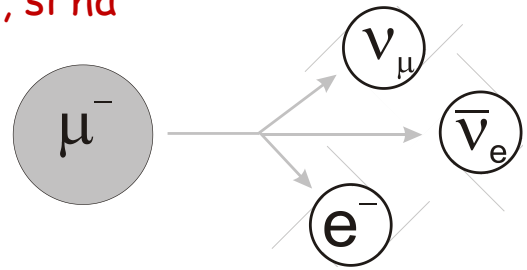
Si noti che dopo ***t*** si ha $N(t) = N_0/2.72$

dopo ***2t*** si ha $N(t) = N_0/2{,}72^2 = N_0/7{,}4\ldots$ etc. etc.



Nel caso dei muoni, prodotti nella interazione fra raggi cosmici e atmosfera, si ha

$$\tau \approx 2{,}2\ \mu s$$



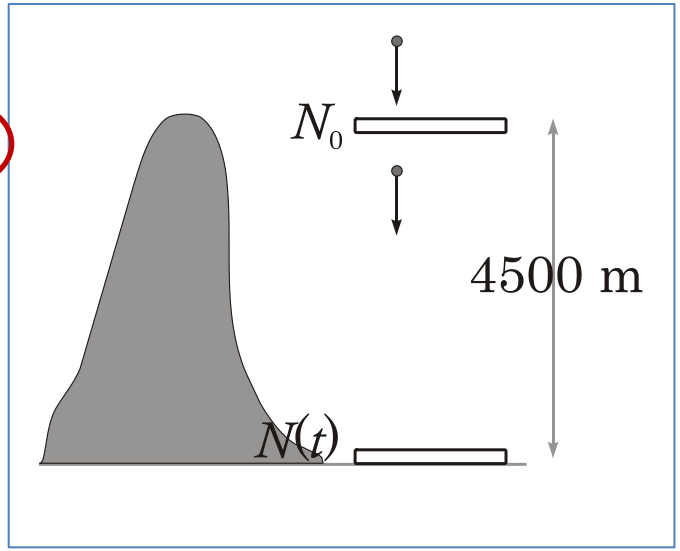
Supponiamo di avere nell'alta atmosfera a *4500 m* di quota, un flusso *1000* muoni all'ora. Il tempo necessario per arrivare a terra vale allora

$$\Delta t = \frac{4500}{0{,}995 \cdot c} \cong 15\ \mu s$$

Assumendo la **fisica classica**, il flusso di muoni a terra dovrebbe valere

$$N_{class}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{2,2}} \approx 10^3 \times 10^{-3} \approx 1$$

ogni ora.



Assumendo invece la **fisica relativistica**, si deve tenere conto del fenomeno della *dilatazione dei tempi* che allunga la vita dei muoni per l'osservatore a terra

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.2}{\sqrt{1-(\frac{0,995c}{c})^2}} \approx 2.2 \times 10 = 22\ \mu s$$

si ha allora per il flusso osservato a terra

$$N_{rel}(t) = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau'}} = 10^3 \times e^{-\frac{15}{22}} \approx 10^3 \times 0.5 \approx 500$$

ogni ora.

I risultati sperimentali confermano in pieno la seconda previsione.

Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con particelle elementari
il flusso di muoni in un acceleratore

Nature **268**, 301-305 (28 July 1977)

Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit

J. Bailey[1], K. Borer[2], F. Combley[3], H. Drumm[4], F. Krienen[5], F. Lange[6], E. Picasso[7], W. von Ruden[8], F. J. M. Farley[9], J. H. Field[10], W. Flegel[11] & P. M. Hattersley[12]

1. [1]Daresbury Laboratory, Warrington, Lancashire, UK
2. [2]Physikalisches Institut, Universität Beon, Bern, Switzerland
3. [3]Department of Physics, University of Sheffield, Sheffield, UK
4. [4]European Organization for Nuclear Research, Geneva
5. [5]European Organization for Nuclear Research, Geneva
6. [6]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
7. [7]European Organization for Nuclear Research, Geneva
8. [8]Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
9. [9]Royal Military College of Science, Shrivenham, Wiltshire, UK
10. [10]European Organization for Nuclear Research, Geneva
11. [11]European Organization for Nuclear Research, Geneva
12. [12]Department of Physics, University of Birmingham, Birmingham, UK

The lifetimes of both positive and negative relativistic (γ = 29.33) muons have been measured in the CERN Muon Storage Ring with the results τ^+ = 64.419 (58) μs, τ^- = 64.368 (29) μs The value for positive muons is in accordance with special relativity and the measured lifetime at rest: the Einstein time dilation factor agrees with experiment with a fractional error of 2×10^{-3} at 95% confidence. Assuming special relativity, the mean proper lifetime for μ^- is found to be τ_0^- = 2.1948(10) μs the most accurate value reported to date. The agreement of this value with previously measured values of τ_0^+ confirms CPT invariance for the weak interaction in muon decay.

▲ Top

In questo lavoro il fenomeno della dilatazione dei tempi è stato utilizzato per ricavare la vita media del muone

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{64.368}{29.33} \approx 2.1948\ \mu s$$

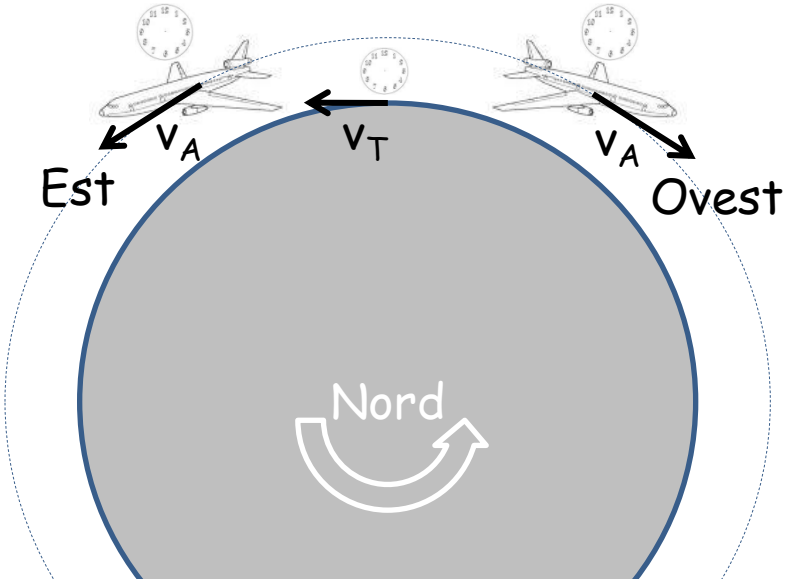
Verifiche sperimentali:
la dilatazione del tempo con orologi macroscopici

Nel 1971 J. Hafele e R. Keating eseguirono un esperimento per la verifica del fenomeno della dilatazione del tempo con *orologi macroscopici*.
Nel fenomeno misurato concorrono sia la *dilatazione del tempo di origine cinematica* della teoria della relatività ristretta che quella *di origine gravitazionale* della teoria della relatività generale. Esso è pertanto un *test* della fenomeno della dilatazione del tempo nella sua forma più generale.

Orologio a terra :
- dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità
- dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T

Orologio Est:
- dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
- dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T+V_A

Orologio Ovest:
- dilatazione del tempo dovuta al campo di gravità (effetto meno intenso di quello dell'orologio a terra)
- dilatazione del tempo dovuto alla velocità tangenziale rispetto alle stelle fisse V_T-V_A



	nanoseconds gained			
	predicted			measured
	gravitational (general relativity)	kinematic (special relativity)	total	
eastward	144±14	−184 ± 18	−40 ± 23	−59 ± 10
westward	179±18	96±10	275±21	273±7

Dalla Teoria della Relatività Ristretta alla Teoria della Relatività Generale

Con la formulazione della teoria della relatività ristretta si chiarisce a fondo l'interpretazione dell'elettromagnetismo. Prima di tutto l'assenza di un mezzo fisico ove si propagano le azioni elettriche e magnetiche ed il fatto cruciale che *la velocità della luce assume lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali*. Come nella meccanica, *vale il principio di relatività* e l'apparente contraddizione tra i due principi può essere risolta attraverso una profonda revisione dei concetti di spazio e tempo che comporta a sua volta una riformulazione delle leggi meccaniche e la previsione di nuovi inattesi fenomeni quali la equivalenza tra energia e massa inerziale. Sia pure al prezzo di una profonda rivoluzione possiamo comunque affermare che *dopo la formulazione della TRR meccanica ed elettromagnetismo venivano completamente riconciliate*.

Rimaneva allora, nella fisica, un ***grave problema irrisolto*** riguardante la *forza di gravitazione*, una delle forze fondamentali della natura, la cui teoria di riferimento risaliva a Newton (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, I. Newton 1687*). Per capire la natura del problema richiamiamo le principali conclusioni cui era pervenuta, invece, la teoria delle forze elettriche e magnetiche la cui formulazione definitiva fu fornita da Maxwell (*A Treatise on Electricity and Magnetism*, J.C. Maxwell 1873).

Secondo la teoria di Maxwell, l'azione di una carica elettrica q_1 su di una carica elettrica q_2 distante nello spazio, non avviene direttamente ma, diciamo così, in due fasi differenti. La carica q_1 modifica lo spazio circostante creando un campo elettrico, ed è solo quando la carica q_2 viene immersa in questo campo che subisce l'azione elettrica. Non avviene dunque una azione a distanza tra le cariche ma una azione mediata dal campo. Lo stesso dicasi per le azioni magnetiche, che la teoria maxwelliana riconduceva al movimento delle cariche elettriche, e che si propaga nello spazio per mezzo del campo magnetico. Le equazioni di Maxwell precisavano, poi, tutti i dettagli di questi campi compreso ovviamente il ritardo dell'azione su q_2 da parte di q_1 dovuto al tempo necessario all'azione per propagarsi.

Nulla di tutto questo è presente nella teoria newtoniana. Miracolosa quando fu formulata alla fine del '600, la teoria non teneva conto delle recenti conquiste maxwelliane , *fondata com'era sul concetto di un'azione istantanea tra le masse distanti, andava riformulata*. Già Maxwell tentò di affrontare il problema formulando una teoria della gravitazione sulla falsariga di quella elettromagnetica ma sottili difficoltà gli impedirono di avere successo.

Teoria della relatività generale:
il principio di equivalenza

Einstein affrontò il problema da una prospettiva completamente nuova, assai distante dall'esempio dell'elettromagnetismo. Un primo passo cruciale fu quello di porre l'attenzione su un fatto noto già a Galileo, ovvero che *i corpi materiali in seguito all'azione gravitazionale acquisiscono tutti la stessa accelerazione*. Questo fatto, la cui origine risiede nella *rigorosa proporzionalità tra massa inerziale e massa gravitazionale,* che la teoria newtoniana assume senza spiegare, ha una conseguenza molto rilevante.

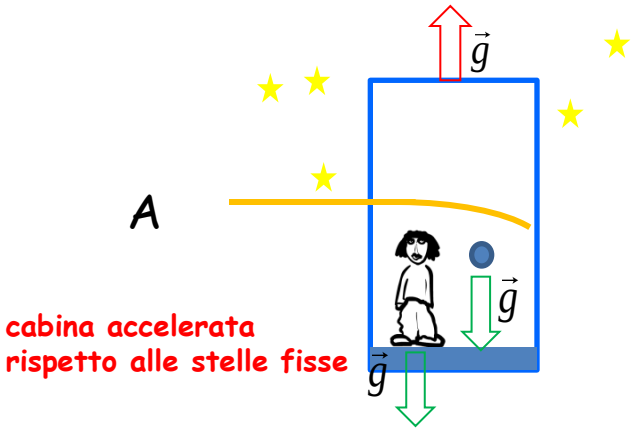
Per capirla immaginiamo che un osservatore ed un certo numero di corpi materiali si trovino in quiete relativa all'interno di una cabina nello spazio lontano da tutto e da tutti. Ad un certo istante si accendono i motori e la cabina comincia ad accelerare verso l'alto (rispetto al foglio) con una accelerazione ***a=g***. Dato che il moto accelerato è impresso alla cabina e non ai corpi questi rimangono in quiete anche se, rispetto alla cabina accelerano verso il basso con accelerazione ***a=-g***. Anche l'osservatore accelera verso il basso e quando arriva a toccare il pavimento della cabina ci si appoggia sostenendosi con le gambe mentre i corpi materiali accelerano verso il pavimento cadendovi sopra. *Per l'osservatore dentro la cabina tutto avviene come se, sotto il pavimento, invece dei motori ci fosse il pianeta terra che attrae gravitazionalmente tutti gli oggetti sopra di essa.* Questa identità tra le due situazioni è solo una curiosità priva di contenuto fisico o al contrario nasconde un profondo significato?

Come ricordato sopra *l'identità tra le due situazioni appoggia sulla proporzionalità rigorosa tra massa inerziale e gravitazionale*. Ora proprio in quegli anni, nel 1909, *L. Eotvos dimostrò con un esperimento di stupefacente precisione che massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali con una precisione di 1 su 100.000.000!* Un fatto simile non può essere casuale ed infatti Einstein pensò che non solo l'osservatore dentro la cabina ma ***nessun esperimento può distinguere tra un moto accelerato della cabina rispetto alle stelle fisse o uno stato di quiete della stessa in un campo di gravità.*** Questo fatto, che Einsten elevò a rango di principio, prende il nome di ***principio di equivalenza*** e rappresenta uno dei pilastri della futura teoria della gravitazione di Einstein

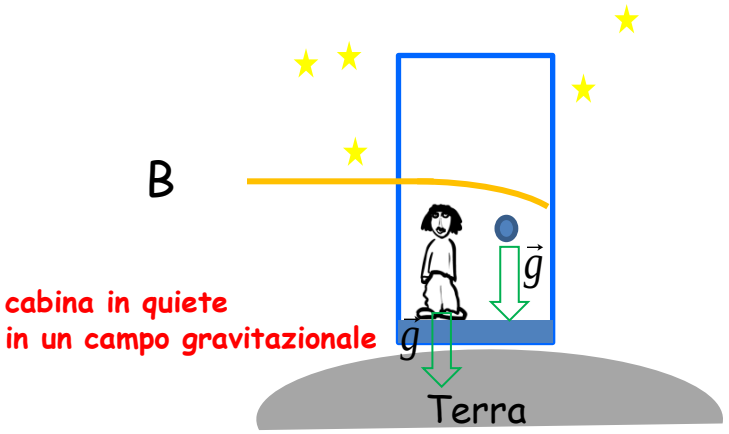
Un secondo passo altrettanto importante consiste nel riconoscere che la teoria della relatività ristretta permette di trasformare le misure eseguite in un riferimento inerziale O in quelle di un riferimento inerziale O' in moto relativo con velocità v, ma che se tale velocità invece che essere costante diventa variabile, si ottiene di fatto il passaggio da un riferimento inerziale O ad uno accelerato O'. Poiché quest'ultimo, sulla base del principio di equivalenza, è fisicamente identico ad un campo di gravità, si deduce che le trasformazioni di Lorentz con una velocità di traslazione variabile per mettono di calcolare gli effetti prodotti dai campi gravitazionali.

Per comprendere il valore preditivo del principio di equivalenza consideriamo i seguenti esempi.

Un osservatore si trova in una cabina accelerata rispetto alle stelle fisse. Ad un certo punto un raggio luminoso diretto parallelamente al pavimento entra nella cabina da un foro laterale attraversandola. Dato che la cabina accelera il raggio colpirà la parete di fronte in un punto più basso spostato vero il pavimento per cui, rispetto alla cabina, il raggio ha subito una deflessione verso il basso (A).
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, le cose andrebbero nello stesso modo se la cabina fosse ferma in campo di gravità. Dobbiamo allora concludere che ***la gravità può curvare la traiettoria della luce*** (B).



Questo effetto fu misurato per la prima volta nel 1919 da A. Eddington che osservò *la deflessione dei raggi stellari radenti la superficie del sole*. L'esperimento fu in seguito criticato ma l'effetto ebbe una conferma definitiva nel 1979 con la scoperta della prima *lente gravitazionale*.



Si consideri ora una piattaforma rotante con velocità angolare ω. Fissato in un certo punto della piattaforma si trova un osservatore O' con un orologio. Per l'osservatore fisso O, posto al centro della piattaforma, l'orologio si muove di moto circolare uniforme e dunque con una *velocità tangenziale* $v=\omega R$ ed una *accelerazione cen*tripeta $a=v^2/R=\omega^2 R$. L'osservatore solidale con l'orologio O' invece, rispetto al proprio riferimento, registrerà solo una *accelerazione centrifuga* con lo stesso valore $a=v^2/R=\omega^2 R$ (A).

In questa situazione, la teoria della relatività ristretta ci informa che per l'osservatore fisso O, l'orologio di O' deve rallentare il suo ritmo poiché in movimento. In particolare deve essere

$$\Delta t_O = \frac{\Delta \tau_{O'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta \tau_{O'}}{\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}}$$

Ora sulla base del principio di equivalenza, l'osservatore O' è equivalente ad un osservatore fermo in un campo di gravità con accelerazione radiale uscente (centriguga) $a=\omega^2 R$ ovvero con una forza peso effettiva $F=ma=m\omega^2 R$ (B).

Dato che spesso il campo gravitazionale viene caratterizzato dal suo potenziale definito come

$$\phi = -\int_a^b \frac{F}{m}\,ds + C = -\int_0^R \frac{m\omega^2 r}{m}\,dr = -\int_0^R \omega^2 r\,dr = -\frac{1}{2}\omega^2 R^2$$

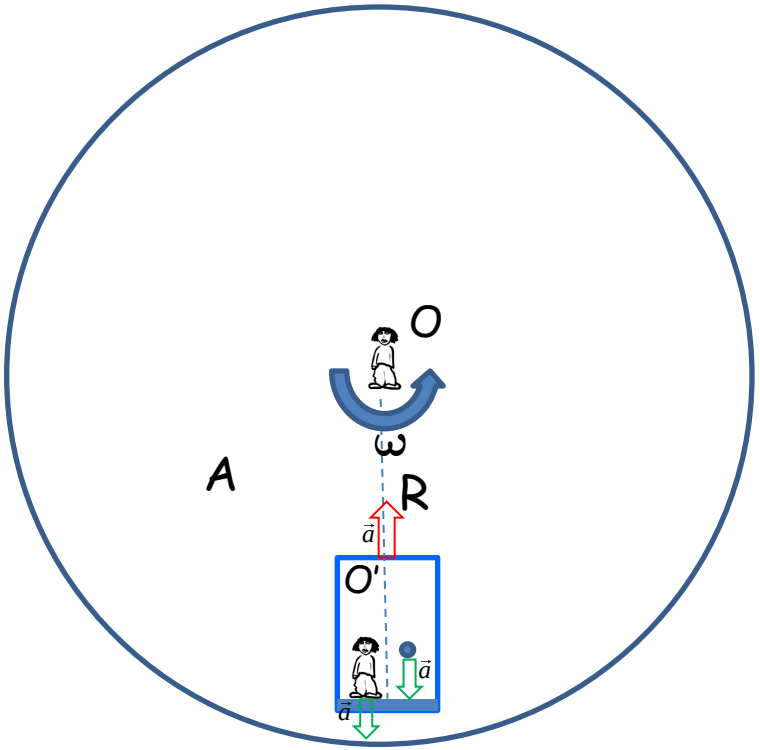
si ha anche

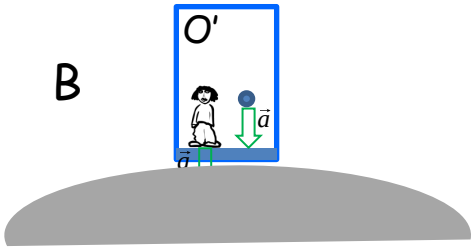
$$\omega^2 R^2 = -2\phi$$

che sostituita fornisce la formula

$$\Delta t_O = \frac{\Delta \tau_{O'}}{\sqrt{1+2\phi/c^2}}$$

La quale afferma che ***la gravitazione dilata il tempo con un effetto tanto più intenso quanto maggiore risulta essere l'intensità del campo*** (ovvero quanto più negativo risulta essere il potenziale gravitazionale). Una conseguenza molto importante è che rallentando il tempo rallenta anche la frequenza di oscillazione della luce dunque il precedente effetto porta a concludere che ***la luce uscente da un campo di gravità sposta la sua frequenza verso valori più bassi*** (spostamento verso il rosso).





Red-shift gravitazionale : R. Pound e G. Rebka 1959 più numerosissime prove astronomiche.
Dilatazione del tempo gravitazionale: J. Hafele e R. keating 1971 più numerosissime prove dal sistema GPS.

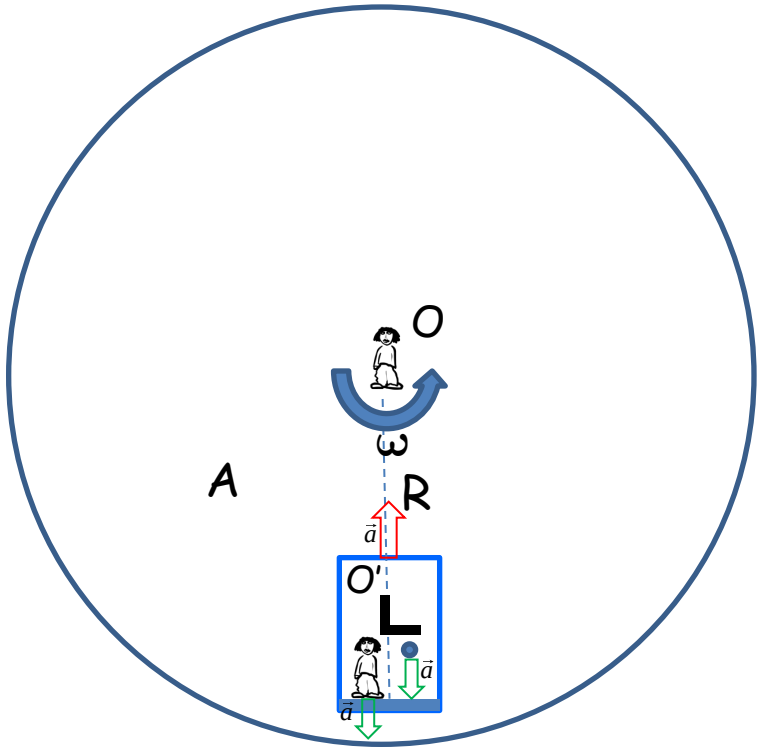
Dall'esempio precedente si può intuire un altro importante aspetto della teoria.
Immaginiamo che l'osservatore O' disponga due regoli di lunghezza L lungo le direzioni tangenti e radiali al moto che chiameremo L_T ed L_R rispettivamente.
L'osservatore fisso O giudicherà allora L_T disposto lungo la direzione del moto con velocità $v=\omega R$ e pertanto *soggetto al fenomeno della contrazione delle lunghezza* mentre giudicherà L_R perpendicolare alla direzione del moto e pertanto di *lunghezza inalterata*.
Accostando regoli rigidi tangenzialmente e radialmente, l'osservatore fisso O, può pensare allora di eseguire una misura della circonferenza e del raggio della traiettoria circolare di O'.
Per quanto riguarda il raggio, le precedenti considerazioni dicono che troverà il valore R che troverebbe in assenza di rotazione della piattaforma, mentre per quanto riguarda la circonferenza troverà il valore contratto dalla rotazione della piattaforma

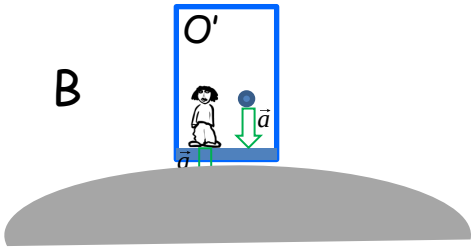
$$C = 2\pi R\sqrt{1-v^2/c^2} = 2\pi R\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}$$

Dunque il rapporto circonferenza raggio misurato da O vale

$$\frac{C}{R} = 2\pi\sqrt{1-v^2/c^2} = 2\pi\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}$$

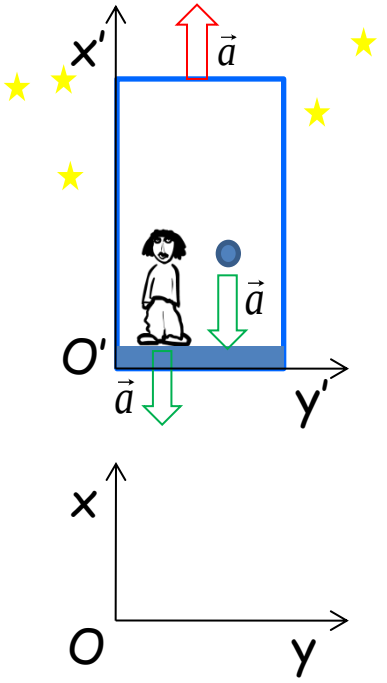
più piccolo di quello di un cerchio ordinario. Questo può accadere se il cerchio anziché essere tracciato su di un piano lo pensiamo tracciato su di superficie sferica. Li può infatti accade che il rapporto circonferenza raggio sia più piccolo di quello del piano. Dunque il moto della piattaforma ha in un certo senso curvato la geometria.
D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza si avrebbe lo stesso effetto a piattaforma ferma ma con un campo di gravità. Concludiamo allora ***che la gravità determina una trasformazione della ordinaria geometria euclidea in una geometria dello spazio curvo (non euclidea).***





Teoria della relatività generale:
le equazioni del campo

L'intuizione che la gravità potesse modificare la geometria fu sviluppata da A. Einstein nel modo seguente.



Immaginiamo che l'osservatore mobile O' si muova non di moto a velocità costante v ma di moto accelerato uniforme a (vedi figura). Assumendo le trasformazioni di Galileo per semplicità il passaggio dalle variabili di O' a quelle di O è dato dalle formule

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2}at'^2 \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x = \Delta x' - a'\Delta t' \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x^2 = \Delta x'^2 + a'^2\Delta t'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' \\ \Delta y^2 = \Delta y'^2 \\ \Delta z^2 = \Delta z'^2 \\ \Delta t^2 = \Delta t'^2 \end{cases}$$

Con queste possiamo costruire la distanza spaziotemporale tra due eventi secondo l'osservatore fisso O

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \\ &= \Delta x'^2 + a'^2\Delta t'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2 = \\ &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene nelle variabili dell'osservatore accelerato O'

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a'\Delta x'\Delta t' + (a'^2 - c^2)\Delta t'^2$$

Se O' non fosse accelerato ma si fosse mosso con velocità costante, la TRR dice che avrebbe trovato semplicemente

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2$$

D'altra parte, sulla base del principio di equivalenza, possiamo affermare che l'osservatore O' è fisicamente equivalente ad osservatore fermo in un campo di gravità per cui possiamo affermare che la modifica della distanza spaziotemporale tra due eventi da

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

a

$$\Delta s^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - 2a' \Delta x' \Delta t' + (a'^2 - c^2) \Delta t'^2$$

è di fatto causata dalla gravità.
Giungiamo allora alla conclusione che da un punto di vista formale la gravità modifica l'espressione della distanza spaziotemporale degli eventi che acquisisce la forma generale seguente

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= g_{11}\Delta x'^2 + g_{12}\Delta x'\Delta y' + g_{13}\Delta x'\Delta z' + g_{14}\Delta x'\Delta t' + \\ &= g_{21}\Delta y'\Delta x' + g_{22}\Delta y'^2 + g_{23}\Delta y'\Delta z' + g_{24}\Delta y'\Delta t' + \\ &= g_{31}\Delta z'\Delta x' + g_{32}\Delta z'\Delta y' + g_{33}\Delta z'^2 + g_{34}\Delta z'\Delta t' + \\ &= g_{41}\Delta t'\Delta x' + g_{42}\Delta t'\Delta y' + g_{43}\Delta t'\Delta z' + g_{44}\Delta t'^2 \end{aligned}$$

È evidente che in questa impostazione l'effetto della gravità è interamente descritto dai 16 coefficienti g_{jk} dipendenti in generale dalla posizione e dal tempo. Si può mostrare che non tutti sono indipendenti dato che deve essere per consistenza matematica $g_{jk}=g_{kj}$. In questo modo i coefficienti indi pendenti sono 10.
Dunque ***la gravitazione è formalmente descritta dai 10 coefficienti g_{jk} dipendenti dalla posizione e dal tempo che intervengono nella espressione della distanza spaziotemporale tra due eventi.***

Compreso questo fatto il compito principale della teoria della gravitazione sarà allora quello di definire in che modo, la causa fisica della gravitazione ovvero la massa gravitazionale, determina i coefficienti g_{jk} . Si tratta della parte più ardua della teoria poiché la massa gravitazionale, sulla base del principio di equivalenza, è indistinguibile da quella inerziale e quest'ultima, sulla base della teoria della relatività ristretta, è equivalente alla energia. Dunque la sorgente della gravita è in sostanza l'energia stessa. Einstein, in competizione con il matematico D. Hilbert, fu capace di scrivere un insieme di equazioni che fissano i coefficienti g_{jk} una volta data la distribuzione di massa-energia. Si tratta di equazioni non lineari la cui soluzione esatta è nota in un numero limitato di casi note come ***equazioni del campo di Einstein*** e che qui riportiamo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Con queste equazioni, qualora sia capaci di risolverle, può essere trattato qualunque problema di gravitazione.

Fine e...

un saluto ed un augurio a tutti voi